FICHE TD 4 - INTÉGRALES MULTIPLES ET CURVILIGNES

Exercice 1 Calculer l'intégrale

$$\int\int_D xy\; dx\, dy$$

où $D = [0,1] \times [0,1]$.

Exercice 2 Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 3 a) Calculer $\displaystyle\int\int_D (x-y)\; dx\, dy$ où D est la partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x.$$

b) Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par :

$$u = x + y, \qquad v = x - y.$$

Exercice 4 Soit D le quart de disque unité défini par :

$$D = \{(x,y) | \quad 0 \le x,\ 0 \le y,\ x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$\int\int_D (4 - x^2 - y^2)\; dx\, dy.$$

Exercice 5 Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

Exercice 6 Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

Exercice 7 a) Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{y^2}{2} \le x \le 2\}$.

b) Calculer l'intégrale

$$\int\int_D (1 + xy)\; dx\, dy$$

et le comparer à l'aire de D.

Exercice 8 Calculer la masse totale du cube $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$ ayant pour densité volumique $\mu(x,y,z) = x^2 y + xz^2$. Calculer ensuite le centre d'inertie de D.

Exercice 9 Calculer le volume de la boule de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10 Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

1. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} xy^2\, dx + 2xy\, dy$, où $\mathcal{C}$ est le triangle de sommets $(0,0), (1,0), (0,1)$ parcouru dans le sens positif.
2. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (y + xy)\, dx$, où $\mathcal{C}$ est la courbe définie par l'arc de parabole $y = x^2$ et la portion de droite $y = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, parcourue dans le sens positif.
3. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} (3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy$, où $\mathcal{C}$ est la courbe définie par les arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ $(0 \leqslant x, y \leqslant 1)$, parcourue dans le sens positif.

Exercice 11 1. Calculer la longueur de l'arc de cycloïde paramétré par $x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère l'hélice circulaire $\mathcal{H}$ paramétré par $x = a\cos(t), y = a\sin(t), z = b\,t$, où a et b sont des constantes > 0. Calculer la longueur de l'arc $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ correspondant à t variant de 0 à 2π, ainsi que l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (y+z)\, dx + (z+x)\, dy + (x+y)\, dz$.