

FICHE TD 0 - PRÉREQUIS DE TMB

Exercice 1 (Équations polynomiales)

Resoudre les équations et systèmes suivantes :

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $x(x + 1) = 0$

c) $y^2(y^2 - 4) = 0$

d) $\begin{cases} x(y + 1) = 0 \\ y^2(x^2 - 4) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (x - 1)(y^2 - 1) = 0 \\ xy(x - y) = 0 \end{cases}$

Exercice 2 (Dérivées de fonctions d'une variable réelle)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto f(x) = \frac{x^4(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^3}$

b) $t \mapsto f(t) = t \cos(t) e^{\sin t}$

c) $y \mapsto f(y) = \ln |\operatorname{sh}(2y^2)|$

d) $x \mapsto f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

e) $u \mapsto f(u) = \arcsin\left(\frac{2u}{u^2 + 1}\right)$

f) $x \mapsto f(x) = \sqrt{1 + x^2 + \cos\left(\frac{\ln x}{e^x}\right)}$

g) $y \mapsto f(y) = \left(\frac{y}{1 - \sqrt{1 - y^2}}\right)^n$

Exercice 3 (Primitives et intégrales de fonctions d'une variable réelle)

Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^1 (x^5 + 3x^3 + x^2) dx$

d) $\int_0^1 t^2 e^t dt$

g) $\int \frac{u^3}{\sqrt{1 + u^4}} du$

b) $\int \sin^2 y dy$

e) $\int \frac{x^3}{1 + x^4} dx$

h) $\int \frac{y}{\sqrt{1 - y^4}} dy$

c) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos u du$

f) $\int \frac{y}{1 + y^4} dy$

i) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$

Exercice 4 (Vecteurs de \mathbb{R}^3)

Dans \mathbb{R}^3 , considérons les deux vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 0)$ et $\vec{v} = (-3, 0, 1)$.

a) Calculer les normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ et le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

b) Montrer que le vecteur $\vec{w} = (0, 6, 1)$ est une combinaison linéaire de $\vec{u} = (1, 2, 0)$ et $\vec{v} = (-3, 0, 1)$.

Exercice 5 (Applications linéaires et matrices)

Dire si les applications suivantes sont linéaires, et dans ce cas déterminer la matrice associée :

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y)$

d) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 2z, y - z - x)$

b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2x + 3, x^2 - 5y)$

e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (1 - v, 2u, 3v - 4)$

c) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (u, v) \mapsto (2u + 3v, u - 5v)$

f) $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v, w) \mapsto (w - v, 2u, 3v - 4w)$

Calculer les composées $f \circ h$, $h \circ f$, $h \circ L$ et $L \circ Q$.

Exercice 6 (Produit et déterminant de matrices)

Calculer les possibles produits et déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$