FICHE TD 2 - CALCUL DIFFÉRENTIEL

Exercice 1 (Dérivées partielles)
Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = xy^2$, b) $f(x,y) = 3xy + e^y$, c) $f(x,y) = y\sin(2xy+1)$,
d) $f(x,y) = e^{\sin(2x)+xy}$, e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+\cos y+1}$, f) $f(x,y) = \ln(x^2y^2)$.

Exercice 2 (Gradient)
Calculer le gradient des fonctions de l'Exercice 1 aux points suivants :

a) $(0,0)$, b) $(1,-1)$, c) $(2,1)$.

Exercice 3 (Dérivée directionelle)
Trouver la dérivée directionelle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ au point $(2,1)$ dans la direction donnée par les vecteurs suivants :

a) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, b) $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$, c) $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

Exercice 4 (Différentielle)
Trouver la différentielle au point (x,y) des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$, b) $g(x,y) = x\sin y - y\sin x$, c) $h(x,y) = \arcsin(xy)$.

Exercice 5 (Approximation)
La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts), où E est la différence de potentiel électrique (en volt) et R est la résistance (en ohm). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E decroît de 5 volt et R de 0.2 ohm ? Comparer les résultats obtenus par le calcul exact avec l'approximation fournie par la différentielle de $P = P(E,R)$.

Exercice 6 (Dérivée de fonctions composées 1)
Trouver la dérivée par rapport à t de

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ où $x = \sin t$ et $y = \cos t$;
b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ où $x = e^{-t}$ et $y = e^t$.

Exercice 7 (Dérivée de fonctions composées 2)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et posons $g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

Exercice 8 (Dérivée de fonctions composées 3)
Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où f est une fonction de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ et y une fonction dérivable dans $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée $z'(x)$ en fonction des dérivées de f et de y. Appliquer la formule aux cas particuliers

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ et $y = e^{3x}$;
b) $f(x,y) = xy^2 + x^2y$ et $y = \ln x$.

Exercice 9 (Matrice Hessienne)
Calculer la matrice Hessienne au point (x, y) des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$, b) $g(x,y) = x\sin y - y\sin x$, c) $h(x,y) = \arcsin(xy)$.

Exercice 10 (Équation d'onde)
Soient F et G deux fonctions de classe C^2 dans $\mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. Montrer que u est une solution de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad \text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 11 (Laplacien 1)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et posons $F(x,y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

1. Calculer le Laplacien de F en (x, y), c'est-à-dire la valeur $\Delta F(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$.
2. Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 12 (Laplacien 2)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable deux fois. Exprimer le Laplacien de f en coordonnées polaires $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$, en utilisant le changement de variables

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

Exercice 13 (Formule de Taylor)
Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 en $(0, 0)$ pour les fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$, b) $g(x,y) = \dfrac{e^{\cos(x+y)}}{2+y}$.

Exercice 14 (Points critiques et extrema)
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux et des extrema globaux ?

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$ b) $f(x,y) = xe^y + ye^x$
c) $f(x,y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$ d) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$
e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x - y)^3$.