

FICHE TD 3 - CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 1 (Changements de coordonnées)

Soient (x, y, z) les coordonnées cartésiennes des points de \mathbb{R}^3 , (ρ, θ, z) les coordonnées cylindriques et (r, θ, φ) les coordonnées sphériques, définies comme dans le Formulaire distribué en cours. Montrer que, par changement de coordonnées, les dérivées partielles $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$, $\{\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\}$ et $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\}$ se transforment comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin \theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos \theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} = -\cos \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} - \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \theta \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial z} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \rho} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (3)$$

Exercice 2 (Champs de vecteurs)

1. Donner l'allure graphique des champs vectoriels suivants, définis sur \mathbb{R}^2 .

- (a) $\vec{V}(x, y) = \vec{i} + \vec{j}$
- (b) $\vec{V}(x, y) = (x + 1, y)$
- (c) $\vec{V}(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$
- (d) $\vec{V}(\rho, \theta) = \rho \vec{e}_\theta$
- (e) $\vec{V}(\rho, \theta) = \vec{e}_\rho + \rho \vec{e}_\theta$

2. Même question pour les champs vectoriels suivants, définis sur \mathbb{R}^3 .

- (a) $\vec{V}(x, y, z) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
- (b) $\vec{V}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$
- (c) $\vec{V}(r, \theta, \varphi) = r \vec{e}_\theta + r \vec{e}_\varphi$

3. Pour les champs vectoriels précédents, calculer $\text{div} \vec{V}$.

Exercice 3 (Divergence 1)

1. Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la divergence de $\vec{V} = xz \vec{i} + y \vec{j} + f(z) \vec{k}$ est-elle égale à z ?

2. Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a-t-on $\text{div} \vec{V} = 0$ pour les champs de vecteurs \vec{V} suivants :

- (a) $\vec{V}(x, y, z) = xz \vec{i} + y \vec{j} + (f(z) - z^2/2) \vec{k}$
- (b) $\vec{V}(x, y, z) = xf(y) \vec{i} - f(y) \vec{j}$
- (c) $\vec{V}(x, y, z) = xf(x) \vec{i} - y \vec{j} - zf(x) \vec{k}$

Exercice 4 (Divergence 2)

Pour les champs de vecteurs \vec{E} suivants, définis sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, calculer la divergence en fonction de $\rho = \|\vec{OM}\|$ où $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\vec{E}(M) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$
2. $\vec{E}(M) = \|\vec{OM}\| \cdot \vec{OM}$
3. $\vec{E}(M) = \left(\frac{\|\vec{OM}\|^2 + 1}{\|\vec{OM}\|} \right) \cdot \vec{OM}$

Exercice 5 (Divergence 3)

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et \vec{U}, \vec{V} deux champs de vecteurs différentiables définis sur \mathbb{R}^3 .

Montrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{U} + \vec{V}) &= \operatorname{div}\vec{U} + \operatorname{div}\vec{V} \\ \operatorname{div}(\alpha \vec{V}) &= \alpha \operatorname{div}\vec{V} \\ \operatorname{div}(f \vec{V}) &= f \operatorname{div}\vec{V} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}f \cdot \vec{V}\end{aligned}$$

Exercice 6 (Divergence et rotationnel)

Pour les champs de vecteurs \vec{B} suivants, défini sur \mathbb{R}^3 , trouver $\operatorname{div}\vec{B}$ et $\operatorname{rot}\vec{B}$.

1. $\vec{B}(x, y, z) = xy^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2x^2yz \frac{\partial}{\partial y} + 3yz^2 \frac{\partial}{\partial z}$
2. $\vec{B}(x, y, z) = \operatorname{sh}(xyz) \vec{i} + \operatorname{ch}(xyz) \vec{j}$
3. $\vec{B}(x, y, z) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$
4. $\vec{B}(x, y, z) = xyz \frac{\partial}{\partial x}$

Exercice 7 (Champs de gradient)

Un champ de vecteurs \vec{V} est un *champ de gradient* si $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)$ pour une fonction f qui s'appelle *potentiel scalaire* de \vec{V} . Dire si les champs suivants sont des champs de gradient, et dans ce cas déterminer leurs potentiels scalaires.

1. $\vec{V}(x, y) = (y, x)$
2. $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3) \frac{\partial}{\partial x} + (x^3 + 3xy^2 - 2y) \frac{\partial}{\partial y}$
3. $\vec{V}(x, y) = ye^{xy} \vec{i} - xe^{xy} \vec{j}$
4. $\vec{V}(x, y) = \cos x \frac{\partial}{\partial x} + \sin y \frac{\partial}{\partial y}$
5. $\vec{V}(x, y) = (y + \frac{1}{x}, x + \frac{1}{y})$
6. $\vec{V}(x, y) = (x + y, x - y)$
7. $\vec{V}(x, y, z) = \frac{2}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j} - \frac{1}{z} \vec{k}$
8. $\vec{V}(x, y, z) = (yz, -zx, xy)$
9. $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz) \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - zx) \frac{\partial}{\partial y} + (z^2 - xy) \frac{\partial}{\partial z}$

Exercice 8 (Champ central)

Un *champ central* dans \mathbb{R}^3 est un champ de la forme

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = f(r) \vec{x}$$

où

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{est le vecteur associé au point,} \\ r &= \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \text{est la distance du point de l'origine, et} \\ f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{est une application dérivable.}\end{aligned}$$

Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer son potentiel.