FICHE TD 4 - INTÉGRALES MULTIPLES, CURVILIGNES, DE SURFACE

Exercice 1 (Intégrales curvilignes)
Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

a) $\oint_{\mathcal{C}} \big(xy^2\, dx + 2xy\, dy\big)$, où $\mathcal{C}$ est le triangle de sommets $(0,0), (1,0), (0,1)$ parcouru dans le sens positif.

b) $\oint_{\mathcal{C}} (y + xy)\, dx$, où $\mathcal{C}$ est la courbe définie par l'arc de parabole $y = x^2$ et la portion de droite $y = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, parcourue dans le sens positif.

c) $\oint_{\mathcal{C}} \Big((3x^2 - 8y^2)\, dx + (4y - 6xy)\, dy\Big)$, où $\mathcal{C}$ est la courbe définie par les arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ $(0 \leqslant x, y \leqslant 1)$, parcourue dans le sens positif.

d) $\oint_{\mathcal{C}} \Big(\frac{x^2}{y}\, dx + \frac{y^2}{x}\, dy\Big)$, où $\mathcal{C}$ est le cercle de rayon 1 centré en l'origine, parcouru dans le sens antihoraire.

e) $\int_{\gamma} f\, ds$, où γ est l'arc d'hélice paramétrée par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ pour $t \in [a, b]$ et $f(x, y, z) = xy + z$.

Exercice 2 (Longueur de courbes)
Calculer la longueur des courbes γ suivantes :

a) γ est l'arc de cycloïde paramétré par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$.

b) γ est l'arc d'hélice paramétré par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, pour $t \in [0, 2\pi]$.

Exercice 3 (Intégrales doubles)
Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $\iint_D xy\, dx\, dy$, où $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

b) $\iint_D (x - y)\, dx\, dy$, où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites $x = 0$, $y = x + 2$, $y = -x$.

c) Même intégrale mais en utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$.

d) $\iint_D (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy$, où $D = \big\{(x, y) \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ est le quart de disque unité.

Exercice 4 (Aire de surfaces)
Calculer l'aire des surfaces S suivantes :

a) S est la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x$ et $y^2 = x$.

b) $S = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y^2}{2} \leq x \leq 2\Big\}$. Comparer l'aire de S à l'intégrale $\iint_S (1 + xy)\, dx\, dy$.

c) S est le tronc d'hélicoïde paramétré par $\sigma(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$, avec $u \in [0, \pi/2]$, $v \in [0, 1]$.

Exercice 5 (Intégrales triples)
Calculer les intégrales triples suivantes :

a) $\displaystyle\iiint_D (x^3y^2z - xy^2z^3)\ dx\ dy\ dz, \quad$ où $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

b) $\displaystyle\iiint_D \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz, \quad$ où D est la boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 centrée en l'origine.

Exercice 6 (Volumes)
Calculer le volume des ensembles $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ suivants :

a) Ω est la boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon r.

b) Ω est le tronc de cylindre d'équation $x^2 + y^2 = r$, pour $z \in [0,h]$.

Exercice 7 (Applications des intégrales multiples)

a) Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

b) Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

c) Calculer la masse totale du cube $D = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$ ayant pour densité de masse $\mu(x,y,z) = x^2y + xz^2$. Calculer ensuite le centre d'inertie de D.

Exercice 8 (Culbuto homogène en équilibre)

Un *culbuto* est un objet avec base arrondie fait de telle manière que si on le déplace de la position verticale il y revient en oscillant.

[Photo : MONSIEUR COLBUTO de HIBAI AGORRIA MUNITIS]

Considerons le culbuto homogène constitué d'une demi-boule de rayon 1 surmontée d'un cône de hauteur $a > 0$. Pour que ce culbuto revienne à sa position verticale d'équilibre il faut que le centre de masse G se trouve <u>strictement en dessous</u> du plan qui sépare la demi-boule du cône.

Pour quelles valeurs de a le culbuto revient-il donc à l'équilibre en position verticale ?

Concrètement, soit K_a l'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avec $-1 \leq z \leq a$ et tels que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 & \text{si } -1 \leq z \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq \left(1 - \dfrac{z}{a}\right)^2 & \text{si } 0 \leq z \leq a. \end{cases}$$

a) Dessiner K_a et en calculer le volume.

b) Pour tout $z \in [-1, a]$, soit D_z le disque contenu dans K_a à hauteur z fixée. Dessiner D_z, trouver son rayon et calculer son aire.

c) Trouver le centre de masse de K_a, en sachant qu'il se trouve sur l'axe $\vec{Oz}$.

d) Trouver les valeurs de $a > 0$ pour que le culbuto K_a revienne à l'équilibre en position verticale.