REGLE DE LEIBNIZ ET REGLE DE LA CHAINE

Presentations des "dérivées" d'une fonction de plusieurs variables:

1. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle différentiable sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$, pour tout $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in D$ on a:

   - les **dérivées partielles** $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})$ sont des nombres

     donc $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}}$ sont des fonctions réelles,

   - le **gradient** $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$

     donc $\boxed{\vec{\nabla} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n}$ est une fonction vectorielle,

   - la **différentielle** $df_{\vec{x}} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\, dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\, dx_n$ est une application linéaire $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

     donc $\boxed{df : D \longrightarrow \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$ est une fonction à valeur dans les applications linéaires,

   - la **Jacobienne** $J_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$ est une matrice à une ligne et n colonnes

     donc $\boxed{J_f : D \longrightarrow \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})}$ est une fonction à valeur dans les matrices.

2. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction vectorielle de composantes $f = (f_1, ..., f_m)$, différentiable sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$:

   - les **dérivées partielles** sont des fonctions vectorielles: $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

     $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right) \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., n;$$

   - le **gradient** "$\vec{\nabla} f$" n'existe plus;

   - la **différentielle** est une fonction à valeur dans les applications linéaires: $df : D \longrightarrow \mathrm{Lin}\,(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,
     mais les applications linéaires de base "dx_i" $(i = 1, ..., n)$ n'existent plus;

   - la **Jacobienne** est une fonction à valeur dans les matrices: $J_f : D \longrightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$:

     $$J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Dérivées de la somme et du produit de deux fonctions:

Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux fonctions différentiables sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors:

- La somme $f+g$ est aussi différentiable et $\boxed{\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g}{\partial x_i} \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., n}$ et donc aussi

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g \quad \text{si } m=1, \qquad d(f+g) = df + dg \qquad \text{et} \qquad J_{f+g} = J_f + J_g.$$

- Le produit par scalaire $\lambda\, f$ est aussi différentiable et $\boxed{\dfrac{\partial(\lambda\, f)}{\partial x_i} = \lambda\, \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., n}$ et donc aussi

$$\vec{\nabla}(\lambda\, f) = \lambda\, \vec{\nabla} f \quad \text{si } m=1, \qquad d(\lambda\, f) = \lambda\, df \qquad \text{et} \qquad J_{\lambda\, f} = \lambda\, J_f.$$

- Le produit fg est aussi différentiable et on a la **règle de Leibniz** $\boxed{\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\, g + f\, \dfrac{\partial g}{\partial x_i} \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., n}$ et donc aussi

$$\vec{\nabla}(fg) = \big(\vec{\nabla} f\big)\, g + f\, \big(\vec{\nabla} g\big) \quad \text{si } m=1, \qquad d(fg) = \big(df\big)\, g + f\, \big(dg\big) \qquad \text{et} \qquad J_{fg} = \big(J_f\big)\, g + f\, \big(J_g\big).$$

Dérivées de la composée de deux fonctions:

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction différentiable en $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction différentiable en $\vec{y} = (y_1, ..., y_m) = f(\vec{x})$, alors $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est aussi différentiable en $\vec{x}$ et on a:

- $d\big(g \circ f\big)_{\vec{x}} = dg_{f(\vec{x})} \circ df_{\vec{x}}$ (composition d'applications linéaires),
- $J_{g\circ f}(\vec{x}) = J_g(f(\vec{x})) \cdot J_f(\vec{x})$ (produit de matrices).
- Si $f = (f_1, ..., f_m)$, $g = (g_1, ..., g_p)$ et $g \circ f = \Big((g\circ f)_1, ..., (g \circ f)_p\Big)$, on a la **règle de la chaine**:

$$\boxed{\frac{\partial\big(g \circ f\big)_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\big(f(\vec{x})\big)\, \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}) \;+\; \frac{\partial g_j}{\partial y_2}\big(f(\vec{x})\big)\, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\vec{x}) \;+\; \cdots \;+\; \frac{\partial g_j}{\partial y_m}\big(f(\vec{x})\big)\, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}) \qquad \begin{array}{l}\text{pour tout } i = 1, ..., n \\ \text{et pour tout } j = 1, ..., p\end{array}}$$

En particulier, on a:

- Pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = z$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z)$:

$$\begin{aligned} d\big(g \circ f\big)_{(x,y)} &= g'\big(f(x,y)\big)\ df_{(x,y)}, \\ J_{g\circ f}(x,y) &= g'\big(f(x,y)\big)\ J_f(x,y) \end{aligned} \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y) &= g'\big(f(x,y)\big)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y) &= g'\big(f(x,y)\big)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{aligned}\right.}$$

- Pour $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ (u,v) \mapsto h(u,v) = (x,y)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$:

$$\begin{aligned} d\big(f \circ h\big)_{(u,v)} &= df_{h(u,v)} \circ dh_{(u,v)} \\ J_{f\circ h}(u,v) &= J_f\big(h(u,v)\big)\ J_h(u,v) \end{aligned} \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(f\circ h)}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial(f\circ h)}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{aligned}\right.}$$

- Pour $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ t \mapsto \gamma(t) = (x,y)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$:

$$\begin{aligned} d\big(f \circ \gamma\big)_t &= df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t \\ J_{f\circ h}(t) &= J_f\big(\gamma(t)\big)\ J_\gamma(t) \end{aligned} \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{\big(f \circ \gamma\big)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\ y'(t)}$$