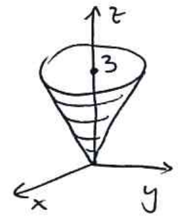
Math 2 - 2014 - Calcul de flux et circulations - A. Frabetti

Le but du cours Math 2 est d'apprendre à calculer le flux d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers une surface S : $\iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS}$.
Voici les methodes possibles.

① Cas général : si $\vec{V}$ et S n'ont rien de particulier, par exemple $\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ et S = cône , on applique la définition du flux, qui dépend de comment est donnée la surface S :

a) Si S est donnée en coord. cartesiennes, on a $\vec{dS} = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ -dx\,dz \\ dx\,dy \end{pmatrix}$, donc

$$\iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iint_S x^2 dy\,dz - y^2 dx\,dz + z^2 dx\,dy .$$



Par exemple, cône $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = z^2,\ 0\le z\le 3\}$

$$\iint_{\substack{S:\ x^2=z^2-y^2\\ 0\le z\le 3\\ -z\le y\le z}} x^2 dy\,dz = \int_0^3 dz \int_{-z}^{z} (z^2-y^2)\,dy = \int_0^3 \Big[yz^2-\tfrac{1}{3}y^3\Big]_{y=-z}^{y=z} dz = 2\int_0^3 \big(z^3-\tfrac{1}{3}z^3\big)dz = \tfrac{\cancel{4}}{3}\Big[\tfrac{1}{\cancel{4}}z^4\Big]_0^3 = 27$$

$$-\iint_S y^2 dx\,dz = -\text{ intégrale précédente } = -27$$

$$\iint_{\substack{S:\ z^2=x^2+y^2\\ 0\le z\le 3}} z^2 dx\,dy = \int_0^3 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \Big[\tfrac{1}{4}\rho^4\Big]_0^3\cdot\big[\theta\big]_0^{2\pi} = \frac{81}{4}\cdot 2\pi = \frac{81}{2}\pi$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=\rho \end{cases} \quad \begin{matrix} 0\le\rho=z\le 3 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{matrix} \Rightarrow dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$\Longrightarrow \iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS} = 27-27+\frac{81}{2}\pi = \frac{81}{2}\pi .$$

b) Si S est une surface paramétrée par $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ avec $u\in I$, $v\in J$, alors $\vec{dS} = \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial u}\wedge\frac{\partial f}{\partial v}}\,du\,dv$ et $\iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iint_{I\times J} \vec{V}(f(u,v))\cdot\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial u}\wedge\frac{\partial f}{\partial v}}\,du\,dv$

Par exemple, cône $S = \{ f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho) \mid \rho\in[0,3],\ \theta\in[0,2\pi] \} \Longrightarrow$

$$\vec{V}(f(\rho,\theta)) = \rho^2\cos^2\theta\,\vec{i} + \rho^2\sin^2\theta\,\vec{j} + \rho^2\,\vec{k}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial \rho}} = (\cos\theta, \sin\theta, 1) \\ \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial \theta}} = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta, 0) \end{cases} \Longrightarrow \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial \rho}\wedge\frac{\partial f}{\partial \theta}} = (-\rho\cos\theta, -\rho\sin\theta, \rho) \Longrightarrow$$

$$\iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iint_{[0,3]\times[0,2\pi]} \begin{pmatrix} \rho^2\cos^2\theta \\ \rho^2\sin^2\theta \\ \rho^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\rho\cos\theta \\ -\rho\sin\theta \\ \rho \end{pmatrix} d\rho\,d\theta = \int_0^3 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \Big[1-\underbrace{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}_{\int_0^{2\pi}=0}\Big]d\theta = \Big[\tfrac{1}{4}\rho^4\Big]_0^3\cdot\big[\theta\big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{81}{4}\cdot 2\pi = \frac{81\pi}{2} .$$

2/ ② <u>Cas particuliers</u> : $\vec{V}$ ou S ont des propriétés supplémentaires :

a) <u>Si $\vec{V} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$</u> (donc $\mathrm{div}\,\vec{V}=0$), on applique le

<u>Théorème de Stokes</u> : $\boxed{\iint_S \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\cdot\vec{dS} = \oint_{\partial S} \vec{U}\cdot\vec{d\ell}}$ où ∂S = bord de S = courbe fermée

"Le flux de $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$ à travers S est égal à la circulation de $\vec{U}$ le long de la courbe fermée $C = \partial S$ = bord de S".

N.B. Le thm de Stokes "en deux variables" (dans $\mathbb{R}^2$) s'appelle <u>Théorème de Green-Riemann</u>.

<u>Ex</u> : S = cône  $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ 0\le z\le 3\end{cases}$ $\Longrightarrow$ ∂S = cercle à hauteur $z=3$ $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ z=3\end{cases}$ orienté 

b) Si $\vec{V}$ n'est pas forcement un champ à divergence nulle, mais <u>S est une surface fermée</u> (ie. $\partial S=\emptyset$) et donc <u>elle entoure un solide Ω</u> (ie. $S=\partial\Omega$)

alors on applique le <u>Théorème de Gauss</u> (ou Ostrogradski) : $\boxed{\iint_{S=\partial\Omega} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iiint_\Omega \mathrm{div}\,\vec{V}\cdot dx\,dy\,dz}$

"Le flux de $\vec{V}$ à travers une surface fermée est égale à l'intégrale triple de $\mathrm{div}\,\vec{V}$ sur le volume Ω qu'elle entoure."

<u>Ex</u> : S = cône  $\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ 0\le z\le 3\end{cases}$ $\cup$ disque  $\begin{cases} x^2+y^2\le 9 \\ z=3\end{cases}$ $=\partial\Omega$ où

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 3\}$$

$$\vec{V}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k} \Longrightarrow \mathrm{div}\,\vec{V} = 2x+2y+2z = 2(x+y+z)$$

$$\iint_S \vec{V}\cdot\vec{dS} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \iiint_\Omega \mathrm{div}\,\vec{V}\cdot dx\,dy\,dz = 2\iiint_{\Omega\,:\,\substack{x^2+y^2\le z^2\\ 0\le z\le 3}} (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = ⊛$$

coord. cylindriques $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z\end{cases}$ $0\le\rho\le z$

$$\Longrightarrow dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

$$(x+y+z)\,dx\,dy\,dz = (\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)\rho = \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)+\rho z$$

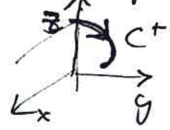
$$⊛ = 2\int_0^3 dz\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left[\rho^2(\cos\theta+\sin\theta)+\rho z\right]d\rho = 2\int_0^3 dz \int_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{3}\rho^3(\cos\theta+\sin\theta)+\tfrac{1}{2}\rho^2 z\right]_{\rho=0}^{\rho=z} d\theta$$

$$= 2\int_0^3 dz\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{3}z^3(\cos\theta+\sin\theta)+\tfrac{1}{2}z^3\right)d\theta = 2\int_0^3\Big[\tfrac{1}{3}z^3\underbrace{(\sin\theta-\cos\theta)}_{\int_0^{2\pi}=0}+\tfrac{1}{2}z^3\theta\Big]_0^{2\pi}dz$$

$$= \cancel{2}\int_0^3 \tfrac{1}{\cancel{2}}z^3\,2\pi\,dz = 2\pi\left[\tfrac{1}{4}z^4\right]_0^3 = \frac{2\pi}{4}\cdot 81 = \frac{81\pi}{2}.$$

Il reste à apprendre à calculer la circulation d'un champ de vecteurs $\vec{U}$ le long d'une courbe orientée C^+, $\int_{C^+} \vec{U} \cdot \vec{dl}$, pour pouvoir appliquer le théorème de Stokes.

(3) <u>Cas général</u> : si $\vec{U}$ et C n'ont rien de particulier, par exemple $\vec{U}(x,y,z) = (z-1)\,\vec{i} - x\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$ et C^+ = arc de parabole



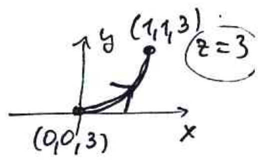
, on applique la définition de la circulation, qui dépend de comment on donne la courbe C.

a) <u>Si C est donnée en coordonnées cartesiennes</u>, on a $\vec{dl} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$, donc

$$\int_{C^+} \vec{U} \cdot \vec{dl} = \int_{C^+} (z-1)dx - x\,dy + xy\,dz .$$

Par exemple, C^+= parabole $= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2,\ z = 3,\ 0 \leq x \leq 1\}$

orientation : de $(0,0,3)$ à $(1,1,3)$



$$\int_{C^+} \vec{U} \cdot \vec{dl} = \int_{C^+} (z-1)dx - x\,dy + xy\,dz = \int_0^1 (3-1)\,dx - \int_0^1 2x^2 dx + \int_0^1 x^3 \cdot 0$$

C^+ : $x : 0 \to 1$

$y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx$

$z = 3 \Rightarrow dz = 0$

$$= 2\int_0^1 dx - 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} .$$

b) <u>Si C^+ est une courbe paramétrée</u> par $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ avec $t \in I$, alors $\vec{dl} = \vec{\gamma'(t)}\,dt$ et $\int_\gamma \vec{U} \cdot \vec{dl} = \int_I \vec{U}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma'(t)}\,dt$.

Par exemple ;

parabole $= \{\gamma(t) = (t, t^2, 3) \mid t \in [0,1]\} \Rightarrow \vec{\gamma'(t)} = (1, 2t, 0)$

$\vec{U}(\gamma(t)) = (3-1)\vec{i} - t\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$, $I = [0,1]$

$$\int_\gamma \vec{U} \cdot \vec{dl} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2 \\ -t \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2 - 2t^2)\,dt = 2\left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2 \cdot (3-1)}{3} = \frac{4}{3} .$$

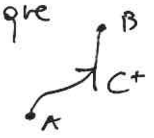
④ <u>Cas particulier</u> : si $\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est un champ de gradient (donc $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{U} = \vec{0}$), on a les théorèmes suivants :

<u>Théorèmes</u> :

a) Si C^+ est une <u>courbe fermée</u>, alors :
(i.e. il n'y a pas de points de bord : $\partial C = \emptyset$)

$$\boxed{\oint_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = 0.}$$

b) Si C^+ est une courbe quelconque reliant les points A et B
(i.e. $\partial C = \{A, B\}$)



alors :

$$\boxed{\int_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = f(B) - f(A)}$$

<u>Exemples</u> : Si $\vec{U} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ où $f(x,y,z) = (x+y)z$, alors :

$$\oint_{\text{cercle}} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = 0$$

$$\int_{C \text{ reliant } (0,1,1) \text{ à } (3,1,2)} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \vec{dl} = f(3,1,2) - f(0,1,1) = (3+1)2 - (0+1)\cdot 1 = 8 - 1 = 7.$$