APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

1 Applications linéaires

1. Soient V et V' des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
   Application linéaire entre V **et** V' = application $L : V \longrightarrow V'$, $\vec{v} \mapsto \vec{v}' = L(\vec{v})$ t.q.
   - $L(\vec{u}+\vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$,
   - $L(t\ \vec{v}) = t\ L(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in V$ et $\forall s, t \in \mathbb{R}$. [En particulier : $L(\vec{0}) = L(0\ \vec{v}) = 0\ L(\vec{v}) = \vec{0}$.]

   Autrement dit : $L : V \longrightarrow V'$ est **linéaire** $\Leftrightarrow$ $L(s\ \vec{u} + t\ \vec{v}) = s\ L(\vec{u}) + t\ L(\vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ et $\forall s, t \in \mathbb{R}$.
   En coordonnées, une application linéaire est donnée par des **polynômes de degré 1 sans termes constants**.

2. **Exemples**
   (a) Applications linéaires sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:
   - $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ -y \\ y-2x \end{pmatrix}$; et aussi $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x-y+z \end{pmatrix}$.
   - **Projection** du plan sur la droite de direction $\vec{\imath}$: $P_{\vec{\imath}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, ou de direction $\vec{\jmath}$: $P_{\vec{\jmath}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.
   - **Rotation d'angle** θ dans le plan : $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $R_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta\ x + \sin\theta\ y \\ -\sin\theta\ x + \cos\theta\ y \end{pmatrix}$.

   (b) Applications <u>non</u> linéaires sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:
   - $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + \sin y \\ xy \end{pmatrix}$: les termes x^3, $\sin y$ et xy ne sont pas linéaires.
   - **Translation** par un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans le plan : $T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_{\vec{v}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$.
   - $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+1 \\ 2y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: application linéaire plus translation = **application affine**.

   (c) Applications linéaires sur l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions différentiables :
   - La **dérivation** $d : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $(df)(x) := f'(x)$ est linéaire, car
     $d(3\ f + 2\ g) = 3\ df + 2\ dg$. $\Big[$En effet, cela signifie que $\Big(3\ f(x) + 2\ g(x)\Big)' = 3\ f'(x) + 2\ g'(x).\Big]$
   - La **multiplication par** x : $M_x : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $M_x(f)(x) = (x\ f)(x) := x\ f(x)$ est linéaire, car
     $M_x(3\ f + 2\ g)(x) = x\ \Big(3\ f(x) + 2\ g(x)\Big) = 3\ \Big(x\ f(x)\Big) + 2\ \Big(x\ g(x)\Big) = \Big(3\ M_x(f) + 2\ M_x(g)\Big)(x)$.

3. **L'ensemble** $\mathcal{L}(V, V')$ **des applications linéaires** $V \longrightarrow V'$ **est un espace vectoriel**, avec
   - **addition** : $(L + L')(\vec{v}) := L(\vec{v}) + L'(\vec{v})$ pour tout $v \in V$, avec **zéro** = application nulle $0(\vec{v}) = \vec{0}$;
   - **produit par scalaire** : si $t \in \mathbb{R}$, $(t\ L)(\vec{v}) := t\ L(\vec{v})$ pour tout $v \in V$.

   Ex. : $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -y \end{pmatrix}$, $L'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ x+y \end{pmatrix}$ $\Longrightarrow$ $(L+L')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ x \end{pmatrix}$ et $(3\ L)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+3y \\ -3y \end{pmatrix}$.

4. **Composition** de $L : U \longrightarrow V$ et $L' : V \longrightarrow W$ = application $L' \circ L : U \longrightarrow W$ déf. par $(L' \circ L)(\vec{u}) := L'\Big(L(\vec{u})\Big)$.

   Exemple : si $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ -y \\ x+2y \end{pmatrix}$ et $L' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+w \\ v-w \end{pmatrix}$, alors

   $$(L' \circ L)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x+y) + (x+2y) \\ -y - (x+2y) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (L \circ L')\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(u+w) + (v-w) \\ -(v-w) \\ (u+w) + 2(v-w) \end{pmatrix}.$$

5. **Isomorphisme** entre V et V' = application linéaire $L : V \longrightarrow V'$ qui soit bijective (ou inversible, $L^{-1} : V' \longrightarrow V$.)
   - Les espaces vectoriels V et V' s'appellent **isomorphes**, $V \cong V'$.
   - Un isomorphisme transforme une base de V en une base de V'. Donc V et V' ont la même dimension.

6. <u>Si V et V' ont un produit scalaire</u> :
   Isométrie entre V et V' = isomorphisme $L : V \longrightarrow V'$ qui conserve les produits scalaires : $L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.
   - Une isométrie conserve aussi les longueurs (norme) et les angles.

2 Matrices

1. **Matrice** $m \times n$ à coéfficients réels $(a_{ij}) :=$ tableau $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ où $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $\begin{cases} i = 1, ..., m \\ j = 1, ..., n \end{cases}$.

   Exemples : $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$ vecteur, $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. **L'ensemble $\mathcal{M}_{mn} \equiv \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ des matrices $m \times n$ à coéfficients réels est un espace vectoriel**, avec

   - **addition** : $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$, avec **zéro**= matrice nulle.
   - **produit par scalaire** : si $t \in \mathbb{R}$, $t\ (a_{ij}) := (t\ a_{ij}) = \begin{pmatrix} t\ a_{11} & \cdots & t\ a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t\ a_{m1} & \cdots & t\ a_{mn} \end{pmatrix}$.

   Exemples : $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $2 \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

3. **Multiplication** $\mathcal{M}_{mn} \times \mathcal{M}_{np} \longrightarrow \mathcal{M}_{mp}$, $(a_{ij})\ (b_{jk}) = (c_{ik})$ avec $c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk}$ (**règle "ligne $\times$ colonne"**).

   Exemples : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

4. **Rélation entre matrices et applications linéaires**

   - **Les ensembles $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ sont en bijection** :

     $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire $\iff$ $L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\ \vec{x}$.

     Exemple : $L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ -y \\ y - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   - **Les espaces vectoriels $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ sont isomorphes** :

     $L(\vec{x}) = A\ \vec{x}$, $L'(\vec{x}) = A'\ \vec{x}$ $\implies$ $(L + L')(\vec{x}) = (A + A')\ \vec{x}$ et $(t\ L)(\vec{x}) = (t\ A)\ \vec{x}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   - **Composition $\longleftrightarrow$ produit :** $\vec{y} = L(\vec{x}) = A\ \vec{x}$, $\vec{z} = L'(\vec{y}) = A'\ \vec{y}$ $\implies$ $(L' \circ L)(\vec{x}) = (A'A)\ \vec{x}$.

     Exemple : si $L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $L' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

     $L' \circ L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + y - y \\ -3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A'A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & 1-1 \\ 0+0 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

5. **Détérminant** $\det : \mathcal{M}_{nn} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini, pour $n = 2, 3$, par : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$ et

   $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

   - <u>Attention</u> : le détérminant **n'est pas une application linéaire**, car $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.
   - Si A est une matrice $n \times n$: $\det(t\ A) = t^n\ \det(A)$.
   - $\det(A\ B) = \det(A)\ \det(B)$.

   Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est **inversible** ssi $\det A \neq 0$ et sa **matrice inverse** est $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

   Exemple : $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$, donc $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

   - Si $L(\vec{x}) = A\ \vec{x}$: L est un isomorphisme $\iff$ $\det A \neq 0$. Dans ce cas $L^{-1}(\vec{y}) = A^{-1}\ \vec{y}$.

6. **Transposé** ${}^T : \mathcal{M}_{mn} \longrightarrow \mathcal{M}_{nm}$, $(a_{ij})^T := (a_{ji})$. Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

   Une matrice A est **orthogonale** si $A^{-1} = A^T$. Exemple : une rotation $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

   - <u>Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien</u> :

     Si $L(\vec{x}) = A\ \vec{x}$: L est un isométrie $\iff$ $\det A = \pm 1$ et A est une matrice **orthogonale**.