Ch. III - Fonctions à plusieures variables

Dans ce chapitre, tout ce qui est exposé pour $\mathbb{R}^2$ est valable aussi pour $\mathbb{R}^3$ et en général pour $\mathbb{R}^n$. La généralisation est évidente et ne sera pas traitée explicitement.

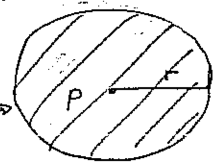
1. Ensembles ouverts, fermés, bornés et compacts de $\mathbb{R}^2$

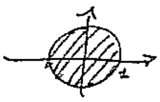
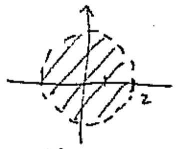
<u>Déf</u>. Soit P un point de $\mathbb{R}^2$ et $r>0$ un réel positif. On appelle :

- ~~boule~~ <u>ouverte</u> (ou <u>disque ouvert</u>) de centre P et rayon r le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ $B_P(r) = \{Q\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{dist}(P,Q)<r\}$

  où $\mathrm{dist}(P,Q) = \|\vec{OQ}-\vec{OP}\|$.
- <u>boule fermée</u> (ou <u>disque fermé</u>) le $B_P^*(r) \equiv \overline{B}_P(r) = \{Q\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{dist}(P,Q)\le r\}$
- <u>bord</u> des disques $B_P(r)$ et $\overline{B}_P(r)$ le sous-ensemble

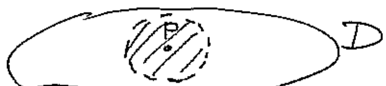
  $\partial B_P(r) = \{Q\in\mathbb{R}^2,\ \mathrm{dist}(P,Q)=r\}$ = cercle ∂B



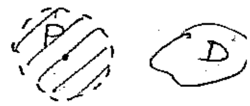
<u>Ex</u>: $\overline{B}_O(1) =$  , $B_O(2) =$ 

<u>Déf</u>. Soit $D\subseteq\mathbb{R}^2$ un sous-ensemble du plan. Un point $P\in D$ s'appelle

- <u>point intérieur</u> de D s'il existe un disque ouvert B_P centré en P et contenu dans D.



- <u>point extérieur</u> à D s'il existe un disque ouvert B_P qui n'intersecte pas D.

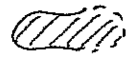


- <u>point frontière</u> ou <u>point du bord</u> si <u>tout</u> disque B_P centré en P contient à la fois des points de D et de $\mathbb{R}^2\setminus D$

  <u>Attention</u> : un point du bord peut être dans D ou non !
  L'ensemble des points du bord de D s'indique avec ∂D.
- <u>point isolé</u> s'il existe un disque ouvert B_P t.q. $D\cap B_P = \{P\}$.

<u>Déf</u>. Un sous-ensemble $D\subseteq\mathbb{R}^2$ est

- <u>ouvert</u> s'il ne contient aucun de ses points de bord : 
- <u>fermé</u> s'il contient tous ses points de bord : 

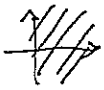
<u>Attention</u> : il existe des ensembles ni ouverts ni fermés : 

<u>Déf</u>. Pour tout sous-ensemble $D\subseteq\mathbb{R}^2$:

- $D\cup\partial D$ est fermé et s'appelle <u>fermeture de D</u>
- $D\setminus(D\cap\partial D)$ est ouvert et s'appelle <u>intérieur de D</u>

Déf. Un ensemble $D \subseteq \mathbb{R}^2$ est

- borné s'il existe un disque B qui le contient : 

  ex : - $D = \mathbb{R}$ n'est pas borné dans $\mathbb{R}^2$
  - un demi-plan  n'est pas borné.

- compact s'il est fermé et borné (cela vaut dans $\mathbb{R}^n$ mais pas en général !)

2- Fonctions de deux variables

Déf. Une fonction (sous-entendu "réelle") de plusieures variables est une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui associe à tout point $P \in \mathbb{R}^n$ au maximum une valeure réelle $f(P)$.

Ex : . Fcts de deux variables : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + xy + 1$

$f(x,y) = e^x + sh(x-y)$ etc

pression = fct(volume, temperature)

. Fcts de trois variables : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) =$ n'importe-quoi, $x + y^2 + z^3$

Déf Une fonction vectorielle de plusieures variables est une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ qui associe à tout point (ou vecteur) de $\mathbb{R}^n$ au maximum un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x^2, x+y, y^2)$. etc.

Attention : une fonction vectorielle n'est pas forcement linéaire !

Tout ce qu'on enonce pour les fcts réelles peut être enoncé pour les fcts vectorielles. Nous l'indicons seulement quand il y a des differences.

Déf. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle :

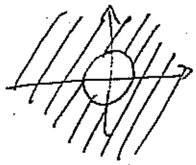
- domaine de f l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels f est bien définie : $D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \exists\, f(x,y) \in \mathbb{R} \}$

- image de f l'ensemble $I_f = \{ z = f(x,y) \in \mathbb{R},\ (x,y) \in D_f \}$

  Si f est vectorielle : $I_f = \{ (z_1,.., z_n) \in \mathbb{R}^n,\ (z_1,..,z_n) = f(x_1,..,x_m), (x_1,..,x_n) \in$

Exemples :

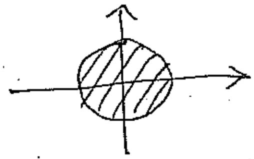
1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$



$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-1 \geq 0 \}$ = exterieur du disque $B_0(1)$ $\cup\ \partial B_0(1)$

$I_f = [0, \infty[= \mathbb{R}_+$

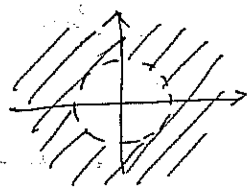
2) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$



$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1-x^2-y^2 \geq 0 \}$ = disque fermé $\overline{B_0}(1)$

$I_f = [0,1]$, car $x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 1-x^2-y^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2-y^2} = f(x,y) \leq 1$.

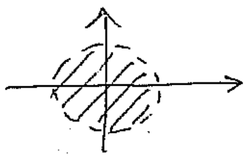
3) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1)$



$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-1 > 0 \}$ = exterieur de $B_0(1)$ sans le bord

$I_f = \mathbb{R}$

4) $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$

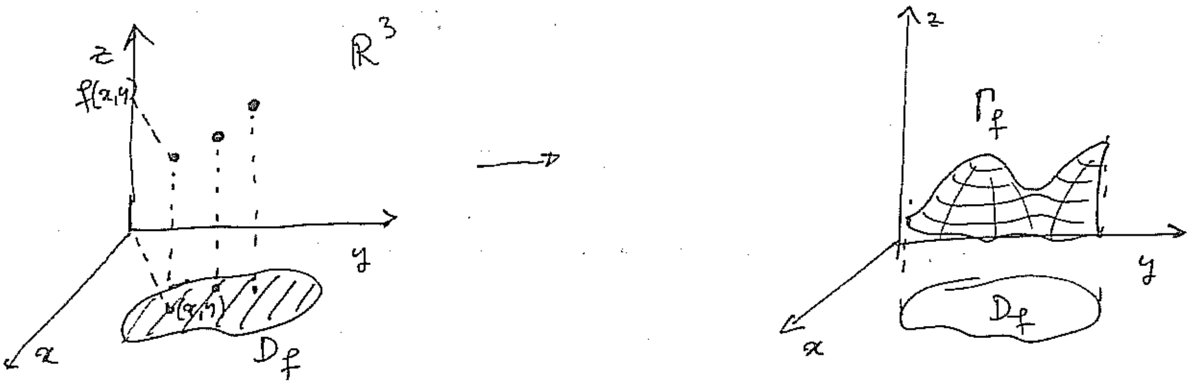


$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1-x^2-y^2 > 0 \}$ = disque ouvert $B_0(1)$

$I_f = \ln\,]0,1] =]-\infty, 0] = \mathbb{R}_-$

Déf Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On appelle graphe de f ou surface représentative de f l'ensemble

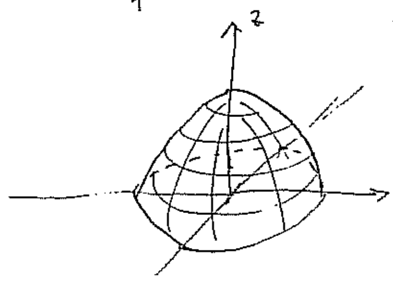
$$\Gamma_f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } (x,y) \in D_f \text{ et } z = f(x,y) \} \subseteq \mathbb{R}^3$$



Ex : $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = z \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = 1$ et $z \geq 0$ $\Leftrightarrow \Gamma_f$ = demi-sphère

$D_f = \overline{B_0}(1)$

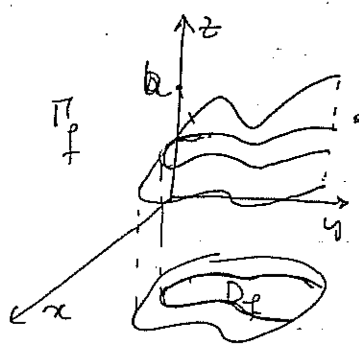
$I_f = [0,1]$

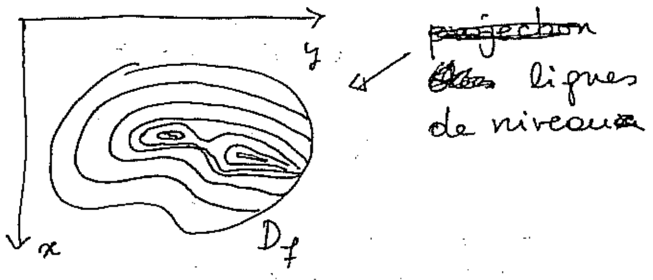


Rem : f connue $\Leftrightarrow$ Γ_f connu !

Déf : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, avec domaine D_f et image I_f.
Pour tout $a \in I_f$, la ligne de niveau a est la courbe du plan $\mathbb{R}^2$ qui se trouve à la hauteur a dans le graphe de f :

$$L_a(f) = \{(x,y) \in D_f \text{ t.q. } f(x,y) = a\} \subset D_f \subset \mathbb{R}^2 : \quad L_a(f) = \text{projection de } \{\Gamma_f \cap \{z=a\}\}$$



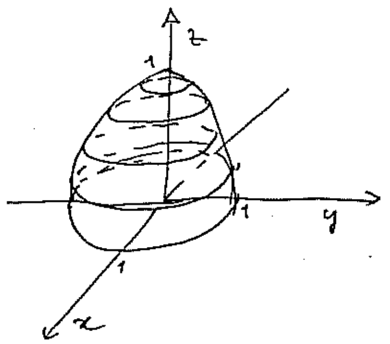


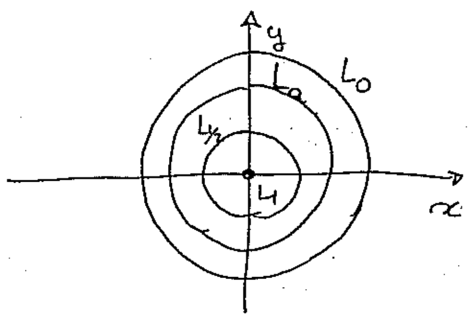
Ex : $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ $\quad D_f = \text{disque } \overline{B}_0(1)$

$I_f = [0,1]$ $\quad \forall a \in [0,1]$ $\quad L_a(f) = \{(x,y) \in \overline{B}_0(1) \text{ t.q. } \sqrt{1-x^2-y^2} = a\}$

$\Updownarrow$

$x^2+y^2 = 1-a^2$
cercle en O de rayon $\sqrt{1-a^2}$





Pour étudier f, et dessiner Γ_f, on peut aussi regarder l'intersection de Γ_f avec $\{x=a\}$ ou $\{y=a\}$ $\to$ fcts partielles !

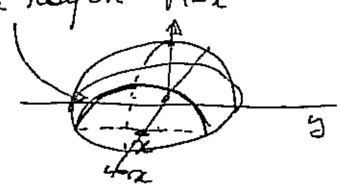
Déf : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle fonctions partielles les deux fonctions à une variable :

$$f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \longmapsto f_x(y) := f(x,y) \quad \text{pour tout } x \text{ fixé}$$

$$f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto f_y(x) := f(x,y) \quad \text{pour tout } y \text{ fixé.}$$

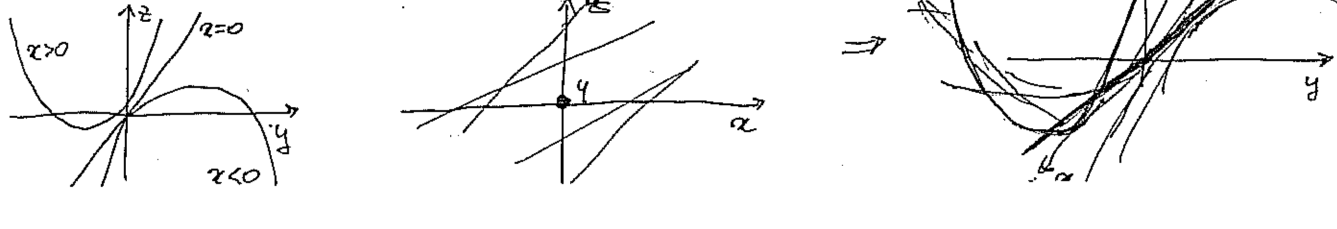
Ex : 1) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \implies f_x(y) = \sqrt{(1-x^2)-y^2}$ $\to$ demi-cercle de rayon $\sqrt{1-x^2}$

$f_y(x) = \sqrt{(1-y^2)-x^2}$ $\to$ demi-cercle de rayon $\sqrt{1-y^2}$



2) $f(x,y) = xy^2 + 2y$

$f_x(y) =$ parabole ou droite $\qquad f_y(x) =$ droite ou point



Les fonctions partielles décrivent l'intersection de Γ_f avec des plans $\{y=\text{const}\}$ ou $\{x=\text{const}\}$.

On peut aussi regarder l'intersection de Γ_f avec d'autres courbes. En particulier :

~~Ex~~ : f restreinte aux droites $\{y=kx\}$:

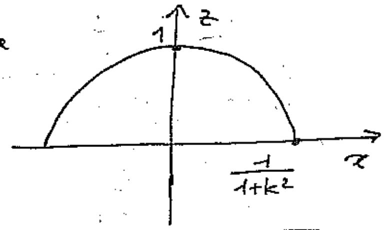
$z=f(x,y)=f(x,kx) \rightarrow$ devient fct d'une seule variable ~~g~~ x.

Ex : $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ restreinte aux droites $y=kx$, $k\in\mathbb{R}^*$:

$f(x,kx)=\sqrt{1-(1+k^2)x^2}=z$ ~~un demi-cercle~~

$\Updownarrow$

$\begin{cases}(1+k^2)x^2+z^2=1 \\ z\geq 0\end{cases} \longrightarrow$ demi-ellipse



3- Opérations et composition entre fonctions

Déf. Soient $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ deux fcts réelles de domaine D_f et D_g. On appelle :

- somme $f+g:(x,y)\longmapsto f(x,y)+g(x,y)$ déf sur $D_f\cap D_g$

  zéro : $0:(x,y)\longmapsto 0$ fct constante déf sur $\mathbb{R}^2$

  opposé de f : $-f:(x,y)\longmapsto -f(x,y)$ déf sur D_f
- produit $f\cdot g:(x,y)\longmapsto f(x,y)\cdot g(x,y)$ (produit dans $\mathbb{R}$!) déf sur $D_f\cap D_g$

  un : $1:(x,y)\longmapsto 1$ fct constante déf sur $\mathbb{R}^2$

  inverse de f : $f^{-1}:(x,y)\longmapsto \frac{1}{f(x,y)}$ déf sur $\{(x,y)\in D_f \text{ t.q. } f(x,y)\neq 0\}$

Ex : $f(x,y)=x^2-y^2$, $g(x,y)=x^2+y^2 \Rightarrow (f+g)(x,y)=2x^2$, $(f\cdot g)(x,y)=x^4-y^4$, $f^{-1}(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$ si $x^2\neq y^2$

Prop. Les opérations $+$ et $\cdot$ entre fonctions à plusieurs variables ont les mêmes propriétés que leurs analogues entre fcts à une variable et entre nombres réels.

Déf : On définit la composition de $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ avec :

(1) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \Rightarrow g\circ f\,(x,y)=g\big(f(x,y)\big)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(2) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \Rightarrow f\circ h\,(u,v)=f\big(h(u,v)\big)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "f\circ h"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Ex. $f(x,y)=x^2-y$, $g(t)=\ln(t) \Rightarrow (g\circ f)(x,y)=\ln(x^2-y)$

$h(u,v)=(2u,u+v) \Rightarrow (f\circ h)(u,v)=f(2u,u+v)=4u^2-(u+v)$.

En particulier, si $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est l'application qui décrit un changement de variable, la composée $\tilde{f}=f\circ h$ exprime f dans les nouvelles var

Par exemple : $h:[0,\infty[\times[0,2\pi[\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$(\rho,\varphi)\longmapsto(x,y)=h(\rho,\varphi)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$ i.e. $\begin{cases}x=\rho\cos\\ y=\rho\sin\end{cases}$

7 Alors une fct $f = f(x,y)$ s'exprime en coord. polaires comme $\tilde{f} = f \circ h$

i.e. $\tilde{f}(\rho,\varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

Ex: $f(x,y) = x^2+y^2+2x$, $h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

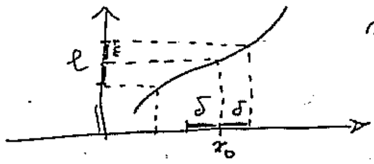
$\Rightarrow \tilde{f}(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 + 2(\rho\cos\varphi) = \rho^2 + 2\rho\cos\varphi$.

Attention: Le chm. de variables $h: (\rho,\varphi) \longmapsto (x,y)$ n'est pas une application linéaire!

4- Limites. Continuité

Rappel fcts à 1 variable : $f: D \longrightarrow I$, $x_0 \in D \cup \partial D$

- limite $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ t.q. $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$



$x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$. $f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$

boules ouvertes de $\mathbb{R}$!

- f continue en $x_0 \in D_f \iff$ ① $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ (nombre fini!)

② $\ell = f(x_0)$.

Déf: Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fct de domaine D_f n'ayant pas de points isolés,

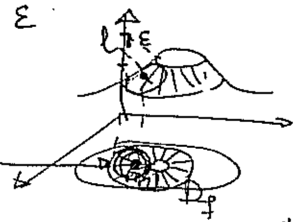
et soit (x_0,y_0) un point de $D_f \cup \partial D_f$.

On dit que f a limite $\ell \in \mathbb{R}$ ~~pour (x,y)~~ en (x_0,y_0) et on note $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) =$

ssi $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ t.q. $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-\ell|<\varepsilon$

$\|(x,y)-(x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$(x,y) \in$ boule ouverte $B_{(x_0,y_0)}(\delta)$



Si $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une fct vectorielle, on remplace par $\|f(x)-(\ell_1,\dots,\ell_n)\|<$

Attention: la limite peut ne pas exister!

Thm: $\boxed{\text{Si la limite existe, elle est unique.}}$

Ex: 1) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ déf. sur $(x,y)\neq(0,0)$. $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Raisonnement: $(x\pm y)^2 \geq 0 \Rightarrow |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow |f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

Donc $\forall\varepsilon>0$, $\delta(\varepsilon) = 2\varepsilon$: $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < 2\varepsilon \Rightarrow |f(x,y)| \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$!

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

2) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ déf. sur $(x,y)\neq(0,0)$. $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Le raisonnement précédent donne $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}$ ← Pb ne dépend pas de $(x,$ ... inutile!

Alors, essayons des limites le long des droites $y = kx$:

$f(x,kx) = \dfrac{kx^2}{(k^2+1)x^2} = \dfrac{k}{k^2+1}$: la fct est constante sur chaque droite, mais la constante varie de droite en droite ! $\Rightarrow$ limite n'existe pas !

Déf Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fct avec domaine D_f n'ayant pas de pts isolés, et soit $(x_0,y_0) \in D_f$. On dit que <u>f est continue en (x_0,y_0)</u> si

1. $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ (fini)
2. $\ell = f(x_0,y_0)$.

<u>Attention</u> : livre, p. 3, § continuité : la ~~seconde~~ 1ère remarque est fausse !!!

On dit que <u>f est continue</u> si elle est continue en chaque point de son domaine.

Thm (Opérations et continuité)

1. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fcts continues.
   Alors $f+g$, $-f$, et $f \cdot g$ sont continues.
   L'inverse $f^{-1} = \frac{1}{f}$ est continue en tout point où elle est déf (f ne s'annulle pas)
2. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ des fcts continues.
   Alors les composées $g\circ f$ et $f \circ h$ sont aussi continues.

<u>Corollaire</u> :
- Toutes les fcts polynomiales à 2 variables sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
- Toutes les fcts à 2 variables contenant des combinaisons de fcts en 1 var. qui sont continues ($\exp$, $\ln$, Γ, $\frac{1}{\text{poly.}}$, $\sin$, $\cos$ etc) sont cont

<u>Ex</u> : ① $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$: xy continue, x^2+y^2 cont $\}$ poly. $\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}$ cont. ; $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ cont. pour $(x,y) \neq (0,0)$. $\}$ cont. sur $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Puisque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, la fct $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est continue.

② $f(x,y) = \exp\left(\dfrac{xy + \cos(x+y)}{x^2+y^2+3}\right) - \dfrac{\ln(x^2+1)}{\sin^2(y)+1}$ est continue.

---

5 — <u>Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques</u>

cf page 26

Ch IV Calcul différentiel

1 - Dérivées directionnelles et partielles

Rappel à 1 variable : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fct, domaine D_f.

f est dérivable en $x_0 \in D_f$ s'il existe la dérivée de f en x_0 :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fct à 2 variables, avec domaine $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$.

Déf : Pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, on appelle dérivée directionnelle de f le long de $\vec{v}$ en $(x,y) \in D_f$ la limite

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x,y)+h\vec{v})-f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv_x, y+hv_y) - f(x,y)}{h}$$

si cette limite existe. Dans ce cas, f est différentiable en (x,y).

Ex: $f(x,y) = xy^2+3x$, $\vec{v} = (1,2)$

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y+2h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\overbrace{(y+2h)^2}^{y^2+4hy+4h^2} + 3(x+h) - xy^2 - 3x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{xy^2} + 4hxy + 4h^2x + hy^2 + 4h^2y + 4h^3 + \cancel{3x} + 3h - \cancel{xy^2} - \cancel{3x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(4xy + \underset{\downarrow 0}{4hx} + y^2 + \underset{\downarrow 0}{4hy} + \underset{\downarrow 0}{4h^2} + 3\right) = 4xy + y^2 + 3.$$

Déf : Les dérivées directionnelles le long des vecteurs $\vec{i} = (1,0)$ et $\vec{j} = (0,1)$ s'appellent dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}.$$

Rem : $\frac{\partial f}{\partial x}$ = dérivée de la fct partielle (à 1 var) $x \mapsto f(x,y)$ pour y fixé

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = dérivée de la fct partielle $y \mapsto f(x,y)$ pour x fixé.

Ex: 1) $f(x,y) = xy^2+3x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2+3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$

2) $f(x,y) = e^{3x+2y} \implies \frac{\partial f}{\partial x} = 3e^{3x+2y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2e^{3x+2y}$.

> Théorème : Si ~~toutes~~ les dérivées partielles de f existent et sont continues en (x,y), alors toutes les dérivées directionnelle de f existent en (x,y), et sont :
>
> $$\partial_v f(x,y) = v_x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + v_y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Vérifions sur l'ex. $f(x,y) = xy^2+3x$ avec $\vec{v} = (1,2) \implies \partial_{\vec{v}} f = 4xy+y^2+3$,

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2+3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \implies v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \cdot (y^2+3) + 2(2xy) = y^2+3+4xy$ ". ☒

Déf : Une fct de classe C^1 est une fct différentiable et avec dérivées partielles continues.

2- Gradient

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fct différentiable en $(x,y) \in D_f$.

Déf : Le gradient de f en (x,y) est le vecteur de $\mathbb{R}^2$

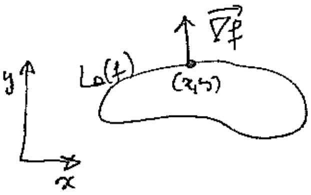
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) \equiv \overrightarrow{\nabla} f(x,y) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \,,\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\jmath}\,.$$

Ex : $f(x,y) = xy^2 + 3x \implies \overrightarrow{\nabla} f(0,0) = (3,0)$

$\overrightarrow{\nabla} f(3,2) = (7,12)$

Prop : si f est différentiable en (x,y), alors $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ on a $\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} f(x,y)$.

Théorème : Soit f diff. en (x,y) ; posons $a = f(x,y)$ et soit $L_a(f)$ la ligne de niveau a (donc $(x,y) \in L_a(f)$). Alors le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$ est un vecteur normal à la courbe $L_a(f)$ en (x,y).



Preuve : $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$ est $\perp$ à la courbe $L_a(f) \iff \overrightarrow{\nabla} f(x,y) \cdot (h,h') = 0$ où (h,h') est un vecteur tangent à la courbe $L_a(f)$.

On peut trouver un vect. tang. à $L_a(f)$ infinitésimal (h,h') en disant que $(h,h') \to (0,0)$ et $L_a(f) \ni (x+h, y+h') \xrightarrow[h' \to 0]{h \to 0} (x,y) \in L_a(f)$

Dans ce cas, on a donc : Rappel : $\underset{\to 0}{\varepsilon(h)} = \dfrac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} - g'(x_0) \implies g(x_0+h) - g(x_0) = h\, g'(x_0) + h$

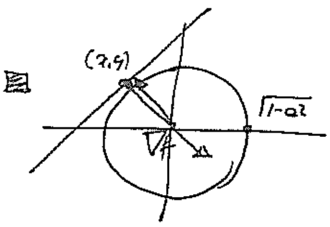
$$0 = f(x+h, y+h') - f(x,y) = \underbrace{f(x+h,y+h') - f(x,y+h')}_{h \frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h') + h\varepsilon(h)} + \underbrace{f(x,y+h') - f(x,y)}_{h' \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + h'\varepsilon'(h')}$$

(avec $f(x+h,y+h') = a$ et $f(x,y) = a$)

$$= \underbrace{h \frac{\partial f}{\partial x}(x, \underset{\downarrow 0}{y+h'}) + h' \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} + \underbrace{h\varepsilon(h) + h'\varepsilon'(h')}_{\to 0}$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{\nabla} f(x,y) \cdot (h,h')$$

Donc $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h' \to 0}} \overrightarrow{\nabla} f(x,y) \cdot (h,h') = 0$.



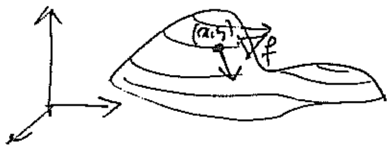
Ex : $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \implies \forall a \in [0,1]\ L_a(f) =$ cercle de rayon $\sqrt{1-a^2}$

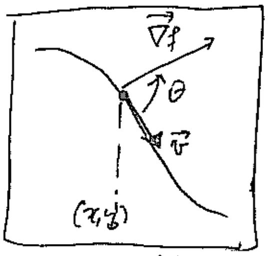
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2-y^2}}$ $\qquad (x,y) \in L_a(f) \implies \sqrt{1-x^2-y^2} = a \implies \overrightarrow{\nabla} f(x,y) = -\dfrac{1}{a}(x,y) \ /\!/ \ (x,y)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2-y^2}}$

Thm : Soit f diff. en (x,y). Le vecteur $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$ indique la direction ~~des~~ plus grande pente du graphe Γ_f en (x,y).

Preuve : Supposons que $\vec{v}$ soit un vecteur infinitésimal $(\to 0)$ dans la dir. de plus grande pente en (x,y).





Alors :

$$\underbrace{f((x,y)+\vec{v}) - f(x,y)}_{\text{doit être max.}} = \underbrace{\overrightarrow{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{v}}_{\| \overrightarrow{\nabla} f(x,y) \| \cdot \| \vec{v} \| \cdot \cos\theta} + \underset{\to 0}{\text{reste}}$$

$\cos\theta$ est max ($\geq 0 \Rightarrow = 1$) si $\theta = 0 \implies \overrightarrow{\nabla} f \ /\!/$

est min < 0 ($= -1$) si $\theta = \pi \implies -\overrightarrow{\nabla} f$.

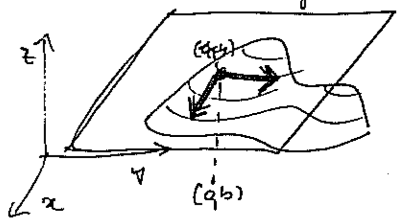
plan orthogonal à la tangente à $L_a(f)$, $a = f(x,y)$

6)

3 - Plan tangent au graphe

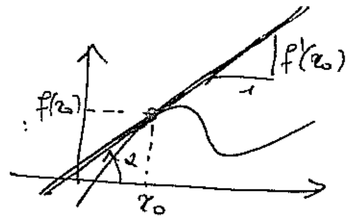
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fct diff. en (a,b).

Déf : Le plan tangent à Γ_f en (a,b) est le plan $T_{(a,b)}(\Gamma_f)$ de $\mathbb{R}^3$ contenant toutes les droites tangentes à Γ_f en (a,b). Il est engendré par les deux ~~deux~~ vecteurs tangents à Γ_f dans les directions $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



Rappel : plan "engendré" par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ =
$= \{$ combinaisons linéaires $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$.

Equation paramétrique du plan tangent à Γ_f en (a,b)



Rappel : f 1 variable $\Rightarrow$ $f'(x_0)$ = pente de la tg à Γ en $(x_0, f(x_0))$:
$= \operatorname{tg} \alpha$.
$\Longrightarrow$ vecteur tangent $= (1, f'(x_0))$.

$\Rightarrow$ droite tangente à Γ en $(x_0, f(x_0)) = \{(x_0, f(x_0)) + \lambda\,(1, f'(x_0)),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

De même : $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ = pente de la tg en dir $\vec{i}$ $\Longrightarrow$ vecteur tg $= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ = pente de la tg en dir $\vec{j}$ $\Longrightarrow$ vecteur tg $= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$.

$$\Longrightarrow T_{(a,b)}(\Gamma_f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \begin{cases} x = a + \lambda \\ y = b + \mu \\ z = f(a,b) + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \mu \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{cases},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

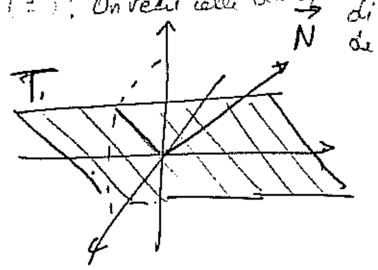
Eq. cartésienne du plan tg

$$T_{(a,b)}(\Gamma_f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, y - z + f(a,b) - a\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - b\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \right\}$$

Déf : Un vecteur normal à Γ_f en (a,b) est un vecteur normal au plan tg de Γ_f.

Evidemment, le vecteur $\pm\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$,

Déf $\boxed{\vec{N}_f(a,b) :=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$ est un vecteur normal (non unitaire en général).
Quelle orientation doit-on choisir ($\pm$) ? On veut celle du système direct de $\mathbb{R}^3$
(Preuve que $\vec{N}_f(a,b) = \pm\ \textcircled{}$.



Ex : 1) Plan tg à Γ_f en $(a,0)$ pour $f(x,y) = xy^2 + 3x$:

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + 3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$ $\Longrightarrow$ $T_{(a,0)}(\Gamma_f) = \{3x - z = 0\}$

$\vec{N}_f(a,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) même fct au pt $(1,1)$: $T_{(1,1)}(\Gamma_f) \Leftrightarrow (1+3)x + (2\cdot1\cdot1)y - z + (1+3) - 1\cdot(1+3) - 1\cdot(2\cdot1\cdot1) = 0$

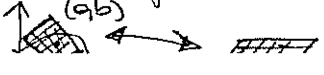
i.e. $4x + 2y - z - 2 = 0 \leadsto \pm(4, 2, -1)$

$$\vec{N}_{f}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rem : Repère intrinsèque du plan tangent : f diff en $(a,b) \Longrightarrow T_{(a,b)}(\Gamma_f)$ existe !!

$T_{(a,b)}(\Gamma)$ est plan engendré par 2 vecteurs (cf. eq. param.), mais ce n'est pas un esp. vectoriel car passe par $(a, b, f(a,b))$! ($\Leftarrow$ affine).

$\Longrightarrow$ Identification $T_{(a,b)}(\Gamma_f) \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \mathbb{R}^2$: repère o.n. $\begin{cases} (a, b, f(a,b)) \longleftrightarrow O = (0,0) \\ \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) \longleftrightarrow \vec{i} \\ \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \longleftrightarrow \vec{j} \end{cases}$

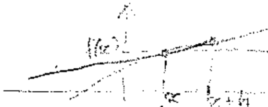


Cor : $\nabla f(a,b) \in \mathbb{R}^2$
$\cong$
$T_{(a,b)}$

4 - Différentielle d'une fonction

Rappel à 1 var. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en x $\Rightarrow$ $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Alors pour $h \to 0$, ~~si~~ on pose $\varepsilon(h) := \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$ on a $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$ et



$$f(x+h) = \underbrace{f(x) + \boxed{h\, f'(x)}} + \underbrace{h\,\varepsilon(h)} \quad \text{pour } x \text{ fixé}$$

erreur : $h\,\varepsilon(h)$ tend à 0 plus vite que $h\, f'(x)$ ($\varepsilon(h) \to 0$, $h \to 0$, $f'(x)$ = nombre)

fct de ~~h~~ ~~droite tg à Γ_f en x~~

h = infinitésimal en x $= dx$ $\Rightarrow$ fct linéaire de h $\Rightarrow$ le graphe de cette fct est la droite tg à Γ_f en x

Soit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en (x, y). Alors :

- quantité infinitésimal = couple $(h_x, h_y) \in$ espace tangent $T_{(x,y)}(\Gamma_f)$
- qu'est-ce que remplace $f'(x)$?

Déf : La différentielle de f en (x,y) est l'application $d_{(x,y)} f : \underset{T_{(x,y)}(\Gamma_f)}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ déf par

$$d_{(x,y)} f\,(\vec{h}) := \vec{\nabla} f(x,y) \cdot \vec{h} = \partial_{\vec{h}} f(x,y) = h_x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + h_y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Ex ① $f(x,y) = xy^2 + 3x \Rightarrow df_{(x,y)}\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = (y^2+3) h_x + \ldots$

où $d_{(x,y)} f$: appl. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\vec{\nabla} f(x,y)$: vecteur $\in \mathbb{R}^2$; $\partial_{\vec{h}} f$: fct : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

~~En particulier on denote $\vec{h} = (dx, dy)$ un vecteur infinitésimal de $\mathbb{R}^2$~~ $\left(\begin{matrix} dx \to 0 \\ dy \to 0 \end{matrix}\right)$ $\cong T_{(x,y)}(\Gamma_f)$

Déf : $dx, dy : T_{(x,y)}\Gamma_f \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ déf par $dx\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = h_x$, $dy\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = h_y$

Prop $\Rightarrow$ $\{dx, dy\}$ est base de $\{$appl. lin. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\}$

et ~~alors~~ on a

$$\boxed{d_{(x,y)} f \cancel{\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dy}$$

Peut-on écrire $df_{(x,y)}$ sans indiquer $\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$?

Rem : cas à 1 var : $d_x f\,\cancel{(dx)} = f'(x)\, dx$

Ex ① $f(x) = xy^2 + 3x \Rightarrow d_{(x,y)} f\,(\vec{v}) = (y^2+3)\, v_x + 2xy\, v_y$

si $(x,y) = (1,2)$ ~~et $\vec{v} = (dx, dy)$~~ alors $d_{(1,2)} f \cancel{\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}} = 7\, dx + 4\, dy$

Thm

1) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ~~alors~~ puisque $d_{(x,y)} f$ est une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a que

~~En effet~~, $d_{(x,y)} f$ se représente par la matrice $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ à 1 ligne et 2 colonnes

2) Si $f : \underset{\vec{p}}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^m$, ~~alors~~ puisque $d_{(x,y)} f$ est une appl. linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on a que

si $f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots x_n) \end{pmatrix}$ alors $d_{\vec{p}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{p}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{p}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$

Déf : $d_p f$ vu comme matrice s'appelle matrice Jacobienne.

Jacobien ou déterminant Jacobien = det de la matrice Jacobienne

3) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t)) = f(t)$, alors $d_t f : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}^2$ et $d_t f = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$

Ex ① $f(x,y) = x^2 y \Rightarrow df_{(x,y)} = (2xy \quad x^2) \in \mathcal{M}_{12}$

Ex : ② $f(x,y) = (3x, xy^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow d_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}$

③ $f(t) = (2t, t^3+1)$ $\Rightarrow d_t f = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}$.

5/ Analogue de $f(x+h) = f(x) + h f'(x) + h\,\varepsilon(h)$:

Thm : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diff. en $\vec{p} = (x,y)$ et soit $d\vec{p} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ un vecteur infinitésimal (i.e. $d\vec{p} \in \mathbb{R}^2 \cong T_{(x,y)}(\Gamma_f)$). Alors :

$$f(\vec{p} + d\vec{p}) = f(\vec{p}) + d_{\vec{p}} f\,(d\vec{p}) + \|d\vec{p}\|\,\varepsilon(d\vec{p})$$

avec $\varepsilon(d\vec{p}) \longrightarrow 0$ pour $d\vec{p} \longrightarrow \vec{0}$.

Preuve : Si $d\vec{p} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ avec $dx = h_x \to 0$ et $dy = h_y \to 0$, alors

$$f(\vec{p}+d\vec{p}) - f(\vec{p}) = \underbrace{f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy)} + \underbrace{f(x, y+dy) - f(x,y)}$$

$$= dx\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, \underset{\substack{\downarrow \\ y}}{y+dy}) + dx\,\varepsilon'(dx) \quad + \quad dy\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + dy\,\varepsilon''(dy)$$

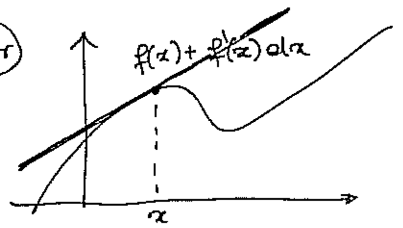
$$\underset{dy \to 0}{\sim} d_{(x,y)} f \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + dx\,\varepsilon'(dx) + dy\,\varepsilon''(dy)$$

$$= d_{\vec{p}} f\,(d\vec{p}) + \|d\vec{p}\|\,\varepsilon(d\vec{p}) \quad \text{où} \quad \varepsilon(d\vec{p}) = \frac{dx\,\varepsilon'(dx) + dy\,\varepsilon''(dy)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \longrightarrow 0$$

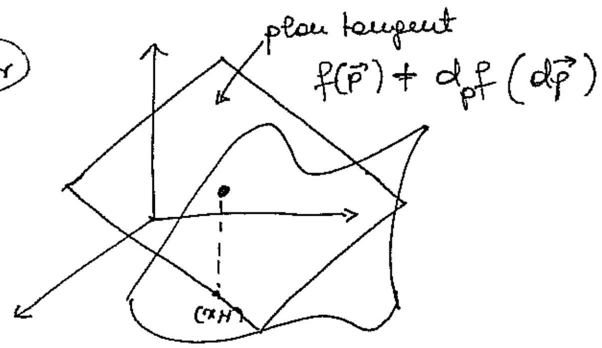
$\boxtimes$

Rem : L'expression $f(\vec{p} + d\vec{p}) \sim f(\vec{p}) + d_{\vec{p}} f\,(d\vec{p})$ est l'approximation affine de f autour de $\vec{p}$ analogue à $f(x+dx) \sim f(x) + f'(x)\,dx$ qui donne la tangente à f en x :

1 var



2 var



Donc dans l'expression $f(p) + d_p f\,(d\vec{p})$ on a :

- $d\vec{p}$ = vecteur infinitésimal de $T_p(\Gamma_f) \cong \mathbb{R}^2$
- $d_{\vec{p}} f$ agit comme application linéaire sur $\mathbb{R}^2$ vu comme $T_p(\Gamma_f)$.

Cor : $$\boxed{T_{\vec{p}}(\Gamma_f) = \left\{ f(\vec{p}) + d_{\vec{p}} f\,(\vec{v})\ ;\ \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Application : calcul d'erreurs

1 var erreur $= h\,\varepsilon(h) \to 0$ vite   ex : $f(x) = x^3 \Rightarrow (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + o(h^2)$,

$h = 0{,}02 \Rightarrow (1{,}02)^3 \sim 1$ avec erreur $0{,}06$

$\sim 1{,}06$ avec erreur $< 0{,}0004$!

2 var Veut connaître $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ mais connaît $f(x,y)$, quelle erreur ?

$$\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}_{\Delta f(x,y)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\Delta y + o(\Delta x, \Delta y)$$

↳ tend à 0 plus vite que Δx.

$$\Longrightarrow \boxed{|\Delta f| \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\sim} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot |\Delta y|}.$$

ex : $f(x,y) = x^3 + y^3$, $\partial_x f = 3x^2$, $\partial_y f = 3y$

$f(1,1) = 1 + 1 = 2$

$f(1.02, 1.02) \sim 2$ avec erreur $\sim 0{,}12$

$\sim 2{,}12$ avec erreur $< \left\| \begin{matrix} 0.02 \\ 0.02 \end{matrix} \right\| = 0{,}0$

$= 0{,}$

5. Dérivées des fonctions composées et des opérations

Prop

Soient $f,g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fcts diff. en $(x,y)=\vec{p}$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

- somme : $f+g$ est diff. en (x,y) et $\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(\vec p)=\frac{\partial f}{\partial x}(\vec p)+\frac{\partial f}{\partial y}(\vec p)$ (idem pour $\frac{\partial(f+g)}{\partial y}$)

  donc $\vec\nabla(f+g)(p)=\vec\nabla f(p)+\vec\nabla g(p)$ et $d_p(f+g)=d_pf+d_pg$.

- produit par scalaire : λf est diff en (x,y) et $\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}$ (idem pr $\frac{\partial}{\partial y}$)

  donc $\vec\nabla(\lambda f)(p)=\lambda\vec\nabla f(p)$ et $d_p(\lambda f)=\lambda\, d_pf$.

- produit (seulement pour fct réelles) : $f\cdot g$ est diff en (x,y) et

  $$\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial x}(p)=\frac{\partial f}{\partial x}(p)\cdot g(p)+f(p)\cdot\frac{\partial g(p)}{\partial x}\qquad(\text{idem pour }\tfrac{\partial}{\partial y})$$

  donc $\vec\nabla(f\cdot g)(p)=\vec\nabla f(p)\cdot g(p)+f(p)\,\vec\nabla g(p)$

  et $d_p(f\cdot g)=d_pf\cdot g(p)+f(p)\cdot d_pg$.

Ex :

$$d_{(x,y)}\left(xy^2e^{2x+3y}\right)=(y^2+2xy^2)e^{2x+3y}dx+(2xy+3xy^2)e^{2x+3y}dy$$
$$=e^{2x+3y}\left[(1+2x)y^2dx+xy(2+3y)dy\right]$$

i.e. $d_{(x,y)}\left(xy^2e^{2x+3y}\right)=e^{2x+3y}\begin{pmatrix}(1+2x)y^2 & xy(2+3y)\end{pmatrix}$. ← ok.

$d_{(x,y)}(xy^2)=\begin{pmatrix}y^2 & 2xy\end{pmatrix}$, $d_{(x,y)}\left(e^{2x+3y}\right)=\begin{pmatrix}2e^{2x+3y} & 3e^{2x+3y}\end{pmatrix}=e^{2x+3y}(2$

$d(xy^2)e^{2x+3y}+xy^2d\left(e^{2x+3y}\right)=e^{2x+3y}\begin{pmatrix}y^2+2xy^2 & 2xy+3xy^2\end{pmatrix}$

Prop

1) Soient $\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m$ diff en $\vec p\in\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m\xrightarrow{g}\mathbb{R}^p$ diff en $f(\vec p)$.

Alors $g\circ f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^p$ est diff en $\vec p$ et

$$\boxed{d_{\vec p}(g\circ f)=d_{f(\vec p)}g\circ d_{\vec p}f}$$

← composition d'appl. linéaires = produit de matrices !

En particulier :

2)
$$\begin{tikzcd}\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"', "\text{diff}"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g", "\text{diff}"'] & \mathbb{R}\end{tikzcd}\Longrightarrow\ d_{(x,y)}(g\circ f)=g'(z)\Big|_{z=f(x,y)}\cdot d_{(x,y)}f$$

3)
$$\begin{tikzcd}\underset{t}{\mathbb{R}} \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "f\circ h"'] & \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}\end{tikzcd}\Longrightarrow\ d_t(f\circ h)=d_{(x,y)}f\Big|_{(x,y)=h(t)}\cdot d_th=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$$

$h(t)=(x(t),y(t))$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\cdot y'(t)$$

4)
$$\begin{tikzcd}\underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "f\circ h"'] & \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}\end{tikzcd}\Longrightarrow\ d_{(u,v)}(f\circ h)=d_{(x,y)}f\Big|_{(x,y)=h(u,v)}\circ d_{(u,v)}h\ ,\text{ i.e.}$$

$h(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$

règle de la chaîne →
$$\begin{cases}\dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}\end{cases}$$

Ex: 1) ~~f(x,y)~~ = $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y - y^2 = z$, $g(z) = \ln z$, $z>0$

soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ t.q. $x^2y-y^2>0$, alors $(g\circ f)(x,y) = \ln(x^2y-y^2)$ et $d_{(x,y)}(g\circ f) = \dfrac{1}{x^2y-y^2} \times$

$\times \begin{pmatrix} 2xy & x^2-2y \end{pmatrix}$

2) $\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $h(t) = (t^2, 3t) = (x,y)$, $f(x,y) = x - y^2$, alors

$(f\circ h)(t) = t^2 - (3t)^2 = -8t^2$ et $(f\circ h)'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \end{pmatrix}\Big|_{y=3t} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix} = 2t - 18t = -16t$

autre écriture: $(f\circ h)'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=t^2} \cdot x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=3t} \cdot y'(t) = 1\cdot 2t - 2y\Big|_{y=3t} \cdot 3 = 2t - 18t = -16t$

3) $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $h(u,v) = (v, uv^2) = (x,y)$, $f(x,y) = x^2 - y$, alors

$(f\circ h)(u,v) = f(v, uv^2) = v^2 - uv^2 \Rightarrow d_{(u,v)}(f\circ h) = \begin{pmatrix} -v^2 & 2v(1-u) \end{pmatrix}$ // ok.

et par ailleurs:

$d_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x & -1 \end{pmatrix}$, $d_{(u,v)} h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix} \Rightarrow d_{h(u,v)} f \cdot d_{(u,v)} f = \begin{pmatrix} 2v & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix}$

autre écriture:

$$d_{(u,v)}(f\circ h)\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=uv^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) du$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=v} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=uv^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv$$
$$= \Big(\underbrace{2x\big|_{x=v} \cdot 0 + (-1)\cdot v^2}_{-v^2} \Big) du + \Big(\underbrace{2x\big|_{x=v} \cdot 1 + (-1)\cdot 2uv}_{2v-2uv} \Big) dv = -v^2 du + 2v(1-u)\,dv$$

4) <u>Différentielle du changement de coordonnées polaires</u>:

$h : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $h(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))$

$$\Rightarrow d_{(\rho,\theta)} h = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

ex: $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$ exprimée en coordonnées polaires:

$(f\circ h)(\rho,\theta) = \rho^2 + 2\rho\cos\theta \Rightarrow d_{(\rho,\theta)}(f\circ h)\begin{pmatrix} d\rho \\ d\theta \end{pmatrix} = (2\rho + 2\cos\theta)\,d\rho - 2\rho\sin\theta\, d\theta$

et en effet

$$\underset{\substack{h(\rho,\theta) \\ (x,y)}}{d} f \cdot d_{(\rho,\theta)} h = \begin{pmatrix} \underset{\rho\cos\theta}{2x+2} & \underset{\rho\sin\theta}{2y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{2\rho\cos^2\theta + 2\rho\sin^2\theta}_{2\rho} + 2\cos\theta & \cancel{-2\rho^2\cos\theta\sin\theta} - 2\rho\sin\theta + \cancel{2\rho^2\cos\theta\sin\theta} \end{pmatrix}$$

i.e. $x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\sin\theta$

$$= \begin{pmatrix} 2\rho + 2\cos\theta & -2\rho\sin\theta \end{pmatrix}$$

ok

6- Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Taylor

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fct déf sur D_f et différentiable sur $D \subset D_f$.
Alors les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions déf. sur D.
Si elles sont différentiables, on peut les dériver à nouveau.

Déf: Dérivées partielles d'ordre n de f sont les fcts qu'on obtient dérivant f successivement n fois.
En particulier, les fcts $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$
sont les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Théorème de Schwarz

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont différentiables autour d'un point $\vec{p}$ (i.e. dans un ouvert contenant $\vec{p}$), alors $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$ au voisinage de $\vec{p}$.

Enoncé alternatif

Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont diff. en $\vec{p}$ et les dérivées seconde de f sont continues en $\vec{p}$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $\vec{p}$.

Ex 1) $f(x,y) = x^3 \mathrm{ch}(y^2)$
$\partial_x f = 3x^2 \mathrm{ch}(y^2)$
$\partial_y f = 2x^3 y\, \mathrm{sh}(y^2)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 6x\, \mathrm{ch}(y^2) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 2x^3\left(\mathrm{sh}(y^2) + 2y^2 \mathrm{ch}(y^2)\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = 6x^2 y\, \mathrm{sh}(y^2) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f = 6x^2 y\, \mathrm{sh}(y^2) \end{cases}$$

2) contrexemple : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \xRightarrow{\text{calculs}} \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ et $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$.

Déf : Une fct est de classe C^k si elle est diff. jusqu'à l'ordre k et si les dérivées partielles d'ordre k sont continues. Même chose pour $k = +\infty$

Déf : Matrice Hessienne de f :

$$\mathrm{Hess}_{(x,y)}(f) \equiv H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

Hessien = det Hess(f).

Déf : Laplacien de f en (x,y) : $\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ = Trace de Hess(f)
Une fct f est harmonique si $\Delta f = 0$ (éq. diff. aux dér. partielles du 2nd ordre)

Prop (Interprétation géométrique du Laplacien)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 en $\vec{p}$, et soit $\overline{f} \in \mathbb{R}$ la moyenne de f sur un carré de taille $h \times h$ dans $\mathbb{R}^2$ autour de $\vec{p}$.
Alors $\boxed{\overline{f} = f(\vec{p}) + \frac{h^2}{24} \Delta f(\vec{p}) + O(h^4)}$.
Veut dire que $\Delta f(p)$ est proportionnel à $f(p) - \overline{f}$, où $\overline{f}$ est la moyenne de f dans un petit entourage de $\vec{p}$.

Preuve : Taylor + intégration, car $\overline{f} = \frac{1}{h^2} \int_{\dots}^{h/2} \int_{\dots}^{h/2} f(x,y)\, dx\, dy$.

2/ Théorème de Taylor : $(d_p f)(h)$ $\quad h \in \mathbb{R}^2$

1) à l'ordre 1 : f de classe $C^1 \Rightarrow$

$$f(\vec{p} + h) = f(p) + (d_p f)(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)$$

déjà vu ! i.e.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \left\|\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\right\| \varepsilon(x-x_0, y-y_0).$$

2) à l'ordre 2 : f de classe $C^2 \Rightarrow$

$$f(\vec{p}+h) = f(\vec{p}) + \overbrace{d_p f}^{\text{matrice Jacobienne}}(h) + \frac{1}{2}(h)^t \, \mathrm{Hess}_p(f)\cdot(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

i.e.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \left\|\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\right\|^2 \varepsilon(x-x_0, y-y_0)$$

Ex : $f(x,y) = x^3 \,\mathrm{ch}(y^2)$ $\quad (x_0,y_0) = (1,0) \Rightarrow f(1,0) = 1\cdot \underbrace{\mathrm{ch}\, 0}_{=1} = 1.$

$$\Rightarrow f(x,y) = 1 + \left(3x^2 \mathrm{ch}(y^2)\right)\Big|_{(1,0)}\cdot(x-1) + \left(2x^3 \underbrace{y\,\mathrm{sh}(y^2)}_{=0}\right)\Big|_{(1,0)}\cdot y$$

$$+\frac{1}{2}\left(6x\,\mathrm{ch}(y^2)\right)\Big|_{(1,0)}(x-1)^2 + \left(6x^2 \underbrace{y\,\mathrm{sh}(y^2)}_{=0}\right)\Big|_{(1,0)} xy + \left(2x^3\big(\underbrace{\mathrm{sh}(y^2)}_{=0} + \underbrace{2y^2}_{=0}\mathrm{ch}(y^2)\big)\right)\Big|_{(1,0)} y^2 + \text{reste}(\ldots)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 1 + 3\cdot(x-1) + 0\cdot y + \frac{6}{2}\cdot(x-1)^2 + 0\cdot xy + 0\, y^2 + \text{reste}$$

$$\Rightarrow x^3 \mathrm{ch}(y^2) \underset{(x\to 1,\, y)}{\sim} 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + O(x^3, y^3)$$

ex $f(x,y) = \mathrm{ch}(x^2 y)$, en $(1,0)$ $\Rightarrow f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}y^2 + $ reste à l'ordre ≥ 3.

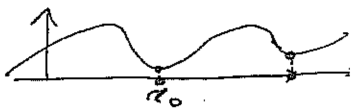
Ch V Points critiques, extrema locaux et globaux

1. Extrema locaux et points critiques

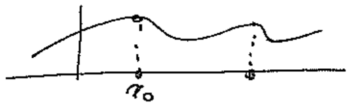
Rappel fcts à 1 var. : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fct.

Un point $x_0\in D_f$ est un extremum local pour f s'il est :

- soit un minimum local, t.q. $f(x)\geq f(x_0)$ $\forall x$ dans un voisinage de x_0



- soit un maximum local, i.e. $f(x)\leq f(x_0)$ $\forall x\in \mathrm{Vois}(x_0)$



Thm : Si f est dérivable 2 fois en x_0, alors :

x_0 est un extremum local $\Leftrightarrow$ x_0 est un point critique i.e. $f'(x_0)=0$ et en plus : $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ m

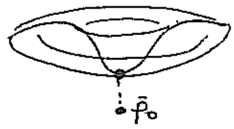
$f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ m

Rem : $f''(x_0)=0$ on ne peut pas conclure

Soit maintenant $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ une fct.

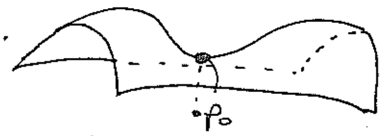
Déf : Un point $(x_0,y_0)=\vec{p}_0\in D_f$ est un extremum local pour f s'il est :

- soit un minimum local, i.e. $f(\vec{p})\geq f(\vec{p}_0)$ $\forall p\in \mathrm{Vois}(p_0)$



- soit un maximum local, i.e. $f(p)\leq f(p_0)$ $\forall p\in \mathrm{Vois}(p_0)$

Déf : Un point col ou point selle t.q.



Déf : Si f est différentiable en p_0, alors p_0 est un point critique de f si $\vec{\nabla} f(p_0)=$

Thm : Si f est différentiable 2 fois en $\vec{p}_0$, alors :

$\vec{p}_0$ est un extremum local ou un point col $\Leftrightarrow$ $\vec{p}_0$ est un point critique i.e. $\overrightarrow{\nabla f}(p_0)=\vec{0}$ et :

$\det \mathrm{Hess}_{p_0}(f)<0 \Rightarrow p_0=$ pt col

$\det \mathrm{Hess}_{p_0}(f)>0$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{p}_0)>0 \Rightarrow p_0=$ min. loc.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)<0 \Rightarrow p_0=$ max. lo

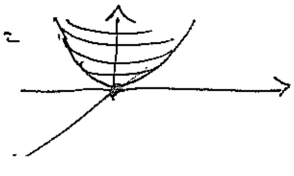
Rem : si $\det \mathrm{Hess}_{p_0}(f)=0$, on ne peut rien dire sur la nature du pt critique, il faut regarder les dérivées d'ordre supérieur.

Ex 1) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\overrightarrow{\nabla f}(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ $\mathrm{Hess} f(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

pt critiques : $\overrightarrow{\nabla f}(x,y)=\vec{0}\Leftrightarrow (x,y)=(0,0)\rightsquigarrow$ 1! pt critique.

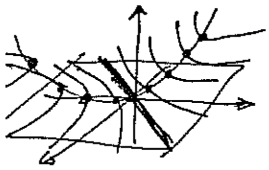
$\det \mathrm{Hess} f(0,0)=4>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2>0 \Rightarrow (0,0)=$ min. loc.

En effet : $\Gamma_f=$



4/

Ex 2) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ ⇝ 1! pt critique



$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \text{Hess} f(0,0) = -4 < 0 \Rightarrow$ pt col.

Ex. 3) $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$,

$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4x(x^2+y^2) \\ 8y - 4y(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x^2-y^2) = 0 \\ y(2-x^2-y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ soit $(x,y) = 0$, soit $x^2+y^2 = 2$ (cercle) [en part. $(0, \pm\sqrt{2})$ et $(\pm\sqrt{2}, 0)$]

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 - 12x^2 - 4y^2 & -8xy \\ -8xy & 8 - 12y^2 - 4x^2 \end{pmatrix}$$

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \det \text{Hess} f(0,0) > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) = $ min. loc.

$$\text{Hess} f(x,y)\Big|_{\substack{x^2+y^2=2 \\ y^2 = 2-x^2}} = \begin{pmatrix} 8-12x^2-8+8x^2 & -8xy \\ -8xy & 8-12y^2-8+8y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix}$$

$\det \text{Hess} f(x,y)\Big|_{x^2+y^2=2} = 64x^2y^2 - 64x^2y^2 = 0$ ⇝ pas de conclusion sur le cercle

Rem Alors on regarde $f(x,y)$ sur $x^2+y^2 = 2$:

$f(x,y)\Big|_{x^2+y^2=2} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4$ ⇝ f est constante $= 4$ sur le cercle.

Peut-on avoir $f(x,y) > 4$? Pour $r^2 = x^2+y^2$ on a :

$f(r) = 4r^2 - r^4 > 4 \Leftrightarrow \underbrace{r^4 - 4r^2 + 4}_{= (r^2-2)^2} < 0$ impossible.

Donc le cercle de rayon $\sqrt{2}$ est un ensemble de max. globaux !

2) Extrema globaux et multiplicateurs de Lagrange

Rappel à 1 var : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un point $x_0 \in D_f$ est un extremum global s'il est

- min global, i.e. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x$
- max global, i.e. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x$.

Thm : $\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur } D \subset D_f \text{ et } D \text{ est compact (fermé + borné = union intervalles) alors } f \text{ a un max et un min. globaux sur } D.}$

Pour les trouver, on compare les max/min entre eux et avec la valeur de f dans tous les pts de bord de D (qui sont des pts isolés pour $D \subset \mathbb{R}$).

Déf. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $D \subseteq D_f$. Un point $p_0 \in D$ est un extremum global sur D s'il est
- min global, i.e. $f(\vec{p}) \geq f(p_0)$ $\forall p \in D$
- max global, i.e. $f(\vec{p}) \leq f(p_0)$ $\forall p \in D$.

[Pour trouver les min/max globaux, on compare les min/max locaux avec la valeur de f sur le bord de D. Supposons que $\partial D =$ graphe d'une courbe γ d'eq. $g(x,y) =$

Thm : $\boxed{\text{Si } f \text{ est continue et } D \text{ est compact alors } f \text{ a max et min. sur } D.}$

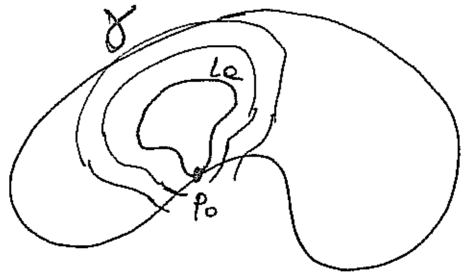
Déf : Extréma liés ou extréma sous contrainte sont les extrema d'une fct f sur une courbe $\gamma \subset D_f$.

Comment trouver les extrema de f contraints sur γ d'éq. $g(x,y)=0$?

Réflechissons :

Si $\vec{p}_0 =$ pt max/min $\in$ courbe γ, alors les niveaux de f autour de $\vec{p}_0$ sur γ sont tous plus petits / grands.

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{la courbe } \gamma \text{ est tangente à la ligne de niveau contenant } \vec{p}_0.}$



Ceci implique que $\vec{\nabla} f(\vec{p}_0)$ est // au $\vec{\nabla} g(p_0)$, donc on a :

Thm : $p_0 =$ extrema de f contraint sur la courbe d'éq. $g(x,y)=0$

$\Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(\vec{p}_0) = \lambda \vec{\nabla} g(p_0)$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le "λ" s'appelle <u>multiplicateur de Lagrange</u>.

Ex : On veut trouver le point de la courbe d'eq. $y = x^2$ qui est le plus près de $(0,5)$.

Courbe γ d'eq. $g(x,y)=0$ avec $g(x,y) = y - x^2$.

Fonction à minimiser $=$ distance du point $(0,5)$: $f(x,y) = x^2 + (y-5)^2$ (dist. car le point (x,y) sur γ qui minimise la distance est un extremum de f contraint sur $g(x,y)=0$. Donc :

$(x,y) =$ pt min $\Longrightarrow$ $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$: tel λ existe-t-il ?

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y-10 \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y-10 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2\lambda x \\ 2y-10 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+\lambda)x = 0 \\ y = 5 + \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$+ \quad y = x^2$

$x = 0 \Rightarrow y = x^2 = 0$

$\lambda = -1 \Rightarrow$

$\Downarrow$

$y = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

$\Downarrow$

$x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$

Entre $(0,0)$ et $\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right)$, quel point est plus proche à $(0,5)$?

$f(0,0) = 5^2 = 25$, $\quad f\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4} < 25 \Longrightarrow$ <u>sol</u> : $\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{2}\right)$

<u>Conclusion</u> : Si f est cont. et D est compact, alors f a max et min :

- soit dans D^{int} (si f est C^1 ce sont les pts critiques)
- soit sur ∂D (si f est C^1 on les trouve par la méthode de Lagrange).

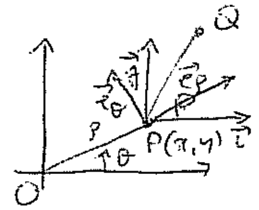
Ch VI - Champs de vecteurs et formes différentielles

1. Repères mobiles de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Déf Un repère mobile de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ en un point P est un repère centré en P.

Repères mobiles on dans $\mathbb{R}^2$

- coordonnées cartésiennes : si $P=(x,y)$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le repère ~~mobile~~ cartésien en P est $(P;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Un point Q se représente par $\vec{PQ}=(x_Q,y_Q)=x_Q\vec{\imath}+y_Q\vec{\jmath}$ et non par $\vec{OQ}=(x_Q-x,\ y_Q-y)$.



- coordonnées polaires : si $P=(\rho,\theta)$ t.q. $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$,

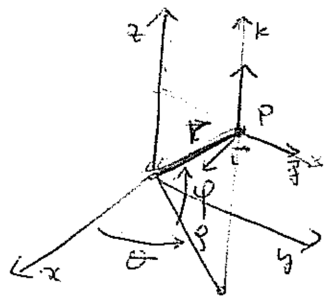
le repère en P est $(P;\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta)$ avec

$$\begin{cases}\vec{e}_\rho=\cos\theta\,\vec{\imath}+\sin\theta\,\vec{\jmath}\\ \vec{e}_\theta=-\sin\theta\,\vec{\imath}+\cos\theta\,\vec{\jmath}\end{cases}\iff\begin{cases}\vec{\imath}=\cos\theta\,\vec{e}_\rho-\sin\theta\,\vec{e}_\theta\\ \vec{\jmath}=\sin\theta\,\vec{e}_\rho+\cos\theta\,\vec{e}_\theta\end{cases}$$

Un pt Q se rep. par (ρ_Q,θ_Q) t.q. $\vec{PQ}=\rho_Q\vec{e}_\rho+\theta_Q\vec{e}_\theta$.

Repères mobiles on dans $\mathbb{R}^3$

- cartésien : si $P=(x,y,z)$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le repère ~~du~~ P est $(P;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.



- cylindrique : si $P=(\rho,\theta,z)$ t.q. $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$,

le repère en P est $(P;\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{k})$ avec $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\theta$ comme avant.

- sphérique si $P=(r,\theta,\varphi)$ t.q. $\begin{cases}x=r\cos\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\cos\varphi\\ z=r\sin\varphi\end{cases}$;

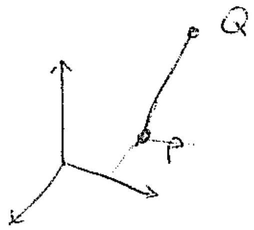
le repère en P est $(P;\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ avec

$$\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta=\arctan\frac{y}{x}\\ \varphi=\arctan\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{e}_r=\cos\theta\cos\varphi\,\vec{\imath}+\sin\theta\cos\varphi\,\vec{\jmath}+\sin\varphi\,\vec{k}\\ \vec{e}_\theta=-\sin\theta\,\vec{\imath}+\cos\theta\,\vec{\jmath}\\ \vec{e}_\varphi=-\sin\varphi\cos\theta\,\vec{\imath}+\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath}+\cos\varphi\,\vec{k}\end{cases}$$

Un point Q se rép. respectivement par :

$$\begin{aligned}\vec{PQ}&=x_Q\vec{\imath}+y_Q\vec{\jmath}+z_Q\vec{k},\\ &\rho_Q\vec{e}_\rho+\theta_Q\vec{e}_\theta+z_Q\vec{k},\\ &r_Q\vec{e}_r+\theta_Q\vec{e}_\theta+\varphi_Q\vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$



2. Champs scalaires et champs vectoriels de $\mathbb{R}^3$

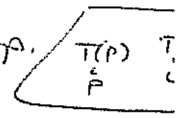
fcts réelles $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

fcts vectorielles $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$ où m est quelconque et le repère de $\mathbb{R}^m$ est fixe ~~O_1~~ centré en O.

Un <u>champ</u> est la donnée de valeurs <u>au dessus de chaque point</u> de $\mathbb{R}^3$.

Ces valeurs peuvent être :

- <u>scalaires</u> (nombres réels), ex. température : $\forall P \in \mathbb{R}^3$, $T(P) =$ temp.



- <u>vectoriels</u> (vecteurs de $\mathbb{R}^3$), ex. un champ de forces ou le champ magnétique.

Un champ se dit <u>uniforme</u> s'il est constant, i.e. il a la même valeur en tout point P.

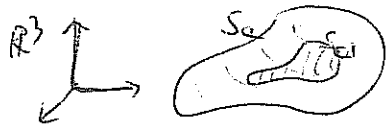
<u>Déf</u> 1) Un <u>champ scalaire sur $\mathbb{R}^2$</u> est une fct $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de domaine D_f.

On connait déjà les <u>lignes de niveau</u> $L_a = \{(x,y) \in D_f \text{ t.q. } f(x,y) = a\}$.

2) Un <u>champ scalaire sur $\mathbb{R}^3$</u> est une fct $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

On appelle <u>surface de niveau a</u> la surf. $S_a = \{(x,y,z) \in D_f \text{ t.q. } f(x,y,z) = a\}$

<u>ex</u>



<u>Déf</u> : Un <u>champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$</u> de domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ est une expression

$$\vec{V}(x,y,z) = V_x(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + V_y(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + V_z(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}$$

pour tout point $(x,y,z) \in D$, où V_x, V_y, V_z sont des fcts réelles et $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ sont les opérateurs "dérivées partielles" qui s'appliquent aux fonctions (réelles) différentiables (de classe C^∞!).

<u>Rem 1)</u> Si le point $(x,y,z) = P$ est exprimé en coordonnées cylindriques (ρ,θ,z), avec $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$, alors le champ $\vec{V}$ se transforme en $\vec{V}'(\rho,\theta,z) := V(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$ et doit s'exprimer comme

$$V'(\rho,\theta,z) = V'_\rho(\rho,\theta,z)\frac{\partial}{\partial\rho} + V'_\theta(\rho,\theta,z)\frac{\partial}{\partial\theta} + V'_z(\rho,\theta,z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Pour trouver ces coeff ↑ on doit exprimer $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial\rho}$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$:

si $f(x,y,z) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$, alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \rho} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \rho} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial \rho} = \cos\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\dfrac{\partial y}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,\dfrac{\partial z}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\theta\,\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

On en deduit que

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} &= -\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial \rho} - \sin\theta\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial \rho} + \cos\theta\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}} \quad (1)$$

Si on remplace $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ dans l'expression de $\vec{V}(x,y,z)$ on obtient que le champ vectoriel $V(x,y,z)$ se transforme en coordonnées cylindrique comme:

$$\boxed{\vec{V}'(\rho,\theta,z) = \vec{V}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z) = \underbrace{\left(V_x\cos\theta + V_y\sin\theta\right)}_{V'_\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \underbrace{\left(-V_x\sin\theta + V_y\cos\theta\right)}_{V'_\theta}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} + \underbrace{V_z}_{V'_z}\frac{\partial}{\partial z}} \quad (2)$$

Rem 2) Si le point $P=(x,y,z)$ est exprimé en coord. sphériques (r,θ,φ) avec
$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$, alors $\vec{V}''(r,\theta,\varphi) = \vec{V}(x,y,z)$ sera de la forme $V''_r\frac{\partial}{\partial r} + V''_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + V''_\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}$

En calculant comme ci-dessus, on trouve

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial y} + \sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \theta} &= -\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} &= -\cos\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial x} - \sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial y} + \cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}} \quad (3)$$

et le champ $\vec{V}$ se transforme comme:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{V}''(r,\theta,\varphi) = \vec{V}(x,y,z) = &\left(V_x\cos\theta\cos\varphi + V_y\sin\theta\cos\varphi + V_z\sin\varphi\right)\frac{\partial}{\partial r} \\ &+ \left(-V_x\sin\theta + V_y\cos\theta\right)\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ \left(-V_x\cos\theta\sin\varphi - V_y\sin\theta\sin\varphi + V_z\cos\varphi\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}} \quad (4)$$

Prop: Les transformations (1) et (3) permettent d'identifier les repères mobiles suivants:

$$\left(P=(x,y,z);\ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \longleftrightarrow \left(P;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$$

$$\left(P=(\rho,\theta,z);\ \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \longleftrightarrow \left(P;\ \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k}\right)$$

$$\left(P=(r,\theta,\varphi);\ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \longleftrightarrow \left(P;\ \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\right).$$

Par conséquent, on obtient le résultat suivant :

Théorème : Un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ est donc une fonction vectorielle $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui associe à tout point $P \in \mathbb{R}^3$ un vecteur $\vec{V}(P)$ de $\mathbb{R}^3$ dans un repère en P, et qui se transforme comme (2) et (4) par changement de coordonnées.

⚠ Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est donc plus qu'une simple fct vectorielle !

Pour les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ on a la même chose sans z :

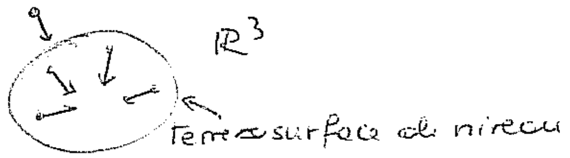
$$\vec{V}(x,y) = V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} = V_x \vec{\imath} + V_y \vec{\jmath}$$

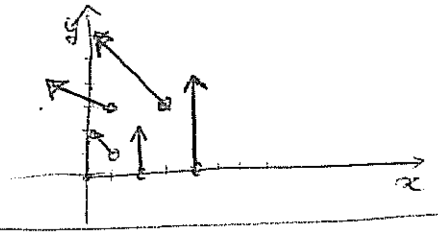
se transforme comme (2) :

$$\vec{V}'(\rho,\theta) = (V_x \cos\theta + V_y \sin\theta)\underbrace{\frac{\partial}{\partial \rho}}_{\vec{e}_\rho} + (-V_x \sin\theta + V_y \cos\theta)\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}}_{\vec{e}_\theta}$$

Exemples :

- champs de forces, ex. gravitation :
- champ magnétique ou électrique
- $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \equiv -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$





Prop. : Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est un champ scalaire de classe C^1, le gradient de f

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \equiv \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

est un champ vectoriel sur $\mathbb{R}^3$.

Déf : Le champ scalaire f s'appelle potentiel du champ vect. $\vec{\nabla} f$

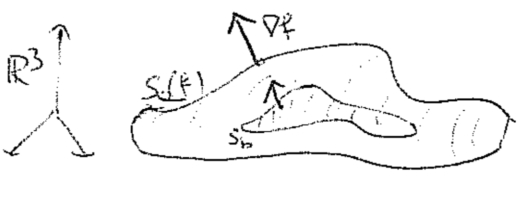
(en physique c'est plutôt $-f$ le potentiel de $\vec{\nabla} f$).

Utilisant les transformations (1) et (3), le gradient s'exprime en coord.

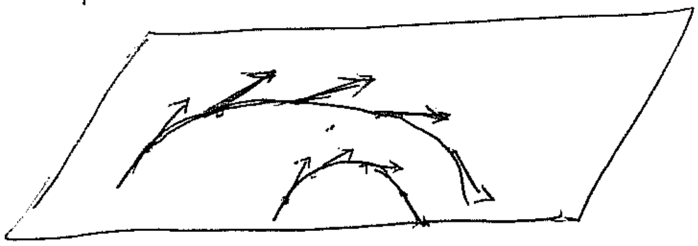
cylindriques : $$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

sphériques : $$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi .$$

Thm : Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, le gradient $\vec{\nabla} f$ est $\perp$ aux surfaces de niveau de f.



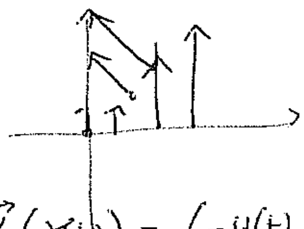
Déf. Soit $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel.
Les <u>lignes de champ</u> de $\vec{V}$ sont les courbes γ dans $\mathbb{R}^3$ t.q. en chaque point P de γ le vecteur $\vec{V}(P)$ soit tangent à γ.



Si $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée, $t \mapsto \gamma(t)$, le vecteur tangent à γ en $P = \gamma(t)$ est $\gamma'(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}$.
Alors γ est une ligne de champ de $\vec{V}$ si et seulement si

$$\forall t : \quad \gamma'(t) = \vec{V}(\gamma(t)).$$

<u>Ex</u>: $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$



$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \vec{V}(\gamma(t)) = (-y(t), x(t), 0) \iff$$

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x'(t)x(t) + y'(t)y(t) = 0 \iff \frac{d}{dt}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right) = 0 \\ z(t) = \text{constant} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$
$$x^2(t) + y^2(t) = \text{const} : \text{cercles en } O.$$

---

3. <u>Divergence et rotationnel</u>

Soit $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs, $V(x,y,z) = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$.

<u>Déf</u> La <u>divergence de $\vec{V}$</u> en (x,y,z) est le nombre réel

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial V_x}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial V_y}{\partial y}(\;) + \frac{\partial V_z}{\partial z}(\;),$$

où $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ est un opt. lin. vectoriel qui s'appelle <u>nabla</u>.

<u>Prop</u>: $\boxed{\text{div est un opt. linéaire : } \operatorname{div}(\lambda \vec{V_1} + \mu \vec{V_2}) = \lambda \operatorname{div} \vec{V_1} + \mu \operatorname{div} \vec{V_2}}$. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

<u>Ex</u>: $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = 0$

$\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2xy \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{V} = 2x + 2y + 1$.

<u>Prop</u> (indiqué sur la fiche-cours, non en cours)
si f fct, $\vec{U}, \vec{V}$ ch. vecteurs $\Rightarrow$

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f \cdot \operatorname{div}(\vec{V}) + \vec{\nabla} f \cdot \vec{V}$$
$$\operatorname{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{\operatorname{rot}}(\vec{U}) \cdot \vec{V} - \vec{U} \cdot \vec{\operatorname{rot}}(\vec{V})$$

Déf Le rotationnel de $\vec{V}$ en (x,y,z) est le vecteur

$$\vec{\text{rot}}\,\vec{V}(x,y,z) \equiv \vec{\nabla}\times\vec{V} := \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)+\vec{\jmath}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

Prop : $\boxed{\vec{\text{rot}} \text{ est un opt linéaire : } \vec{\text{rot}}\left(\lambda\vec{V}_1+\mu\vec{V}_2\right) = \lambda\,\vec{\text{rot}}\,\vec{V}_1+\mu\,\vec{\text{rot}}\,V_2 \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}.}$

Ex : $\vec{V}=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\text{rot}}\,\vec{V}=\vec{\imath}\cdot 0+\vec{\jmath}\cdot 0+\vec{k}\cdot(1+1)=2\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

$\vec{V}=\begin{pmatrix}x^2\\2xy\\z\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\text{rot}}\,\vec{V}=\vec{\imath}\cdot 0+\vec{\jmath}\cdot 0+\vec{k}\,(2y)=2y\,\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\2y\end{pmatrix}.$

Prop :
- Laplacien de f : $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Longrightarrow \Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}}\,f) \equiv \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f)$
- Laplacien vectoriel de $\vec{V}$: $\Delta\vec{V} := \Delta V_x\,\vec{\imath}+\Delta V_y\,\vec{\jmath}+\Delta V_z\,\vec{k}$

$$\Rightarrow \Delta\vec{V} = \vec{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{V}) - \vec{\text{rot}}\,\vec{\text{rot}}\,\vec{V} \equiv \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}) - \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{V}.$$

Identités :
$$\boxed{\begin{aligned}\text{div}\,(\vec{\text{rot}}\,\vec{V}) &\equiv \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = 0\\ \text{rot}\,(\vec{\text{grad}}\,f) &\equiv \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f) = 0\end{aligned}}$$

Après : $\boxed{\text{div}\,\vec{U}=0 \Leftrightarrow \vec{U}=\vec{\text{rot}}\,\vec{V}}$

Poincaré $\boxed{\text{rot}\,\vec{U}=0 \Leftrightarrow U=\vec{\text{grad}}\,f}$

4. Champs avec potentiels scalaire ou vectoriel

Champs intéressants en physique :

① Si $\vec{V}$ décrit un champ de force, la force s'appelle conservative si $\vec{V}$ est un champ gradient, i.e. il admet un pot. scalaire f t.q. $\vec{V}=\vec{\text{grad}}\,f$.

ex force éléctrique, force gravitationnelle : oui
force de Lorentz (éléctromagnétique), pression, frottements : non,
$\vec{B}=\vec{\text{rot}}\,\vec{A}$!

② Si $\vec{V}$ décrit la vitesse d'écoulement d'un fluide (ex. eau, air, etc), alors le fluide s'appelle :
- compressible si $\text{div}\,\vec{V}\neq 0$ (ex. air ou gas)
- incompressible si $\text{div}\,\vec{V}=0$ (ex. eau, huile ...)

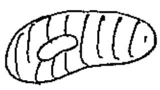
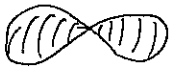
ex. le fluide qui s'écoule selon un champ de gradient $\vec{V}=\vec{\text{grad}}\,f$ est incompressible $\Leftrightarrow$ $\text{div}(\vec{\text{grad}}\,f)=\Delta f=0 \Leftrightarrow f$ est harmonique.

On s'intéresse d'abord aux champs de gradient :

Qst donné $\vec{V}$, est-ce que $\vec{V}=\vec{\text{grad}}\,f$ pour un potentiel scalaire f ?

Déf : Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) est :

- connexe si deux points quelconques peuvent être joint par un courbe dans D,

ex :  oui ,  oui ,  non .

- simplement connexe s'il est connexe et toute courbe fermée peut être déformée en un point ($\Leftrightarrow$ il n'y a pas de "trous").

ex : 1)  oui ,  non

2) $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \dots \mathbb{R}^n$ sont simplement connexes

3) tout disque (ouvert ou fermé) de $\mathbb{R}$ (interval), $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^n$ est simplement connexe.

Théorème de Poincaré

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et soit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ un ensemble simplement connexe. Alors :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \text{ sur } D \iff \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = 0 \text{ sur } D.$$

Réponse à la qst précédente : un champ vectoriel $\vec{V}$ sur $\mathbb{R}^3$ admet un potentiel scalaire sur un ensemble simplement connexe D (i.e. $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ sur D) ssi $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = 0$ sur D.

Calcul du potentiel scalaire d'un champ de gradient.

Soit $\vec{V}$ un ch. vect. sur $\mathbb{R}^3$ t.q. $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = 0$ sur D.

On cherche $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.q. $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ sur D, i.e.

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ V_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ V_z = \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \text{sur } D \quad \overset{\text{intégration}}{\rightsquigarrow} \quad f(x,y,z) = \overbrace{\int_D V_x\, dx}^{\text{primitive}} + g(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_D \frac{\partial V_x}{\partial y}\, dx + \frac{\partial g}{\partial y} = V_y$$

$$\Rightarrow g(y,z) = \int_D V_y\, dy - \int_D \left(\int_D \frac{\partial V_x}{\partial y}\, dx \right) dy + h(z)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \int_D V_x\, dx + \int_D V_y\, dy - \int_D \left(\int_D \frac{\partial V_x}{\partial y}\, dx \right) dy + h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \text{etc} = V_z \Rightarrow h(z) = \int_D V_z\, dz + \text{termes} + \text{conste}$$

$\Rightarrow$ on trouve enfin $f(x,y,z)$.

Ex : $\vec{V}(x,y,z) = 2xy\, \vec{\imath} + (x^2+z)\, \vec{\jmath} + y\, \vec{k} \overset{\text{vérifier}}{\Longrightarrow} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = 0$.

$$\begin{cases} V_x = 2xy = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ V_y = x^2+z = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ V_z = y = \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \iff$$

$f(x,y,z) = \int 2xy\, dx + g(y,z) = x^2y + g(x,z) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \dfrac{\partial g}{\partial y} = x^2 + z \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} =$

$g(y,z) = \int z\, dy = yz + h(z) \Rightarrow f = x^2y + yz + h$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = y + \dfrac{\partial h}{\partial z} = y \Rightarrow \dfrac{\partial h}{\partial z} =$

$h(z) = \text{const.} \Rightarrow f(x,y,z) = x^2y + yz + \text{const.}$

Maintenant on s'intéresse aux fluides :

~~Qst~~ : donné $\vec{V}$, est-ce que $\operatorname{div}\vec{V}=0$? (c'est-à-dire est-ce que le fluide est incompressible ?)

INS

Thm : Poincaré

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } \vec{V} \text{ un champ de vecteurs de } \mathbb{R}^3 \text{ et } D\subset\mathbb{R}^3 \text{ (contractible)} \\ \text{Alors : } \quad \operatorname{div}\vec{V}=0 \text{ sur } D \iff \vec{V}=\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{U} \text{ sur } D.\end{array}}$$

Le champ vectoriel $\vec{U}$ t.q. $\vec{V}=\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{U}$ s'appelle <u>potentiel vectoriel de $\vec{V}$</u>.

Le calcul du potentiel vectoriel $\vec{U}$ d'un champ $\vec{V}$ à divergence nulle ne donne pas une réponse unique : il s'agit de trouver $\vec{U}=U_x\vec{i}+U_y\vec{j}+U_z\vec{k}$ t.q.

$$\begin{cases} V_x = \dfrac{\partial U_z}{\partial y}-\dfrac{\partial U_y}{\partial z} \\ V_y = \dfrac{\partial U_x}{\partial z}-\dfrac{\partial U_z}{\partial x} \\ V_z = \dfrac{\partial U_y}{\partial x}-\dfrac{\partial U_x}{\partial y}\end{cases} \quad \text{en sachant que} \quad \frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0$$

$\rightsquigarrow$ intégrations successives.

On ne le fait pas explicitement ici.

<u>Cas particulier</u> :

$$\boxed{\text{si } \vec{V}=V_z\vec{k}, \text{ alors } \vec{V}=\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{U} \iff \vec{U}=U_x\vec{i}+U_y\vec{j} \text{ et } V_z=\frac{\partial U_y}{\partial x}-\frac{\partial U_x}{\partial y}.}$$

Dans ce cas, $\operatorname{div}\vec{V}=0 \iff \dfrac{\partial V_z}{\partial z}=0$ i.e. V_z ne dépend pas de z, donc U_x et U_y non plus.

alors : $\vec{V}=V_z(x,y)\,\vec{k}=\operatorname{rot}\vec{U}$ avec $\vec{U}=U_x(x,y)\,\vec{i}+U_y(x,y)\,\vec{j}$

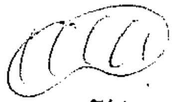
Même dans ce cas, il s'agit de trouver deux fonctions $U_x(x,y)$ et $U_y(x,y)$ t.q.

$\dfrac{\partial U_y}{\partial x}-\dfrac{\partial U_x}{\partial y}=V_z$ $\rightsquigarrow$ la réponse n'est pas unique, il suffit de prendre $U_y(x,y)=\displaystyle\int V_z(x,y)\,dx+\int\frac{\partial U_x(x,y)}{\partial y}\,dx+h(y)$.

INS

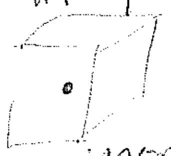
<u>Déf</u> $D\subset\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est <u>contractible</u> si on peut l'écraser à un point.

<u>ex</u> :



oui

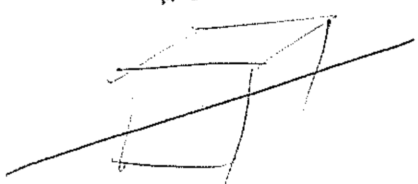
$\mathbb{R}^3 \setminus$ point



non

<u>Att</u> : cet ensemble est simpl. connexe

$\mathbb{R}^3 \setminus$ droite



non simpl. connexe
non contractible.

4/

NTRO aux calcul integral des chapitres suivants :

On a vu :

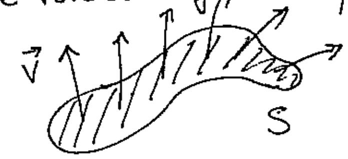
① $\vec{V}$ = champ de forces : conservatrice $\Leftrightarrow \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = 0 \overset{\text{Th. P.}}{\Longleftrightarrow} \vec{V} = \vec{\nabla} f$

et on a calculé f.

② $\vec{V}$ = vitesse d'écoulement d'un fluide : incompressible $\Leftrightarrow \mathrm{div}\,\vec{V} = 0 \overset{\text{Th}}{\Longleftrightarrow} \vec{V} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$.

A partir de maintenant on veut étudier le cas ②, le but est de calculer le

flux de $\vec{V}$ à travers une surface $S \subseteq \mathbb{R}^3$ = quantité totale de fluide qui s'écoule à travers S $= \iint_S \vec{V} \cdot \vec{dS}$

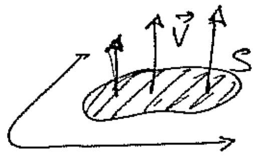


Le but principal des prochains chapitres est de donner un sens aux principaux résultats :

- si le fluide est incompressible ($\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$, $\vec{V} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$) :

Thm de Stokes : $\displaystyle\iint_{S \subseteq \mathbb{R}^3} \vec{V} \cdot \vec{dS} = \oint_{\substack{\partial S = C \\ \text{fermée}}} \vec{U} \cdot \vec{dl} \equiv$ circulation de $\vec{U}$ le long de la courbe C

Thm de Green-Riemann = Th Stokes dans le cas où $S \subseteq \mathbb{R}^2$ et $\vec{V} \perp S$



- si le fluide est compressible ($\mathrm{div}\, V \neq 0$) :

Thm de Ostrogradski : $\displaystyle\oiint_{S = \partial D} \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iiint_{D \subset \mathbb{R}^3} (\mathrm{div}\,\vec{V}) \cdot d\mathrm{vol}$.

$S = \partial D$ fermée $\Longrightarrow$ bord d'un domaine de $\mathbb{R}^3$

Pour cela, il faut d'abord définir les integrales multiples $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$ et $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, ensuite les integrales sur des courbes C et enfin les integrales sur des surfaces S.

1. Integrale simple comme somme de Riemann

Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est déf sur $[a,b]$, on rappelle qu'on a défini l'<u>intégrale de f sur $[a,b]$</u> comme

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a)$$

où $F(x)$ est une <u>primitive</u> de f, c'est-à-dire une fct t.q. $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,$

<u>Thm</u> [On sait que si f ~~continue~~, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.]

Pour calculer $F(x)$, on utilise le <u>Thm fond. du calcul intégral</u> : $\boxed{F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt + F(a)}$

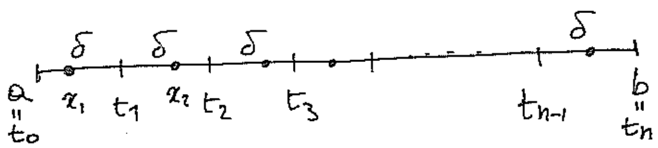
en essayant de transformer $f(x)$ en une dérivée $F'(x)$ à l'aide des techniques :

– <u>chm de variable</u> : $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} (f \circ h)(t)\, h'(t)\,dt}$ $\quad x = h(t)$

– <u>int. par partie</u> : $\boxed{\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx}$

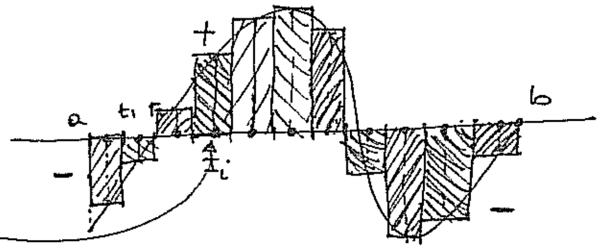
etc.

<u>Déf</u>. Une <u>subdivision</u> $\mathcal{S}_\delta$ de $[a,b]$ est une partition l'intervalle $[a,b]$ en n intervalle $I_i := [t_{i-1}, t_i]$ de longueur $\delta = \frac{b-a}{n}$, en partant de $t_0 = a$ et en finissant à $t_n = b$



<u>Déf</u>. Pour tout choix de n points $x_1, x_2, \dots, x_n$ t.q. $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, on appelle <u>somme de Riemann de f</u> associée à la subdivision $\mathcal{S}_\delta$ la quantité

$$S_\delta(f) := \sum_{i=1}^n \underbrace{f(x_i)\cdot\delta}_{\substack{\pm \text{ aire d'un} \\ \text{rectangle sur } I_i \\ \text{haut } f(x_i)}}$$

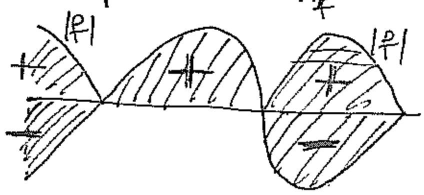


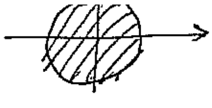
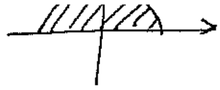
<u>thm</u> : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Si la limite } \displaystyle\lim_{\substack{\delta\to 0\\(n\to\infty)}} S_\delta(f) \text{ existe, elle est indépendante du choix des } x_i \text{ et} \\ \text{on a } \displaystyle\lim_{\delta\to 0} S_\delta(f) = \int_a^b f(x)\,dx.\end{array}}$

<u>Corollaire</u> :

1) $\int_a^b f(x)\,dx$ = aire "algébrique" de la portion du plan entre Γ_f et l'axe $\vec{x}$

2) $\int_a^b |f(x)|\,dx$ = aire entre Γ_f et $\vec{x}$



Ex: Aire du cercle $x^2+y^2=1$  $= 2\times$ Aire du demi-cercle $x^2+y^2=1,\ y\geq 0$ 

$$A = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos(2t)\,dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt$$

$x=\sin t$

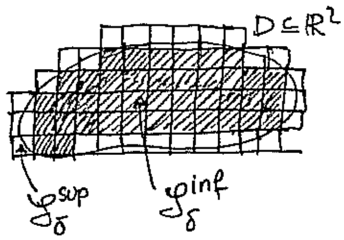
$\sqrt{1-x^2}=\cos t$

$dx = \cos t\,dt$

$$= \frac{1}{2}\Big[\sin(2t)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \Big[t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\big(\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\sin\pi}} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\sin(-\pi)}}\big) + \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

.. Intégrales doubles

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fct défini sur un ensemble borné $D\subseteq\mathbb{R}^2$.



Déf On appelle ~~une~~ subdivision $\mathcal{S}_\delta^{sup}$ de D le recouvrement de D ~~par~~ d'extérieur par des carrés K_i de taille $\delta\times\delta$, et subdivision $\mathcal{S}_\delta^{inf}$ le recouvrement de D à l'intérieur par les carrés K_i de taille $\delta\times\delta$.

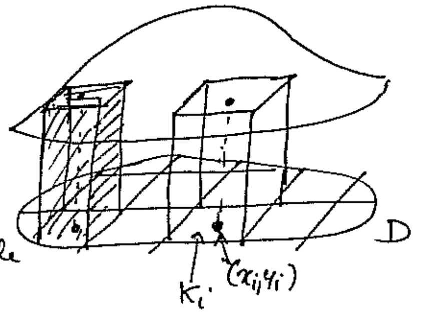
Déf Pour tout choix de points $(x_i,y_i)\in K_i\cap D$, on appelle somme de Riemann de f associée aux subdivisions $\mathcal{S}_\delta^{inf}$ et $\mathcal{S}_\delta^{sup}$ les quantités

$$S_\delta^{sup}(f) := \sum_{K_i\in\mathcal{S}_\delta^{sup}} f(x_i,y_i)\cdot\delta^2$$

$$S_\delta^{inf}(f) := \sum_{K_i\in\mathcal{S}_\delta^{inf}} \underbrace{f(x_i,y_i)\cdot\delta^2}$$

$\shortparallel$

$\pm$ volume du parallélépipède de base K_i et hauteur $f(x_i,y_i)$



Thm: Si les limites $\lim\limits_{\delta\to 0} S_\delta^{sup}(f)$ et $\lim\limits_{\delta\to 0} S_\delta^{inf}(f)$ existent, alors elles sont indépendantes du choix des pts $(x_i,y_i)\in K_i$ et on a

$$\lim_{\delta\to 0} S_\delta^{sup}(f) = \lim_{\delta\to 0} S_\delta^{inf}(f).$$

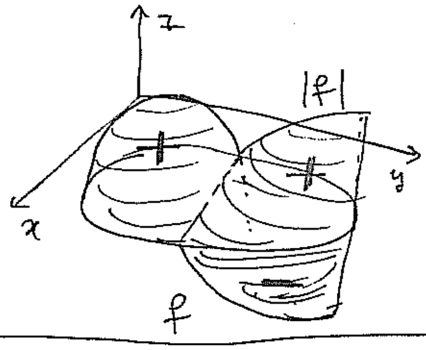
Déf. Dans ce cas, on appelle intégrale double de f sur D cette limite :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy := \lim_{\delta\to 0} S_\delta^{sup}(f) = \lim_{\delta\to 0} S_\delta^{inf}(f).$$

Thm: Si f est continue (et D est borné), l'intégrale $\iint_D f\,dx\,dy$ existe et elle est finie.

Corollaire: 1) $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ = volume "algébrique" de la portion de l'espace entre Γ_f et le plan xOy

2) $\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$ = volume entre Γ_f et xOy.



Propriétés de base:

1) $\iint_D \left(\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\right) dx\,dy = \lambda \iint_D f\,dx\,dy + \mu \iint_D g\,dx\,dy \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2) si $D_1 \cap D_2$ = courbe ou bien $\emptyset$, alors $\iint_{D_1 \cup D_2} f\,dx\,dy = \iint_{D_1} f\,dx\,dy + \iint_{D_2} f\,dx\,dy$.

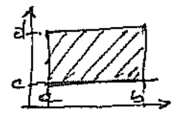
3) $\left| \iint_D f\,dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$ = volume entre Γ_f et D

4) si $f \leq g$ alors $\iint_D f\,dx\,dy \leq \iint_D g\,dx\,dy$.

Calcul des intégrales doubles

1) **Intégrales répétées**

1er cas $D = [a,b] \times [c,d]$ rectangle, f continue

$D =$ 

Thm de Fubini:
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \underbrace{\int_c^d dy\, f(x,y)}_{\text{int. de la fct partielle à } x \text{ fixé}} = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx}$$

Ex: $f(x,y) = x\cos y + e^{xy}$ sur $D = [0,1] \times [0, \pi/2]$

$$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} (x\cos y + e^{xy})\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^1 dx \left(x\cos y + e^{xy}\right) = \int_0^{\pi/2} dy \left[\frac{1}{2}x^2\cos y + \frac{1}{y} e^{xy}\right]_0^1$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\cos y + \frac{e^y}{y} - \frac{1}{y}\right) dy = \left[\frac{1}{2}\sin y + y e^y - e^y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}e^{\pi/2} - e^{\pi/2} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4} +$$

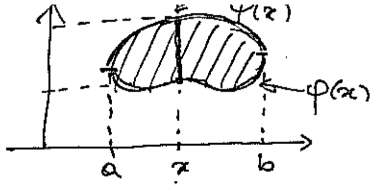
$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)e^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{8} + \frac{3}{2}.$$

$$\int y e^y\,dy = [y e^y] - \int e^y\,dy = [y e^y - e^y]$$

$f = y \quad g' = e^y$

$f' = 1 \quad g = e^y$

2ème cas : D est un ensemble borné quelconque,



alors $a \le x \le b$ et $\forall x$ on a

$$\varphi(x) \le y \le \psi(x)$$

où $\{\varphi(x),\ x \in [a,b]\}$ est la courbe ∂D inférieure.

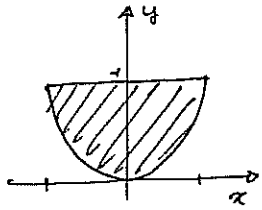
et $\{\psi(x),\ x \in [a,b]\}$ est la courbe ∂D supérieure.

Thm Fubini :

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dx\, f(x,y)}$$

$y \ge x^2,\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

Ex 1) $f(x,y) = x^2 y$ sur $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \in [-1,1],\ y \in [x^2,1] \}$



$$\iint_D x^2 y\, dx = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy\, (x^2 y) = \int_{-1}^{1} dx \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{x^2}^{1}$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^4\right) dx = \left[\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{8}x^5\right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} - \left(-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{8} = \tfrac{5}{24}.$$

Ex 2) Volume de la sphère $S^2 = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$ cf pag 39

2) Changement de variables

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le changement de variables $h(X,Y) = (x(X,Y), y(X,Y))$

et $g = f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fct composée,

$g(X,Y) = f(x(X,Y), y(X,Y))$. Alors :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \supseteq D \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^2 \supseteq D' \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "g = f\circ h"'] & \end{tikzcd}$$

L'ensemble $D = \{(x,y)$ t.q. $\ldots\}$ se transforme en $D' = \{(X,Y)$ t.q. $h(X,Y) \in D\}$.

Les dx et dy se transforment comme

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = d_{(X,Y)}h \cdot \begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{pmatrix}, \text{ i.e. } \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial X} dX + \frac{\partial x}{\partial Y} dY \\ dy = \frac{\partial y}{\partial X} dX + \frac{\partial y}{\partial Y} dY \end{cases}.$$

Alors $dx\,dy = \left(\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}\right) dX\,dY = \det(dh)\, dX\, dY$

Notation : $\dfrac{D(x,y)}{D(X,Y)} := \det(dh)$

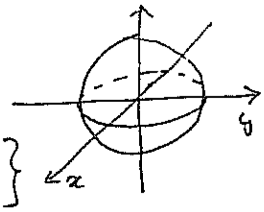
Thm :

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} (f\circ h)(X,Y)\, \det(dh)\, dX\,dY = \iint_{D'} g(X,Y) \frac{D(x,y)}{D(X,Y)}\, dX\, dY.}$$

En particulier :

coord. polaires (ρ,θ) : $\boxed{dx\,dy = \rho\, d\rho\, d\theta}$

Ex : Calcul du volume de $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ en coordonnées polaires.



$$Vol(\mathbb{S}^2) = 2 \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{où} \quad f(x,y) = z = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$D = \{(x,y)\ ;\ \cancel{x\in[-1,1],\ y\in[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]}\ \ x^2+y^2-1 \le 0\}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = g(\rho,\theta) = \sqrt{1-\rho^2}$$

$$D = \{(\rho,\theta)\ ;\ 0 \le \rho \le 1\ ,\ \theta \in [0, 2\pi[\ \}$$

$$dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$Vol(\mathbb{S}^2) = 2\iint_{D'} g(\rho,\theta)\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\,.\,\rho\sqrt{1-\rho^2} = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho$$

$t = 1-\rho^2$
$\rho^2 = 1-t$
$2\rho\,d\rho = -dt$

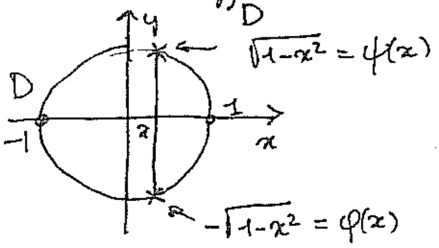
$$= [\theta]_0^{2\pi} \cdot \int_0^1 2\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = 2\pi \cdot \int_1 \sqrt{t}\,.(-dt) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{t}\,dt$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

INS page 38 :

Ex 2 : Calcul du volume de $\mathbb{S}^2$ en coord. cartesiennes.

$$Vol(\mathbb{S}^2) = 2\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{où} \quad f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{et} \quad D = \{(x,y),\ x^2+y^2-1 \le 0\}$$



$$D = \{(x,y),\ -1 \le x \le 1\ ,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

car $\partial D = \{(x,y) \text{ t.q. } x^2+y^2 = 1\} = \{y = \pm\sqrt{1-x^2}\} = C_- \cup C_+$

$$Vol(\mathbb{S}^2) = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = 2\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy = 2\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy$$

$$= 2\int_{-1}^1 dx\,\sqrt{1-x^2} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy = 2\int_{-1}^1 dx\,(1-x^2)\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt =$$

$t = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad y = t\sqrt{1-x^2}$ $\quad dy = \sqrt{1-x^2}\,dt$ $\quad y = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow t = -1$ $\quad y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow t = 1$

$t = \sin u \qquad dt = \cos u\,du$
$\sqrt{1-t^2} = \cos u$
$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\,du = \frac{\pi}{2}$

$$= \cancel{\pi}\int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx = \pi\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \pi\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \pi\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

Application de l'intégrale double : si $D \subseteq \mathbb{R}^2$ est un ensemble borné, alors l'aire de D est $Aire(D) := \iint_D dx\,dy$.

0)

3 - Intégrales triples

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fct déf sur un ensemble **borné** $D \subseteq \mathbb{R}^3$.

On définie $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ comme limite d'une somme de Riemann ~~associée~~ associée à une subdivision de D en petits cubes de taille $\delta^3 \rightarrow$ même déf que pour $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, même propriétés de base, même thm d'existence (f continue sur D borné).

~~Prop~~ L'analogue du "volume entre Γ_f et le plan xOy" devient un "quadri-volume" entre $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^4$ et l'espace de base $\mathbb{R}^3 = (O; x, y, z)$.

Calcul des intégrales triples :

1) Thm Fubini

① Si $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, alors

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\, f(x,y,z)$$ dans l'ordre qu'on veut.

② Si $D = \{ a \le x \le b,\ c(x) \le y \le d(x),\ e(x,y) \le z \le f(x,y) \}$, alors

$$\iiint_D f\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} dz\, f(x,y,z).$$

2) Changement de coordonnées :

Si $(x,y,z) = h(X,Y,Z)$ avec diff. $dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \end{pmatrix}$, ~~alors~~

et on note $\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)} := \det(dh)$, alors :

Thm : $$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} (f \circ h)(X,Y,Z)\, \frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)}\, dX\,dY\,dZ}$$

$D' = \{(X,Y,Z),\ h(X,Y,Z) \in D\}$

En particulier :

coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) : $\boxed{dx\,dy\,dz = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz}$

coordonnées sphériques (r, θ, φ) : $\boxed{dx\,dy\,dz = r^2 \cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi}$

Applications des intégrales triples

① $\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz$

② ρ = concentration (densité), alors

quantité tot. en $D = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

moyenne sur $D = \frac{1}{\ldots} \iiint \rho\,dx\,dy\,dz$

③ Si μ = densité de masse, alors :

masse totale $M = \iiint_D \mu\,dx\,dy\,dz$

centre inertie = pt G de coord. $\begin{cases} x_G = \frac{1}{M}\iiint_D x\, \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,d\ldots \\ y_G = \frac{1}{M}\iiint_D y\, \mu(x,y,z)\,dx\,dy\ldots \\ z_G = \frac{1}{M}\iiint_D z\, \mu(x,y,z)\,dx\,dy\ldots \end{cases}$

Si $r(x,y,z)$ = dist. de (x,y,z) d'un point P ou d'une axe Δ, alors

moment d'inertie par rapport à P ou Δ $= \frac{1}{\ldots}\iiint r^2(x,y,z)\,\mu(x,y,z)\,dx\ldots$

Ch VIII Circulation d'un champ de vecteurs et intégrale curviligne

On commence par donner un sens à $\oint_C \vec{V} \cdot \vec{dl}$.

1. Circulation sur une courbe définie implicitement

Déf : Une courbe de $\mathbb{R}^3$ définie implicitement est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0,\ x\in[a,b],\ y\in[c,d],\ z\in[e,f]\}\ \text{rég}: \begin{matrix}\nabla F \neq \vec{0}\\ \nabla G \neq \vec{0}\end{matrix}$$

Ex : l'intersection de deux graphes de fcts : $\Gamma_f = \{(x,y,z),\ z=f(x,y)\}$, $\Gamma_g = \{(x,y,z),\ z=g(x,$

$$\Rightarrow \Gamma_f \cap \Gamma_g = \{(x,y,z) \text{ t.q. } f(x,y)-z=0 \text{ et } g(x,y)-z=0\} = C$$

ex : $\Gamma_f \cap$ plan $=$ courbe plane : $\{z = x^2 - y,\ z = 1\}$ 

Déf : On appelle élément de ligne le vecteur infinitésimal $\vec{dl} := dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$.

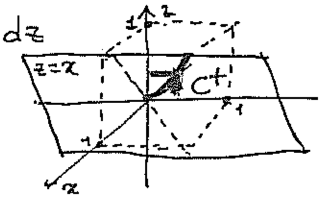
Soit C une courbe de $\mathbb{R}^3$. On fixe sur C une orientation, c'est-à-dire un sens de parcours.

Déf : Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini sur la courbe C^+. On appelle circulation de $\vec{V}$ le long de C^+ l'intégrale $\int_{C^+} \vec{V}(x,y,z) \cdot \vec{dl} = \int_{C^+} (V_x dx + V_y dy + V_z dz)$

Si C est une courbe fermée, alors $\oint_{C^+} \vec{V} \cdot \vec{dl}$.

Pour calculer cette intégrale, sur chaque terme $\int_{C^+} V_x(x,y,z)\,dx$ on trouve $y = y(x)$ et $z = z(x)$ à partir du système $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, on les remplace dans $V_x(x, y(x), z(x))$ et on intègre en dx sur les bornes de variations de x dans le sens donné par l'orientation : $[a,b]$ ou $[b,a]$

Ex : $\vec{V}(x,y,z) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z\,\vec{k} \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{dl} = -y\,dx + x\,dy + z\,dz$



$C^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } z = x,\ z = y^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$

$$\Rightarrow \int_C \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_{\substack{y=\sqrt{x}\\ 0\le x\le 1}} -y\,dx + \int_{\substack{x=y^2\\ 0\le y\le 1}} x\,dy + \int_{0\le z\le 1} z\,dz = \int_0^1 -\sqrt{x}\,dx + \int_0^1 y^2\,dy + \int_0^1 z\,dz$$

$$= \left[-\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

---

2. Changement de coordonnées.

Si on opère un chmt de coord. $(x,y,z) \mapsto (X,Y,Z)$ on applique une $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.q. $h(X,Y,Z) = (x(X,Y,Z), y(X,Y,Z), z(X,Y,Z))$. Alors

$$\boxed{\vec{dl} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dh \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}} \quad \text{où} \quad dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \dots & \\ \frac{\partial z}{\partial X} & & \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial X} dX + \frac{\partial x}{\partial y} dY + \frac{\partial x}{\partial z} dZ \\ dy = \dots \\ dz = \dots \end{cases}$$

et donc

$$\boxed{\int_C \vec{V}(x,y,z) \cdot \vec{dl} = \int_{C \circ h^{-1}} (\vec{V} \circ h)(X,Y,Z) \cdot dh \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}}$$

Cas particuliers

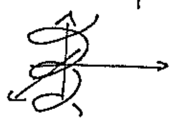
coord. cylindriques : $\boxed{\vec{dl} = d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{k}}$

coord. sphériques : $\boxed{\vec{dl} = dr\,\vec{e_r} + r\cos\varphi\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}}$

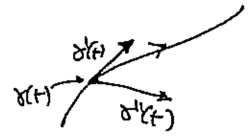
2) 3. Circulation sur une courbe paramétrée. Intégrales curvilignes d'une fonction

Toute courbe C déf. implicitement peut être "paramétrée", eventuellement en la coupant en plusieurs morceaux $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots$ et en utilisant different paramètres sur chaque C_i.

Déf: Une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ est $C = \{ \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a,b] \}$
où t est le paramètre et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ le paramétrage.

ex : hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 

Le paramétrage indique comment on parcours la courbe (par ex. dans le temps) et lui donne automatiquement ~~une~~ orientation. On appelle alors:



vitesse $\vec{\gamma'}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ = vecteur tangent en $\gamma(t)$

accellération $\vec{\gamma''}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$

La courbe est régulière si $\vec{\gamma'}(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$.

Un paramétrage est particulièrement utile car il a vitesse constante $= 1$:

abscisse curviligne $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du + s_0$ ($\forall$ choix de s_0 !)

Si on trouve $t = t(s)$ et on réparamétrise γ, on a $\gamma(t) = \gamma(t(s)) = \tilde{\gamma}(s)$ et $\|\tilde{\gamma}'(s)\| =$

On appelle élément d'arc le $\boxed{ds = \|\gamma'(t)\|\, dt}$ de telle sorte que $s(t) = \int_{t_0}^{t} ds + s_0$.

On a aussi la longueur de la courbe γ entre $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$:

$$L_a^b(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_{s(a)}^{s(b)} ds$$ $\Rightarrow$ s s'appelle "paramètre par longueur d'arc".

Prop :
1) L'élément de ligne sur la courbe param. γ est
$$\vec{d\ell} = \vec{\gamma'}(t)\, dt = \vec{T}_\gamma(s)\, ds \quad \text{où} \quad \vec{T}_\gamma = \frac{\vec{\gamma'}(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \text{vecteur tangent unitaire}$$
2) Si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ déf sur γ alors
$$\int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{d\ell} = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma'}(t)\, dt = \int_a^b \Big(V_x(x(t), \ldots)\, x'(t) + V_y\, y'(t) + V_z\, z'(t) \Big)\, dt$$
$$= \int_{s(a)}^{s(b)} \vec{V}(\tilde{\gamma}(s)) \cdot \vec{T}_\gamma\, ds.$$

NS ex p.43

En général, à la place de $\vec{V}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma'}(t)$ on peut considerer une fct quelconque.

Déf. Pour toute fct $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur la courbe param. γ, on appelle intégrale curviligne de f sur γ le
$$\int_\gamma f(x,y,z)\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Cas particuliers :

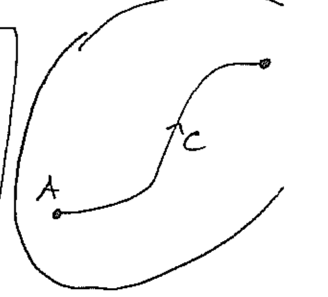
1) La fct $f(\gamma(t)) = \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \vec{T}_\gamma(t)$ est la projection de $\vec{V}$ sur la droite tangente à γ. Dans ce cas $\int_\gamma f\, ds$ = circulation de $\vec{V}$ le long de γ.

2) Si $f(\gamma(t)) \equiv 1$, on obtient la longueur de l'arc de γ entre $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$
$$L_a^b(\gamma) = \int ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

4. Circulation d'un champ de gradient

Soit $\vec{V} = \overrightarrow{grad}\, f$ un champ de gradient de $\mathbb{R}^3$.

D "sans trous"



Thm : Pour toute courbe C qui joigne deux points A et B, dans un domaine "sans trous" D où f est déf partout, on a
$$\int_C (\overrightarrow{grad}\, f) \cdot \vec{dl} = f(B) - f(A).$$
C'est à dire que la circulation de $\overrightarrow{grad}\, f$ dépend seulement des pts A et B et ne dépend pas de la courbe C.

Corollaire : La circulation de $\overrightarrow{grad}\, f$ le long d'une courbe fermée C est nulle : $\oint_C \overrightarrow{grad}\, f \cdot \vec{dl} = 0$.
si f est déf partout dedans C

f définie partout à l'intérieur

INS à pag 42

Ex : $\vec{V} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ sur $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \Rightarrow$

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_0^{2\pi} \Big((-\sin t)\cdot(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + t \cdot 1 \Big) dt = \int_0^{2\pi} (1+t)\,dt = \Big[t + \tfrac{1}{2}t^2 \Big]_0^{2\pi}$$
$$= 2\pi + 2\pi^2.$$

---

5. Théorème de Green-Riemann

Cas particulier : [illegible] est une courbe plane $\subset \mathbb{R}^2$ et $\vec{V}$ est un champ de $\mathbb{R}^2$

[illegible] Green-Riemann (corollaire du Th. Stokes [illegible])

Si C est une courbe plane fermée, [illegible]
et $\vec{V}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j}$ est un champ [illegible]

alors
$$\oint_C \vec{V} \cdot \vec{dl} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Ex : $\oint (y\,dx + x\,dy) = \iint_D (1-1)\,dx\,dy = 0$

$\oint (x y^2 dx + [illegible]\, dy) = \iint (4xy - 2xy)\, dx\,dy = \iint 2xy\,dx\,dy = 2\int_{-1}^{1} dx\, x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy$

$= 2\int_{-1}^{1} dx \left(x \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right) = \int_{-1}^{1} dx\; x \left((1-x^2) - (1-x^2) \right) = 0$

Ch IX Flux d'un champ vectoriel et intégrale de surface

Maintenant on veut donner un sens à $\iint_S \vec{V} \cdot \vec{dS}$.

1. Flux à travers une surface définie implicitement

Déf : Une surface de $\mathbb{R}^3$ déf. implicitement est un sous-ens. de $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } F(x,y,z) = 0 \ \&, \ x \in [a,b],\ y \in [c,d],\ z \in [e,f] \}.$$ rég si $\nabla F \neq$

Ex : le graphe d'une fct $\Gamma_f = \{ (x,y,z),\ z = f(x,y) \}$.

- $\{ x^2+y^2+z^2 = 1 \}$ = sphère $\mathbb{S}^2$

$-dx\,dz$ ou bien $dz\,dx$

Déf : On appelle élément de surface le vecteur infinitésimal $\vec{dS} := dy\,dz\,\vec{i} - dx\,dz\,\vec{j} + dx\,dy\,\vec{k} = \begin{cases} dy\,dz \\ -dx\,dz \\ dx\,dy \end{cases}$

Déf : Soit S^+ une surface où l'on a fixé une orientation (donné par un vecteur normal $\vec{N}$).
Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini sur la surface S^+. On appelle flux de $\vec{V}$ à travers S^+ l'intégrale $\iint_S \vec{V}(x,y,z) \cdot \vec{dS} = \iint_S \left(V_x\,dy\,dz - V_y\,dx\,dz + V_z\,dx\,dy \right)$

Si S est une surface fermée , alors on note $\oiint_S \vec{V} \cdot \vec{dS}$.

Pour calculer le flux, sur chaque terme $\iint_S V_x\,dy\,dz$ on trouve $x = x(y,z)$ à partir de $F(x,y,z) =$ et on le remplace dans $V_x(x(y,z),y,z)$. On obtient des intégrales doubles $\iint_D f(y,z)\,dy\,dz$.
Ex : voir fiches TD.

---

2. Changement de coordonnées

si $(x,y,z) = h(X,Y,Z)$ avec diff. $dh = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \\ \frac{\partial y}{\partial X} & & \\ & & \end{pmatrix}$ et $\frac{D(x,y,z)}{D(X,Y,Z)} := \det(dh)$,

alors $\vec{dS} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = dh \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ on calcule $dx\,dy$, $dx\,dz$, $dy\,dz$ pour obtenir $\vec{dS}$ en fct de dX, dY et dZ.

Cas particuliers :

coordonnées cylindriques $\boxed{\vec{dS} = \rho\,d\theta\,dz\,\vec{e}_\rho + d\rho\,dz\,\vec{e}_\theta + \rho\,d\rho\,d\theta\,\vec{k}}$

coordonnées sphériques $\boxed{\vec{dS} = r^2\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi\,\vec{e}_r + dr\,d\varphi\,\vec{e}_\theta + r\cos\varphi\,dr\,d\theta\,\vec{e}_\varphi}$

---

3. Flux à travers une surface paramétrée

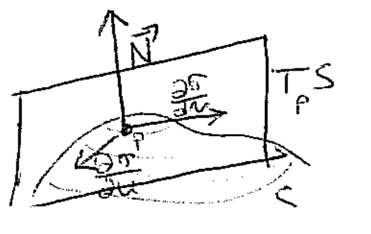
Déf Une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$ est $S = \{ \sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3,\ u \in I,\ v \in J \}$

où $\sigma : I \times J \to \mathbb{R}^3$ est la paramétrisation de S et u, v sont les paramètres.

Un point $\sigma(u,v)$ de S est régulier si $\exists\ \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \neq 0$ où $\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$

i.e si 1) σ est diff. en (u,v) et $\frac{\partial \sigma}{\partial u} \neq \vec{0}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial v} \neq \vec{0}$

2) $\frac{\partial \sigma}{\partial u}$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial v}$ ne sont pas colinéaires.



Dans ce cas, le vecteur $\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ est orthogonal à S,

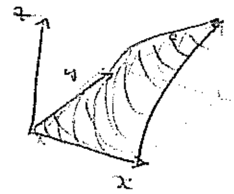
et $\vec{N}(u,v) = \frac{1}{\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \|} \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}$ s'appelle vecteur normal unitaire

Prop 1) L'élément de surface sur la surface paramétrée $S = \{\sigma(u,v)\}$ est

$$\overrightarrow{dS} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) du\,dv = \overrightarrow{N}_S(u,v)\,\underbrace{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\,dv}_{dA \,=\, \text{élément d'aire}}.$$

2) Si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ déf. sur S, alors

$$\iint_S \vec{V}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{I\times J} \vec{V}(\sigma(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right) du\,dv = \iint_{I\times J} \vec{V}(\sigma(u,v))\cdot\overrightarrow{N}_S(u,v)\, dA.$$



Ex. $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z^2 = xy,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1\}$

$= \{\sigma(u,v) = (u^2, v^2, uv),\ u\in[0,1],\ v\in[0,1]\}$

$\vec{V} = x\vec{i} - z\vec{j} + y\vec{k}$: $x = u^2$, $y = v^2$, $z = uv$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \begin{pmatrix} 2u \\ 0 \\ v \end{pmatrix},\quad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2v \\ u \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial u}\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \begin{pmatrix} -2v^2 \\ -2u^2 \\ 4uv \end{pmatrix}$$

$$\iint_S \vec{V}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \left[(u^2)(-2v^2) + (-uv)(-2u^2) + (v^2)(4uv)\right] du\,dv = \frac{19}{36}$$

En général, à la place de $\vec{V}(\sigma(u,v))\cdot\overrightarrow{N}_S(u,v)$ on peut considérer une fonction quelconque $f(u,v)$.

Déf. Pour toute fct $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur la surface paramétrée S, on appelle <u>intégrale de surface de f sur S</u> le

$$\iint_S f(x,y,z)\, dA := \iint_{I\times J} f(\sigma(u,v))\, dA = \iint_{I\times J} f(\sigma(u,v)) \left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\,dv.$$

6) 4. Théorèmes de Stokes et applications

Qsts : donné $\vec{V}$ et S^+, trouver la ~~flux~~ circulation $\int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$

donné $\vec{V}$ et S, trouver le flux $\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S}$.

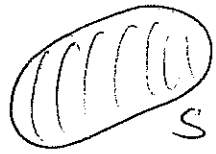
Théorème de Stokes ou Stokes-Ampère :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{V} = 0 \Rightarrow \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S^+} \vec{U} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{où } \vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{U}}$$

En particulier : $\boxed{\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{U} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S^+} \vec{U} \cdot d\vec{\ell}}$

Cas particuliers :

① $\boxed{\oiint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{U} \cdot d\vec{S} = 0}$



$\left.\begin{array}{l}\operatorname{div}\vec{V} = 0 \\ \vec{V} \text{ défini partout dedans } S\end{array}\right\} \Rightarrow \oiint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$

② S = surface plane $\subseteq \mathbb{R}^2$, $\vec{V} \perp S$, $\vec{V} = V_z \vec{k}$

$\vec{V} = \operatorname{rot}\vec{U} \Leftrightarrow \vec{U}$ = ch. vect. plane $= P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$

et $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{U} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$.

Théorème de Green-Riemann : $\boxed{\oint_{\partial S^+} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.}$

③ $\vec{U} = \vec{\nabla} f \Rightarrow \vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{U} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f = 0 \Rightarrow \iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$

$\boxed{\oint_{C^+ = \partial S} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{\ell} = 0}$

$\boxed{\text{si } C^+ \text{ est une courbe d'extrémités les points } A, B : \quad \int_{C^+} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{\ell} = f(B) - f(A)}$

Théorème de Ostrogradski (autre version d'un thm. de Stokes plus général)

$\operatorname{div} V \neq 0$ $\boxed{\iint_{S^+ = \partial D} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_D \operatorname{div}\vec{V} \cdot dx\,dy\,dz}$

Le thm de Stokes à $\operatorname{div}\vec{V} = 0$ en est une conséquence.