UCBL – L1 PCSI – UE Math 2

Fonctions de plusieures variables et champs de vecteurs

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

http://math.univ-lyon1.fr/∼frabetti/Math2/

http://math.univ-lyon1.fr/∼borrelli/CoursMath2/

Programme et plan des cours

Partie I : Fonctions de plusieures variables

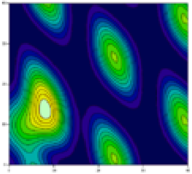
CM 1 – Coordonnées, ensembles compacts
CM 2 – Fonctions, graphes, composition
CM 3 – Dérivées partielles, gradient
CM 4 – Différentielle, Jacobienne
CM 5 – Règle de la chaîne, Hessienne
CM 6 – Taylor, extrema locaux
CM 7 – Intégrales simples et doubles
CM 8 – Intégrales triples, aire, volume, centre de masse

Partie II : Champs de vecteurs

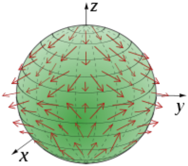
CM 9 – Champs scalaires et champs de vecteurs
CM 10 – Champs conservatifs et incompressibles
CM 11 – Courbes et circulation
CM 12 – Surfaces et flux

But du cours:

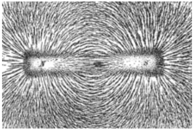
Champ scalaire
(lignes de niveau)



Champ de vecteur
sur la sphère



Lignes de champ
(dipole magnétique)



et aussi potentiels, circulation, flux...

Prérequis

1. **Espaces vectoriels et vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$** (produits scalaire, vectoriel et mixte).
2. **Applications linéaires et matrices** (produit, détérminant, matrice inverse).
3. **Géométrie cartesienne du plan et de l'espace** (droites, coniques, plans, quadriques).
4. **Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable** (graphes, dérivées, points critiques, extrema, Taylor, primitives).
5. **Équations différentielles du 1er ordre**.

Chapitre 1
Fonctions de plusieures variables

Dans ce chapitre:

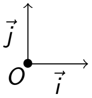
1. Coordonnées cartesiennes, polaires, cylindriques et sphériques
2. Ensembles ouverts, fermés, bornés et compacts
3. Fonctions de deux ou trois variables
4. Graphes et lignes de niveau
5. Opérations, composition et changements de coordonnées

1. Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques

Dans cette section:

- Coordonnées cartesiennes et polaires du plan
- Coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques de l'espace

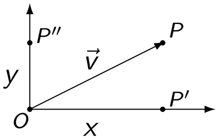
Coordonnées cartesiennes du plan

On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère  du plan.

Définition – Soit P un point du plan.

• Le **coordonnées cartesiennes** de P sont le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Autrement dit, $x = \|\overrightarrow{OP'}\|$ et $y = \|\overrightarrow{OP''}\|$ sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

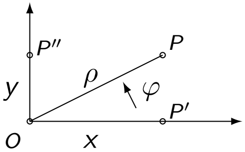


Coordonnées polaires

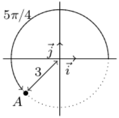
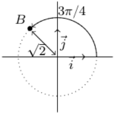
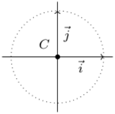
- Les **coordonnées polaires** de $P \neq O$ sont le couple $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ tel que $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$

On a donc

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi \;\; \text{t.q. } \tan \varphi = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ ou } \cot \varphi = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \\ \qquad \left(\text{par ex.} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{si } x, y > 0\right) \end{cases}$$

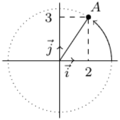


Exemples : coord. polaires $\longrightarrow$ cartesiennes

Coordonnées polaires $\longrightarrow$	**dessin** +	**calculs avec formules** $\longrightarrow$	**coordonnées cartesiennes**
$A \left\{ \begin{array}{l} \rho = 3 \\ \varphi = 5\pi/4 \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} x = 3\cos(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 3\sin(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$	$A = (-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$
$B \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\cos(3\pi/4) = \frac{-\sqrt{2}^2}{2} \\ y = \sqrt{2}\sin(3\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}^2}{2} \end{array} \right.$	$B = (-1, 1)$
$C \left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \\ \varphi = 3\pi/2 \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} x = 0\ \cos(3\pi/2) = 0 \\ y = 0\ \sin(3\pi/2) = 0 \end{array} \right.$	$C = (0, 0)$

Exemples : coord. cartesiennes $\longrightarrow$ polaires

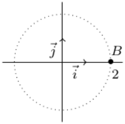
Coordonnées cartesiennes $\longrightarrow$ **dessin** $+$ **calculs avec formules** $\longrightarrow$ **coordonnées polaires**



$A = (2, 3)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ \tan\varphi = \frac{3}{2} \end{cases}$$

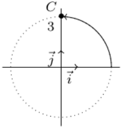
$$A \begin{cases} \rho = \sqrt{13} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$



$B = (2, 0)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{4+0} = 2 \\ \tan\varphi = \frac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \rho = 2 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

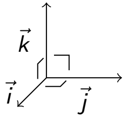


$C = (0, 3)$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{0+9} = 3 \\ \cos\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\varphi = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$$

Coordonnées cartesiennes de l'espace

On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère 

de l'espace.

Définition – Soit P un point de l'espace.

• Les **coordonnées cartesiennes** de P sont le triplet

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad \vec{v} = \overrightarrow{OP} \;=\; x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \;\equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $x = \|\overrightarrow{OP'}\|$, $y = \|\overrightarrow{OP}''\|$ et $z = \|\overrightarrow{OP}'''\|$ sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

Coordonnées cylindriques

- Les **coordonnées cylindriques** de $P \neq O$ sont le triplet $(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi = \dfrac{y}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ z = z \end{cases}$$

Coordonnées sphériques

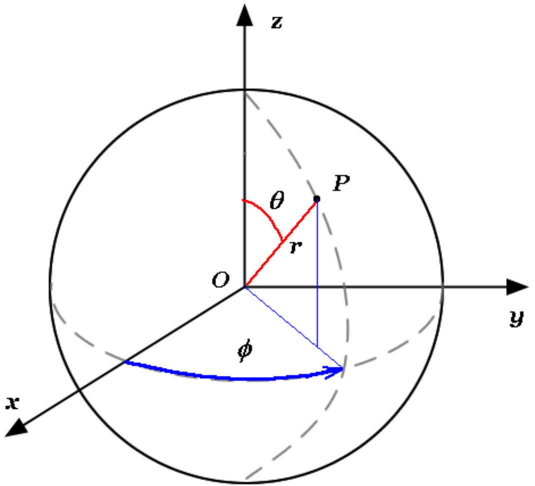
• Les **coordonnées sphériques** de $P \neq O$ sont le triplet $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times]0, \pi[$ tel que

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi \sin\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

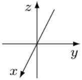
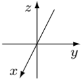
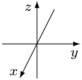
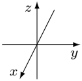
Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\begin{cases} r = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ \theta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

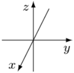
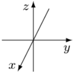
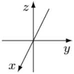
Coordonnées de l'espace



Exemples : coord. cylindriques ou sphériques $\longrightarrow$ cartesiennes

Coordonnées cylindriques ou sphériques	$\longrightarrow$ **dessin**	+ **calculs avec formules**	$\longrightarrow$ **coordonnées cartesiennes**
$A \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/3 \\ z = 2 \end{cases}$		$\begin{cases} x = 3\cos(\pi/3) = -\frac{3}{2} \\ y = 3\sin(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 \end{cases}$	$A = (-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 2)$
$B \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/4 \\ z = -3 \end{cases}$		$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ y = \sqrt{2}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ z = -3 \end{cases}$	$B = (1, 1, -3)$
$C \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/2 \\ \theta = 3\pi/4 \end{cases}$		$\begin{cases} x = \sqrt{2}\ \cos(\pi/2)\ \sin(\pi/4) = 0 \\ y = \sqrt{2}\ \sin(\pi/2)\ \sin(\pi/4) = 1 \\ z = \sqrt{2}\ \cos(3\pi/4) = -1 \end{cases}$	$C = (0, 1, -1)$
$D \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \pi/3 \\ \theta = \pi/6 \end{cases}$		$\begin{cases} x = \cos(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{1}{4} \\ y = \sin(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ z = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	$D = (\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

Exemples : coord. cartesiennes $\longrightarrow$ cylindriques et sphériques

Coordonnées cartesiennes	$\longrightarrow$	**dessin**	$+$	**calculs avec formules**	$\longrightarrow$	**coordonnées cylindriques**	$+$	**coordonnées sphériques**
$A = (-1,1,1)$				$\begin{cases} \rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \tan\varphi = -1 \\ r = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$		$A \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \\ z = 1 \end{cases}$		$A \begin{cases} r = \sqrt{3} \\ \varphi = 3\pi/4 \\ \theta = \pi/6 \end{cases}$
$B = (3,0,0)$				$\begin{cases} \rho = \sqrt{9+0} = 3 \\ \tan\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ r = \sqrt{9+0+0} = 3 \\ \cos\theta = \frac{0}{3} = 0 \end{cases}$		$B \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = 0 \\ z = 0 \end{cases}$		$B \begin{cases} r = 3 \\ \varphi = 0 \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$
$C = (0,1,1)$				$\begin{cases} \rho = \sqrt{0+1} = 1 \\ \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = 1 \\ r = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$		$C \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \pi/2 \\ z = 1 \end{cases}$		$C \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/2 \\ \theta = \pi/4 \end{cases}$

Notations des points

Conclusion –

- Un point <u>géométrique</u> du plan ou de l'espace est noté P.

- Un point <u>en coordonnées</u> dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est noté $\vec{x}$.

Cela signifie donc (x, y), (ρ, φ), (x, y, z), (ρ, φ, z) ou (r, φ, θ) selon le contexte.

Dans la suite $\mathbb{R}^n$ est l'un des trois espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

2. Ensembles ouverts, fermés, bornés, compacts

Dans cette section :

- Intervalles, disques, boules
- Bord d'un ensemble
- Ensembles ouverts et fermés
- Ensembles bornés et compacts

Intervalles

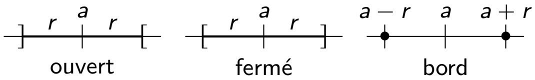
Définitions –

- Dans $\mathbb{R}$, on appelle

intervalle ouvert $I_a(r) =]a-r, a+r[$

intervalle fermé $\bar{I}_a(r) = [a-r, a+r]$

bord de l'intervalle $\partial I_a(r) = \{a-r, a+r\}$



Disques

- Dans $\mathbb{R}^2$, on appelle

disque ouvert

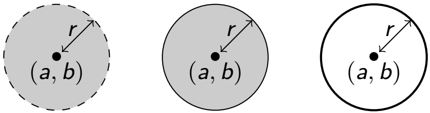
$$D_{(a,b)}(r) = \big\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\big\}$$

disque fermé

$$\overline{D}_{(a,b)}(r) = \big\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2\big\}$$

bord du disque

$$\partial D_{(a,b)}(r) = \big\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\big\} \text{ (un cercle)}$$



ouvert fermé bord

Boules

- Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle

boule ouverte

$$B_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2\}$$

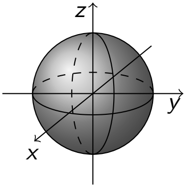
boule fermée

$$\overline{B}_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2\}$$

bord de la boule

$$\partial B_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}$$

(une sphère)



Bord d'un ensemble

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

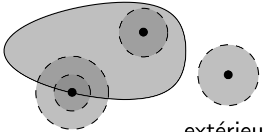
• Un point P est un **point intérieur** à D, s'il existe une boule ouverte B_P contenue dans D.

• Un point P est un **point extérieur** à D il existe une boule ouverte B_P qui n'intersecte pas D.

• Un point $P \in \mathbb{R}^n$ est un **point du bord** de D si toute boule ouverte B_P centrée en P contient à la fois des points de D et de son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash D$.

• Le **bord** de D est l'ensemble des points du bord, noté ∂D.

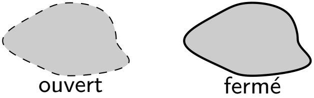
ATTENTION – Un point de ∂D peut être dans D ou non!



Ensembles ouverts et fermés

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

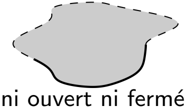
- D est **ouvert** s'il ne contient aucun de ses points de bord.
- D est **fermé** s'il contient tous ses points de bord.



Propriété – *Le complémentaire d'un ouvert est fermé, le complémentaire d'un fermé est ouvert.*

- Par convention, l'**ensemble vide** $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$.

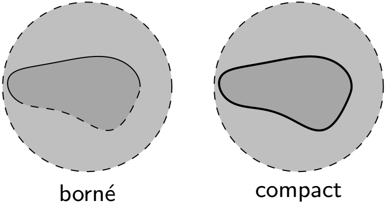
ATTENTION – Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés!



Ensembles bornés et compacts

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

- D est **borné** s'il existe un disque ouvert B qui le contient.
- D est **compact** s'il est fermé et borné.

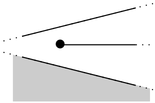


Exemples: fermés non bornés

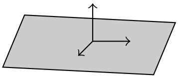
Exemples –

• Les droites, demi-droites et demi-plans sont fermés non bornés dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

De même, les plans sont fermés non bornés dans $\mathbb{R}^3$.



dans $\mathbb{R}^2$

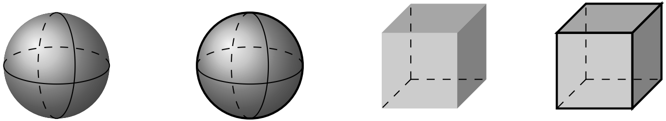


dans $\mathbb{R}^3$

Exemples: bornés ouverts et fermés

- Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ est ouverte et bornée.

Toute boule fermée est compacte, ainsi que l'intérieur d'un carré avec son bord (dans $\mathbb{R}^2$) et l'intérieur d'un cube avec son bord (dans $\mathbb{R}^3$).

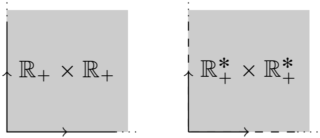


boule ouverte | boule fermée | cube ouvert | cube fermé

Exemples: non bornés ouverts et fermés

- Dans le plan $\mathbb{R}^2$, le quadrant $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est fermé non borné.

Le même quadrant sans bord, $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est ouvert non borné.



Exercice

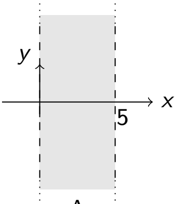
Énoncé – *Dessiner les sous-ensembles suivants de* $\mathbb{R}^2$ *et dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés ou compacts :*

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 5\Big\}$$

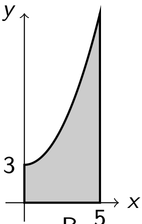
$$B = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 3\Big\}$$

$$C = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x < 5,\ 0 \leqslant y < x^2 + 3\Big\}$$

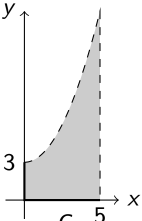
Réponse –



A
ouvert non borné



B
compact



C
borné
ni ouvert ni fermé

Fin du 1er cours !

3. Fonctions de deux ou trois variables

Dans cette section:

- Fonctions réelles et vectorielles de plusieurs variables
- Domaine et image

Fonctions réelles et vectorielles

Définition – Une **fonction de plusieurs variables** est une loi

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

qui associe à un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ au plus une valeur $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$.

- Pour ce cours, $n = 2$ ou 3 et $m = 1$, 2 ou 3.
- Si $m = 1$, la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **réelle**.
- Si $m > 1$, la fonction f est dite **vectorielle**.

Exemples de fonctions de plusieures variables

- **Fonctions réelles**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 + \sin(xy) + 1$

Pression $=$ f(Volume, Temperature)

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^3 z + xyz + \ln(z^2 + 1)$

- **Fonctions vectorielles**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ (x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2, x + y, y^3)$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (x^2 + z, xz + y)$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (\rho, \varphi) \mapsto h(\rho, \varphi) = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)$

Attention aux fonctions vectorielles et linéaires !

ATTENTION – Une fonction vectorielle n'est pas linéaire en général !

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est <u>linéaire</u> si et seulement si, en coordonnée cartesiennes, ses composantes sont des <u>polynômes de degré 1 sans termes constants</u>.

Par exemple:

- $f(x, y, z) = \big(2z - x, 0, 3y + 5x - z\big)$ est linéaire
- $g(x, y, z) = \big(xz + 5, 3, \sin(y)\big)$ n'est pas linéaire,

  car contient un polynôme de degré 2 (xz),
  deux termes constants non nuls (5 et 3)
  et une fonction non-polynomiale ($\sin(y)$).

Domaine et image

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

• Le **domaine (de définition)** de f est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels f est bien définie:

$$D_f = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{il existe } f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

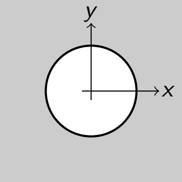
• L'**image** de f est l'ensemble des valeurs de f :

$$I_f = f(D_f) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{il existe } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \vec{y} = f(\vec{x}) \right\}$$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$

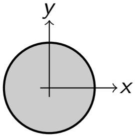
$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geqslant 1\right\}$$
$= $ complémentaire du disque $D_O(1)$
(fermé non borné)



$$I_f = [0,+\infty[= \mathbb{R}_+$$

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$$
$=$ disque fermé $\overline{D}_O(1)$ (compact)



$$I_f = [0,1]$$

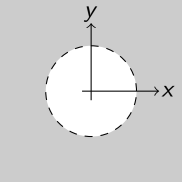
car $\quad x^2+y^2 \geqslant 0 \iff 0 \leqslant 1-x^2-y^2 \leqslant 1$
$$\iff 0 \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} = f(x,y) \leqslant 1$$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\right\}$$
$= \text{complémentaire du disque } \overline{D}_O(1)$
(ouvert non borné)

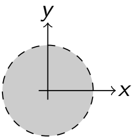
$$I_f = \mathbb{R}$$



- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\right\}$$
$= \text{disque ouvert } D_O(1)$
(ouvert borné)

$$I_f = \ln]0, 1] =]-\infty, 0] = \mathbb{R}^-$$



Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \left(\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{y^2}\right)$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, \ y \neq 0\}$
$=$ plan privé des deux axes de coordonnées (ouvert non borné)

$I_f = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^- = 4^{eme}$ quadrant privé de son bord

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},$
$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2 - z^2}, -\sqrt{y^2 + z^2}\right)$

$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 \geqslant 0\}$
$=$ cône délimité par les deux plans $z = \pm x$ (fermé non borné)

$I_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- = 4^{eme}$ quadrant

Exercices

Énoncé – *Dessiner le domaine de définition et l'image des fonctions suivantes et déterminer la nature du domaine (ouvert, fermé, borné, compact).*

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2}.$

Réponse :

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 1 > 0,\ x^2 + y^2 \neq 0\}$$
$$= \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} = \text{plan moins l'origine} \quad \text{(ouvert non borné)}$$

La condition $x^2 + y^2 + 1 > 0$ est vérifiée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et la condition $x^2 + y^2 \neq 0$ est vérifiée si $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$I_f = \mathbb{R}^*_+ =]\,0, +\infty\,[\quad \text{(ouvert non borné)}$$

car $x^2 + y^2 > 0$ implique $x^2 + y^2 + 1 > 1$ et par conséquent $\ln(x^2 + y^2 + 1) > 0$, et le quotient de deux nombres positifs est positif.

Exercices

• $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \mapsto g(x, y) = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{y^2}, \frac{\ln(y^2+1)}{x^2} \right)$$

Réponse :

$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 1 > 0,\ y \neq 0,\ y^2 + 1 > 0,\ x \neq 0\}$
$= \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* =$ plan privé des deux axes de coordonnées
(ouvert non borné).

En effet, les conditions $x^2 + 1 > 0$ et $y^2 + 1 > 0$ sont vérifiées pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$I_g = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+ = 1^{er}$ quadrant privé de son bord
(ouvert non borné)

Les conditions $x \neq 0$ et $y \neq 0$ impliquent $x^2 > 0$ et $y^2 > 0$, et par conséquent $\ln(x^2 + 1) > 0$ et $\ln(y^2 + 1) > 0$.

4. Graphes et lignes de niveau

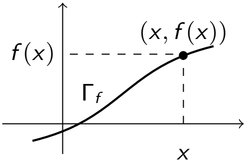
Dans cette section:

- Graphe des fonctions d'une variable (rappel)
- Graphe des fonctions de plusieures variables
- Lignes de niveau

Graphe des fonctions d'une variable

Rappel – Le **graphe de** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

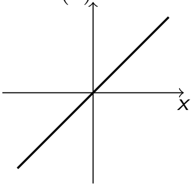
$$\Gamma_f = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f,\ y = f(x) \Big\} \subset \mathbb{R}^2.$$



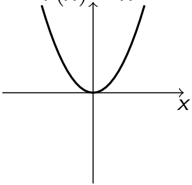
Le graphe des fonctions usuelles d'une variable est à connaître par cœur.

Graphes à connaître !

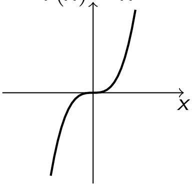
$f(x) = x$



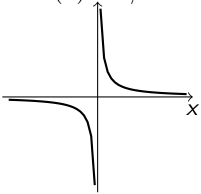
$f(x) = x^2$



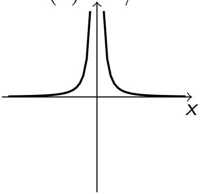
$f(x) = x^3$



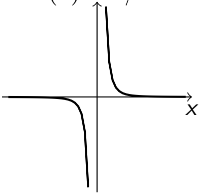
$f(x) = 1/x$



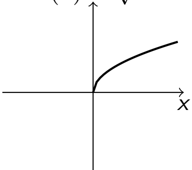
$f(x) = 1/x^2$



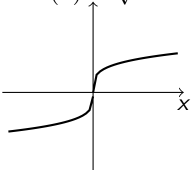
$f(x) = 1/x^3$



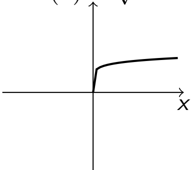
$f(x) = \sqrt{x}$



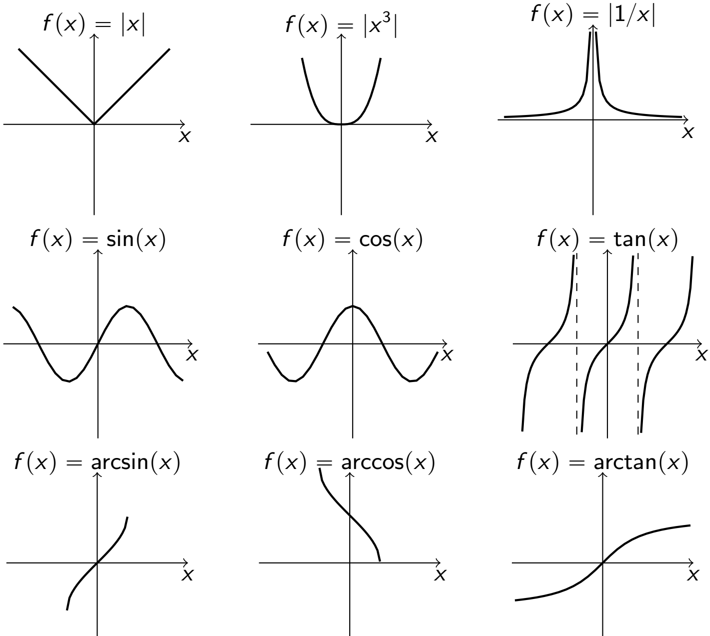
$f(x) = \sqrt[3]{x}$



$f(x) = \sqrt[4]{x}$

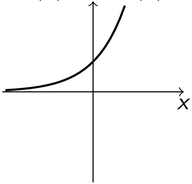


D'autres graphes à connaître !

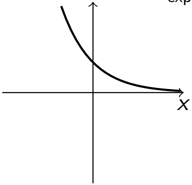


D'autres encore... ouf !

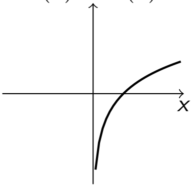
$f(x) = \exp(x)$



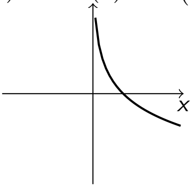
$f(x) = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$



$f(x) = \ln(x)$



$f(x) = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

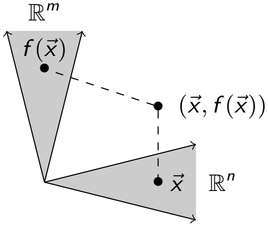


Graphe des fonctions de plusieures variables

Définition – Le **graphe de** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \vec{x} \in D_f,\ \vec{y} = f(\vec{x}) \ \Big\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

PROBLÈME – Ce graphe est difficile à dessiner si $n + m > 3$!

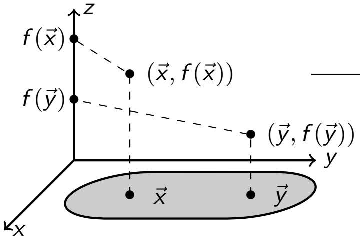


Regardons $n = 2$ et $m = 1$.

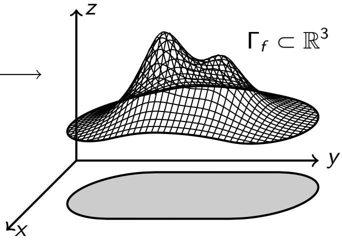
Graphe des fonctions réelle de deux variables

Le **graphe de** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f,\ z = f(x, y) \Big\} \subset \mathbb{R}^3.$$



$\longrightarrow$



Exemple: graphe d'une fonction de deux variables

Exemple –

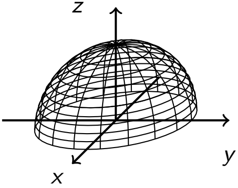
- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = z$

$$\Longrightarrow \quad D_f = \overline{D}_0(1) \quad \text{et} \quad I_f = [0,1]$$

Notons que

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2, \quad \text{c.-à-d.} \quad x^2+y^2+z^2 = 1, \quad \text{et} \quad z \geqslant 0.$$

Ainsi $\Gamma_f =$ demi-sphère



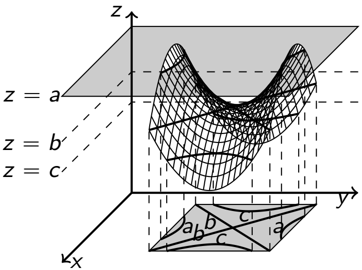
Lignes de niveau

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de domaine $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et d'image $I_f \subset \mathbb{R}$.

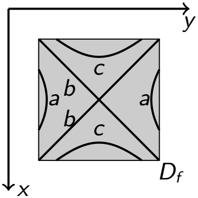
Définition – Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la **ligne de niveau** a est la projection sur D_f de $\Gamma_f \cap \{z = a\}$, c'est-à-dire

$$L_a(f) = \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = a\}.$$

À noter que $L_a(f) = \emptyset$ si $a \notin I_f$.



$\longrightarrow$



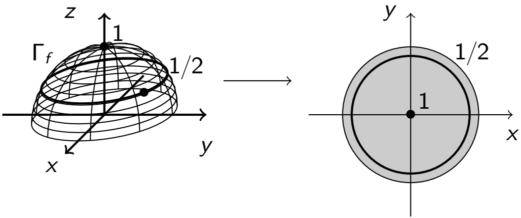
Exemple: lignes de niveau

Exemple –

- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = z, \quad D_f = \overline{D}_0(1),\ I_f = [0, 1]$

Pour tout $a \in [0, 1] = I_f$ on a

$$L_a(f) = \left\{ (x, y) \in \overline{B}_O(1) \mid \sqrt{1 - x^2 - y^2} = a \right\}$$
$$= \text{cercle centré en } (0, 0) \text{ de rayon } \sqrt{1 - a^2}$$



Exercice

Énoncé – *Trouver le domaine, l'image et la nature des lignes de niveau de la fonction*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Dessiner les lignes de niveau pour les valeurs $a = -2, -1, 0, 1, 2$. *En déduire le graphe de* f.

Réponse –

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\} = \mathbb{R}^2 \setminus$ la bissectrice du 2^{eme} quadrant

$I_f = \mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$L_a(f) = \left\{(x,y) \in D_f \mid \frac{x-y}{x+y} = a\right\}$$

$$= \text{droite d'équation} \quad (a-1)x + (a+1)y = 0$$

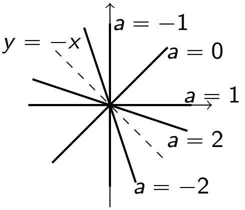
Exercice

$L_a(f)$ = droite d'équation $\quad (a-1)x + (a+1)y = 0$

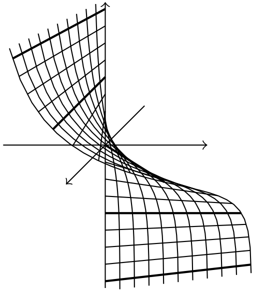
$$\begin{array}{llllll} a=0 & \Longrightarrow & y=x & & & \\ a=1 & \Longrightarrow & y=0 & a=-1 & \Longrightarrow & x=0 \\ a=2 & \Longrightarrow & y=-\frac{1}{3}x & a=-2 & \Longrightarrow & y=-3x \end{array}$$

$$\Gamma_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq x,\ z = \frac{x-y}{x+y}\right\}$$

$=$ union de droites tournantes (sans l'axe Oz)



$\longleftrightarrow$



5. Opérations, composition et changement de coordonnées

Dans cette section:

- Somme et produit de fonctions
- Composition de fonctions
- Changement de coordonnées

Somme et produit de fonctions

Définition – Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions suivantes:

somme: $\big(f+g\big)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g;$

zéro: $0(\vec{x}) = (0, ..., 0), \quad D_0 = \mathbb{R}^n;$

opposée de f: $\big(-f\big)(\vec{x}) = -f(\vec{x}), \quad D_{-f} = D_f;$

produit de f **par** λ: $\big(\lambda f\big)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}), \quad D_{\lambda f} = D_f.$

Si f et g sont des fonctions <u>réelles</u> ($m = 1$):

produit: $\big(fg\big) : (\vec{x}) = f(\vec{x}) g(\vec{x}), \quad D_{fg} = D_f \cap D_g;$

un: $1(\vec{x}) = 1, \quad D_1 = \mathbb{R}^n;$

inverse de f: $\left(\dfrac{1}{f}\right)(\vec{x}) = \dfrac{1}{f(\vec{x})}, \quad D_{1/f} = \Big\{\vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) \neq 0\Big\}.$

Exemples: somme et produit de fonctions

Exemple –

Si $\quad f(x,y) = x^2 - y^2, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 \quad$ et $\quad \lambda = 3,$
on a :

$$\left[\begin{array}{l} (f+g)(x,y) = 2x^2 \\[2ex] (3f)(x,y) = 3f(x,y) \\[2ex] (fg)(x,y) = x^4 - y^4 \\[2ex] \dfrac{1}{f}(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2} \quad \text{si } x \neq \pm y. \end{array}\right.$$

Propriétés des opérations

Proposition – *Les opérations d'addition, produit par scalaire et multiplication entre fonctions à plusieurs variables ont les mêmes proprietés que leurs analogues entre fonctions à une variable (elles sont commutatives, associatives et distributives).*

En particulier, *l'ensemble des fonctions à plusieurs variables $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ muni de l'addition et du produit scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie.*

Composition de fonctions

Définition – Données deux fonctions

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

on définit la **composée de f et g** comme la fonction

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

obtenue en calculant g sur les valeurs obtenues par f:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & (g \circ f)(\vec{x}) = g\Big(f(\vec{x})\Big) \end{array}$$

Le domaine de $g \circ f$ est l'ensemble

$$D_{g \circ f} = \Big\{ \vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) \in D_g \Big\}.$$

Cas particuliers de fonctions composées

Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto g(z)$

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \mapsto h(u,v) = \big(h_1(u,v), h_2(u,v)\big)$

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

les **composées** $\quad g \circ f, \quad f \circ h \quad$ et $\quad f \circ \gamma \quad$ sont

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \big(g \circ f\big)(x,y) = g(f(x,y)) \Leftrightarrow z = f(x,y)$$

$$f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \big(f \circ h\big)(u,v) = f(h(u,v)) \Leftrightarrow \begin{cases} x = h_1(u,v) \\ y = h_2(u,v) \end{cases}$$

$$f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \big(f \circ \gamma\big)(t) = f(\gamma(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \end{cases}$$

Exemple: fonctions composées

Exemple –

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 - y \\[2ex] g(z) = \exp z \\[2ex] h(u,v) = (2u, u+v) \\[2ex] \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \big(g \circ f\big)(x,y) = g(x^2 - y) = \exp(x^2 - y) \\[2ex] \big(f \circ h\big)(u,v) = f(2u, u+v) = 4u^2 - (u+v) \\[2ex] \big(f \circ \gamma\big)(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin t \end{array}\right.$$

Changement de variables

Un changement de variable s'écrit comme une composée !

Proposition – *Si* $\vec{y} = f(\vec{x})$ *est une fonction des variables* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, *son expression comme* *fonction de nouvelles variables* $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ *est donnée par la fonction composée*

$$\tilde{f} = f \circ h,$$

ou

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \; \vec{u} \mapsto h(\vec{u}) = (\vec{x})$$

est l'application qui décrit le changement de variables des $(x_1, \ldots, x_n)$ *vers les* $(u_1, \ldots, u_n)$.

Autrement dit, on a

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f\big(h(\vec{u})\big) = \tilde{f}(\vec{u}).$$

Changements en polaires, cylindriques, sphériques

- **Changement en coordonnées polaires:**

$$f(x,y) = f\big(h(\rho,\varphi)\big) = \tilde{f}(\rho,\varphi)$$

avec $h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

- **Changement en coordonnées cylindriques:**

$$f(x,y,z) = f\big(h(\rho,\varphi,z)\big) = \tilde{f}(\rho,\varphi,z)$$

avec $h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$h(\rho,\varphi,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$

- **Changement en coordonnées sphériques:**

$$f(x,y,z) = f\big(h(r,\varphi,\theta)\big) = \tilde{f}(r,\varphi,\theta)$$

avec $h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$h(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

Exemple: passage en coordonnées polaire

Exemple – On veut exprimer la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

en coordonnées polaires.

Pour cela il suffit de faire la composée $f \circ h$ où

$$h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

c'est-à-dire à remplacer x et y dans f par $\rho \cos \varphi$ et $\rho \sin \varphi$.

On obtient

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\rho, \varphi) &= f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \\ &= (\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 + 2\rho \cos \varphi \\ &= \rho^2 + 2\rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Exprimer la fonction*

$$f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, z^2\right)$$

en coordonnées cylindriques et sphériques.

Réponse – En coordonnées cylindriques :

$$\tilde{f}(\rho,\varphi,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = \left(\rho, z^2\right)$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\tilde{f}}(r,\varphi,\theta) & = & f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \\ & = & \left(r\ \sin\theta, r^2\cos^2\theta\right) \end{array} .$$

Chapitre 2
Dérivées, Taylor, extrema locaux

Dans ce chapitre:

1. Limites et continuité
2. Dérivées partielles
3. Dérivée directionelle
4. Gradient
5. Différentielle
6. Jacobienne
7. Resumé sur les dérivées
8. Règle de la chaîne
9. Hessienne
10. Taylor
11. Extrema locaux

1. Limites et continuité

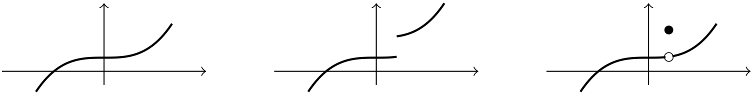
Dans cette section:

- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Limites de fonctions
- Fonctions continues

Rappels sur les fonctions d'une variable

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, avec domaine D_f, on dit que:

- la **limite de f en un point** $a \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ à laquelle tend $f(x)$ quand x s'approche de a;
- f **est continue** en un point $a \in D_f$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



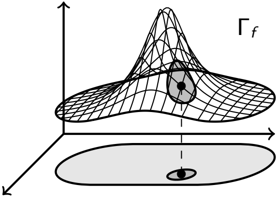
continue $\qquad \lim\limits_{gauche} \neq \lim\limits_{droite} \qquad \lim\limits_{gauche} = \lim\limits_{droite} \neq f(a)$

Limites des fonctions

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieurs variables, de domaine D_f.

• La **limite de f en un point** $\vec{a} \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur à laquelle tend $f(\vec{x})$ quand $\vec{x}$ s'approche de $\vec{a}$ par tous les chemins contenus dans D_f. On la note

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}).$$



ATTENTION – La limite peut ne pas exister, mais si elle existe elle est unique.

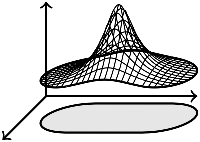
Fonctions continues

• La fonction f est **continue en** $\vec{a} \in D_f$ si

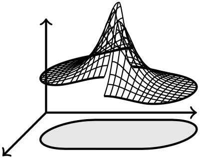
$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}).$$

• La fonction f est **continue sur le sous-ensemble** $D \subset D_f$ si f est continue en tout point de D.

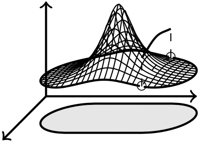
Le graphe d'une fonction continue n'a pas de "sauts" !



continue



non continue



non continue

Quelles fonctions sont-elles continues ?

Théorèmes – *Toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues comme somme, produit ou composée de fonctions continues sont continues.*

Quelques fonctions continues –

- Les fonctions polynomiales de plusieurs variables sont continues sur $\mathbb{R}^n$.
- Toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues par composition ou combinaisons de fonctions à une variable qui sont continues.
- Ainsi: les fractions rationnelles, les racines, les exponentielles et les logarithmes, les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques sont continues sur leur domaine de définition.

2. Dérivées partielles

Dans cette section:

- Rappels sur les fonctions d'une variable
- dérivées partielles
- fonctions (continûment) différentiables

Rappels sur les fonctions d'une variable

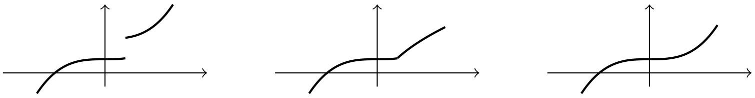
Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, la **dérivée** de f en $x \in D_f$ est la limite

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si elle existe et est finie. Dans ce cas, f est **dérivable en** x. La fonction f est **dérivable sur** $D \subset D_f$ si elle est dérivable en tout point $x \in D$.

Propriété – *Une fonction dérivable est continue.*

Le contraire est faux:



non continue　　continue, non dérivable　　dérivable

Dérivées partielles

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

- Les **dérivées partielles de** f **en** $\vec{x} \in D_f$ sont les limites

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f\big(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n\big) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

pour $i = 1, \dots, n$ (si ces limites existent).

- Les **dérivées partielles de** f sont les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \ \vec{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

définies sur l'ensemble de points $\vec{x}$ oû les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ existent.

Fonctions (continûment) différentiables

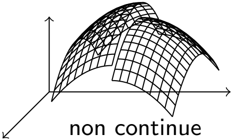
• La fonction f est **(continûment) différentiable sur** $D \subset D_f$, ou **de classe** C^1 **sur** D, si toutes les dérivées partielles

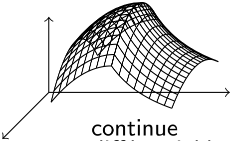
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

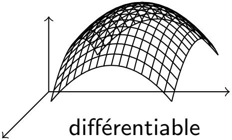
existent et sont des fonctions continues en tout point $\vec{x} \in D$.

Propriété – *Une fonction différentiable est continue.*

Le contraire est faux: le graphe d'une fonction différentiable n'a pas de "sauts" et en plus ne change pas son allure "brusquement"!







Exemples de fonctions différentiables

Exemple 1 – La fonction $f(x,y) = xy^2 + 3x$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 – La fonction $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 + 3x \\ z^2 \end{pmatrix}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

sont continues sur $\mathbb{R}^3$.

Exemples de fonctions différentiables

Exemple 3 – La fonction $f(r,\varphi,\theta) = \varphi^2 + r\sin\theta$ est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi,\theta) = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) = 2\varphi$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta$$

sont continues.

3. Dérivées directionnelles

Dans cette section:

- Dérivées directionnelles
- Croissance et décroissance des fonctions réelles

Dérivées directionnelles

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$.

Définition – Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle **dérivée directionnelle de f dans la direction $\vec{v}$** la fonction

$$\begin{array}{rccl} \partial_{\vec{v}} f : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = v_1 \, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + \cdots + v_n \, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{array}$$

Nota –
Dérivées partielles = dérivées directionnelles dans la direction des vecteurs

$$\vec{e}_i = (0, ..., 1, ..., 0),$$

où 1 est en $i$ème position,

c'est-à-dire $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{\vec{e}_i} f$.

Exemples de dérivées directionnelles

Exemple 1 – La dérivée directionnelle de la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = xy^2 + 3x \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y)$ est la fonction

$$\begin{array}{rccl} \partial_{\vec{v}} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(x,y) = (y^2+3)\, X + 2xy\, Y \end{array}$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Exemples de dérivées directionnelles

Exemple 2 – La dérivée directionnelle de l'application

$$\begin{array}{rccc} f = (f_1, f_2) : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (xy^2 + 3x, yz^2) = \begin{pmatrix} xy^2 + 3x \\ yz^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y, Z)$ est la fonction

$$\partial_{\vec{v}} f = (\partial_{\vec{v}} f_1, \partial_{\vec{v}} f_2) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

qui vaut, en tout $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix} Z \\ &= \begin{pmatrix} (y^2 + 3)\ X + 2xy\ Y \\ z^2\ Y + 2yz\ Z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemples de dérivées directionnelles

Exemple 3 – La dérivée directionnelle de l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\varphi,\theta) & \longmapsto & \varphi^2 + r\sin\theta \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y, Z)$, au point $\vec{x} = (r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3$, est donnée par

$$\partial_{(X,Y,Z)} f(r,\varphi,\theta) = \sin\theta \; X + 2\varphi \; Y + r\cos\theta \; Z$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi,\theta) = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) = 2\varphi$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta$$

Croissance et décroissance des fonctions réelles

Théorème – *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $\vec{x} \in D$ et tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, on a:*

- *Si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) > 0$ alors f est croissante au point $\vec{x}$ dans la direction de $\vec{v}$.*
- *Si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) < 0$ alors f est décroissante au point $\vec{x}$ dans la direction de $\vec{v}$.*

De plus:

- forte croissance $\Longleftrightarrow$ grande dérivée positive
- forte décroissance $\Longleftrightarrow$ grande dérivée négative

Attention – On ne peut rien dire sur la croissance de f si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = 0$!

Exercice

Énoncé – La fonction $f(x,y) = xy^2 + 3x$ est-elle croissante ou décroissante au point $(3,1)$, dans les directions $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,-1)$ et $(1,-2)$?

Réponse – Pour tout vecteur $\vec{v} = (X,Y)$, on a

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = (y^2+3)\,X + 2xy\,Y$$

et donc

$$\partial_{\vec{v}} f(3,1) = 4\,X + 6\,Y$$

d'où

- $\partial_{(1,1)} f(3,1) = 10 \quad \Rightarrow \quad f$ croissante en direction $(1,1)$
- $\partial_{(1,2)} f(3,1) = 16 \quad \Rightarrow \quad f$ croissante en direction $(1,2)$
- $\partial_{(1,-1)} f(3,1) = -2 \quad \Rightarrow \quad f$ décroissante en dir. $(1,-1)$
- $\partial_{(1,-2)} f(3,1) = -8 \quad \Rightarrow f$ décroissante en dir. $(1,-2)$

Exercice

Énoncé (suite) – Parmi ces quatre directions, quelle est celle de plus forte croissance et celle de plus forte décroissance ?

Réponse – Pour comparer la croissance d'une fonction en différentes directions, il faut calculer les différentes dérivées directionnelles avec des vecteurs ayant tous la même longueur, par exemple 1.

Directions croissantes –

- $\|(1,1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} f(3,1) = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$
- $\|(1,2)\| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,2)} f(3,1) = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$

Or $\quad \frac{10}{\sqrt{2}} < \frac{16}{\sqrt{3}} \quad$ car $\quad (10\sqrt{3})^2 = 300 < (16\sqrt{2})^2 = 512.$

Ainsi, au point $(3,1)$, le fonction f croit plus rapidement dans la direction $(1,2)$.

Exercice

Directions décroissantes –

- $\|(1,-1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)} f(3,1) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}}$
- $\|(1,-2)\| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-2)} f(3,1) = -\dfrac{8}{\sqrt{3}}$

On a $\quad -\frac{2}{\sqrt{2}} > -\frac{8}{\sqrt{3}} \quad$ car ceci se vérifie ssi $\quad \frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{8}{\sqrt{3}}$,

ce qui est vrai car $\quad (2\sqrt{3})^2 = 12 < (8\sqrt{2})^2 = 128$.

Ainsi, au point $(3,1)$, le fonction f décroit plus rapidement dans la direction $(1,-2)$.

4. Gradient

Dans cette section:

- Gradient des fonctions réelles
- Interpretation géométrique du gradient

Gradient d'une fonction réelle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle différentiable sur $D \subset D_f$.

- Le **gradient de** f **en un point** $\vec{x} \in D$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\ \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

où le symbole $\vec{\nabla}$ se lit *nabla*.

- Le **gradient de** f est la fonction vectorielle

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \equiv \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a alors $\quad \partial_{\vec{v}} f = \langle \vec{\nabla} f, \vec{v} \rangle = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}$.

Exemples de gradient

Exemples –

- $f(x,y) = xy^2 + 3x \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 2xy \end{pmatrix}$

Par exemple: $\quad \vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad \vec{\nabla} f(3,2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- $f(x,y,z) = \sin(xy) + \ln(x^2+z^2) \quad \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\,\cos(xy) + \frac{2x}{x^2+z^2} \\ x\,\cos(xy) \\ \frac{2z}{x^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

Par exemple: $\quad \vec{\nabla} f(0,\pi,1) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Interprétation géométrique du gradient

Théorème – *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Pour tout $\vec{x} \in D$ on a alors:*

• *Le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(\vec{x})$ est orthogonal à la ligne de niveau $L_a(f)$ avec $a = f(\vec{x})$.*

• *Le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(\vec{x})$ indique la direction de la pente de plus forte croissante du graphe Γ_f en $\vec{x}$.*

Exemple: interpretation géométrique du gradient

Exemple – $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \Longrightarrow$

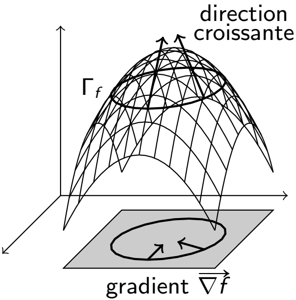
domaine $D_f = \overline{D}_O(1) =$ disque unitaire fermé

ligne de niveau $L_a(f) =$ cercle de rayon $\sqrt{1-a^2}$, où $a \in [0,1]$

f est différentiable sur $D = D_O(1) =$ disque unitaire ouvert, et

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}(x,y).$$

Pour tout $a \in]0,1[$, ce vecteur est orthogonal au cercle $L_a(f)$ au point (x,y) et est dirigé vers le centre du cercle.



5. Différentielle

Dans cette section:

- Différentielle des fonctions
- Différentielle des fonctions réelles: dx, dy et dz
- Différentielle des coordonnées cylindriques et sphériques: $d\rho$, $d\varphi$, dr et $d\theta$

Différentielle d'une fonction en un point

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition, pour tout $\vec{x} \in D$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \partial_\bullet f(x): & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{v} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\, v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\, v_n \end{array}$$

est linéaire dans la variable $\vec{v}$.

Définition – Cette application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ s'appelle **différentielle de f au point $\vec{x}$**.

Il est d'usage de la noter $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

En somme, pour tout $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; v_n = \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}).$$

Différentielle en un point: cas particuliers

Cas particuliers –

• Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, la différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit au moyen du gradient de f:

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad df_x(\vec{v}) = \langle \overrightarrow{\nabla} f(x), \vec{v} \rangle$$

• Si $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction d'une seule variable x, la différentielle $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vaut:

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad df_x(\vec{v}) = \Big(f_1'(x)\, v \ , \ldots , \ f_m'(x)\, v \Big)$$

Exemples de différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $df_x(X) = (2x - 5x^4)\, X.$

- $f(x, y) = x^2 y^3 - 7y \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y)}(X, Y) = 2xy^3 \; X + (3x^2y^2 - 7) \; Y.$$

Par exemple:

$$df_{(x,y)}(2, 1) = 4xy^3 + 3x^2y^2 - 7$$
$$df_{(1,1)}(X, Y) = 2X - 4Y$$
$$df_{(1,1)}(2, 1) = 0$$

Exemples de différentielles (suite)

- $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \end{array}$

$$df_{(x,y)}(X,Y) = X \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2\,X + 2xy\,Y \\ Y \\ 2x\,X - 2y\,Y \end{pmatrix}$$

- $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \end{array}$

$$\begin{aligned} df_{(x,y,z)}(X,Y,Z) &= X \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 2xy \\ z^3 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ 3yz^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2\,X + 2xy\,Y \\ z^3\,Y + 3yz^2\,Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Applications linéaires élementaires

Remarque –

- Les n applications linéaires (pour $i = 1, ..., n$)

$$dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ \vec{v} = (v_1, ..., v_n) \longmapsto dx_i(\vec{v}) = v_i$$

formant une *base* de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- Par conséquent, toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit comme *combinaison linéaire* des dx_i:

$$L = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{R}.$$

- Il n'y a pas n applications linéaires

$$''dx_i'' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{pour } i = 1, ..., n)$$

qui forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, parce que cet espace a dimension $n \times m$!

Différentielle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^n$. L'application

$$\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \vec{x} & \longmapsto & df_{\vec{x}} \end{array}$$

s'appelle **différentielle** de f et est notée df.

Corollaire – Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction <u>réelle</u>, alors:

- La différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\vec{x} \in D$ s'écrit

$$df_{\vec{x}} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; dx_n.$$

- La différentielle $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit

$$df \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\; dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\; dx_n.$$

Exemples: écriture usuelle des différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad df_x = (2x - 5x^4)\, dx.$

Par exemple: $df_1 = -3\, dx.$

- $f(x,y) = x^2y^3 - 7y \quad \Rightarrow \quad df_{(x,y)} = 2xy^3\, dx + (3x^2y^2 - 7)\, dy.$

Par exemple: $df_{(1,1)} = 2\, dx - 4\, dy.$

- $f(x,y,z) = x^2y^3z - 7yz^2 \quad \Rightarrow$

$$df_{(x,y,z)} = 2xy^3z\ dx + (3x^2y^2z - 7z^2)\ dy + (x^2y^3 - 14yz)\ dz$$

Par exemple: $df_{(1,1,1)} = 2\ dx - 4\ dy - 13\ dz$

Exercice

Énoncé – *Pour la fonction* $f(x,y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$*:*

1) *Déterminer l'ensemble* D *où* f *est différentiable.*
2) *Déterminer la différentielle en tout point* $(x,y) \in D$*.*
3) *Calculer* $df_{(2,0)}$ *en les vecteurs* $\vec{\imath} = (1,0)$*,* $\vec{\jmath} = (0,1)$*,* $\vec{v} = (1,1)$ *et* $\vec{u} = (3,-3)$*.*

Réponse –

1) $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \dfrac{1}{5}x^2 - \dfrac{1}{5} \right\}$

portion du plan au-dessus de la parabole d'éq.

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$$

Exercice (suite)

2) Pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned} df_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\ dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\ dy \\ &= \frac{-2x}{1 - x^2 + 5y}\ dx + \frac{5}{1 - x^2 + 5y}\ dy \end{aligned}$$

3) Ainsi

$$df_{(2,0)} = \frac{-4}{1-4}\ dx + \frac{5}{1-4}\ dy = \frac{4}{3}\ dx - \frac{5}{3}\ dy$$

et

$$\begin{aligned} df_{(2,0)}(\vec{\imath}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = \frac{4}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{\jmath}) &= \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = -\frac{5}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{v}) &= df_{(2,0)}(1, 1) = \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{u}) &= df_{(2,0)}(3, -3) = \frac{4}{3}\ 3 - \frac{5}{3}(-3) = 4 + 5 = 9 \end{aligned}$$

Exercice : dx, dy, dz, $d\rho$, $d\varphi$, dr et $d\theta$

Énoncé – *On note* (x, y, z), (ρ, φ, z) *et* (r, φ, θ) *les coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques des points de* $\mathbb{R}^3$. *On rappelle que*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array}$$

et

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{array}$$

Exercice (suite)

Montrer que

$$i)\ \begin{cases} dx = \cos\varphi \; d\rho - \rho \sin\varphi \; d\varphi \\[2ex] dy = \sin\varphi \; d\rho + \rho\cos\varphi \; d\varphi \\[2ex] dz = dz \end{cases}$$

$$i')\ \begin{cases} d\rho = \cos\varphi \; dx + \sin\varphi \; dy \\[2ex] \rho d\varphi = -\sin\varphi \; dx + \cos\varphi \; dy \\[2ex] dz = dz \end{cases}$$

Formules de passage *cartésiennes* $\longleftrightarrow$ *cylindriques*

Exercice (suite)

$$ii) \begin{cases} dx = \cos\varphi\ \sin\theta\ dr - r\sin\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\ d\theta \\ dy = \sin\varphi\ \sin\theta\ dr + r\cos\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\sin\varphi\ \cos\theta\ d\theta \\ dz = \cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \end{cases}$$

$$ii') \begin{cases} dr = \cos\varphi\ \sin\theta\ dx + \sin\varphi\ \sin\theta\ dy + \cos\theta\ dz \\ r\sin\theta\ d\varphi = -\sin\varphi\ dx + \cos\varphi\ dy \\ rd\theta = \cos\varphi\ \cos\theta\ dx + \sin\varphi\ \cos\theta\ dy + \sin\theta\ dz \end{cases}$$

Formules de passage *cartésiennes* $\longleftrightarrow$ *sphériques*

Exercice (suite)

$$(iii) \begin{cases} dr = \sin\theta \ d\rho + \cos\theta \ dz \\ d\varphi = d\varphi \\ r d\theta = \cos\theta \ d\rho - \sin\theta \ dz \end{cases}$$

$$(iii') \begin{cases} d\rho = \sin\theta \ dr + \cos\theta \ d\theta \\ d\varphi = d\varphi \\ dz = r\cos\theta \ dr - r\sin\theta \ d\theta \end{cases}$$

Formules de passage *cylindriques* $\longleftrightarrow$ *sphériques*

Exercice (suite et fin)

Réponse – Il suffit d'écrire les différentielles des applications de changement de variables. Par exemple la différentielle du changement de variables *cylindriques* → *cartésiennes* donne les formules i):

$$\begin{aligned}
dx &= \tfrac{\partial x}{\partial \rho}\ d\rho + \tfrac{\partial x}{\partial \varphi}\ d\varphi + \tfrac{\partial x}{\partial z}\ dz \\
&= \cos\varphi\ d\rho - \rho \sin\varphi\ d\varphi \\
dy &= \tfrac{\partial y}{\partial \rho}\ d\rho + \tfrac{\partial y}{\partial \varphi}\ d\varphi + \tfrac{\partial y}{\partial z}\ dz \\
&= \sin\varphi\ d\rho + \cos\varphi\ d\varphi \\
dz &= \tfrac{\partial z}{\partial \rho}\ d\rho + \tfrac{\partial z}{\partial \varphi}\ d\varphi + \tfrac{\partial z}{\partial z}\ dz \\
&= dz
\end{aligned}$$

Les formules i') s'obtiennent en inversant le système. On procède similairement pour les autres formules.

6. Jacobienne

Dans cette section:

- Rappel sur les applications linéaires et les matrices
- Matrice Jacobienne et déterminant Jacobien
- Jacobien des changements de variables

Rappels sur les applications linéaires et les matrices

Rappel – Toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se represente come une matrice $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ (avec m lignes et n colonnes) telle que, pour tout $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
L(\vec{v}) &= A\ \vec{v} \quad \text{(produit matrice par vecteur)} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}\ v_1 + \cdots + a_{1n}\ v_n \\ \vdots \\ a_{m1}\ v_1 + \cdots + a_{mn}\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m
\end{aligned}$$

Matrice jacobienne

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction diff. sur D.

• La **matrice Jacobienne de** f est la matrice $J_f \in \mathcal{M}_{mn}$ associée à df, c'est à dire telle que

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) = J_f(\vec{x})\ \vec{v}, \quad \text{pour tout } \vec{x} \in D \text{ et tout } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $(f_1, ..., f_m)$ sont les composantes de f, on a alors

$$J_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}).$$

• Si la matrice Jacobienne est carrée $(n = m)$, son détérminant $\mathrm{Jac}\, f = \det J_f$ s'appelle **Jacobien de** f.

Matrice jacobienne: cas particuliers

Cas particuliers –

- Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on a

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R}) \quad \text{(matrice ligne)}$$

- Si $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (u, v) \mapsto h(u, v) = \big(h_1(u, v), h_2(u, v)\big)$, on a

$$J_h(u, v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(u, v) = \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v}$$

Matrice jacobienne: cas particuliers

Cas particuliers –

- Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \ t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, on a

$$J_g(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t) \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$$ (matrice colonne $=$ vecteur)

- Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ z \mapsto g(z)$, on a

$$J_g(z) = \Big(g'(z) \Big) \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, g(z) = g'(z) \in \mathbb{R}$$

Exemples : matrices Jacobiennes

Exemples –

- $f(x,y) = x^2y \quad \Rightarrow \quad J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}$

- $h(u,v) = (u^2v, 3u) \quad \Rightarrow$

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22} \quad \text{et} \quad \mathrm{Jac}\, h(u,v) = -3u^2$$

- $\gamma(t) = (2t, t^3+1) \quad \Rightarrow \quad J_\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}$

Exemples: Jacobien des changements de variables

- **Polaires :** $h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$

$$J_h(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho, \varphi) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

- **Cylindriques :** $h(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$

$$J_h(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho, \varphi, z) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

Exemples: Jacobien des changements de variables

- **Sphériques :** $h(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

$$J_h(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}\, h &= \cos\theta\Big(- r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\Big) \\ &\qquad -r\sin\theta\Big(r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\Big) \\ &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta \\ &= -r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – Calculer le gradient, la différentielle et la matrice jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y,z) = z \sin(xy).$$

Réponse – On a

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) \\ xz \cos(xy) \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$df_{(x,y,z)} = yz \cos(xy)\ dx + xz \cos(xy)\ dy + \sin(xy)\ dz$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) & xz \cos(xy) & \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Exercice

Énoncé – Calculer la différentielle et la matrice Jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \sin x \\ z \sin y \end{pmatrix}.$$

Réponse – On a

$$df_{(x,y,z)}(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} z \cos x \\ 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ z \cos y \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \end{pmatrix} Z$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & z \cos y & \sin y \end{pmatrix}$$

7. Resumé sur les dérivées

Dans cette section:

- Resumé sur les dérivées des fonctions réelles
- Resumé sur les dérivées des fonctions vectorielles

Resumé: dérivées des fonctions réelles

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction <u>réelle</u> diff. sur $D \subset \mathbb{R}^n$:

- **dérivées partielles** = fonctions réelles
  $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}}$$
- **dérivées directionelles** = fonctions réelles
  $$\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}}$$
  $$\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$
- **gradient** = fonction vectorielle
  $$\boxed{\vec{\nabla} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n} \qquad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$
- **différentielle** = fonction à valeur applications linéaires
  $$\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$$
  $$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$
- **Jacobienne** = fonction à valeur matrices ligne
  $$\boxed{J_f : D \longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})}$$
  $$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Resumé: dérivées des fonctions vectorielles

Si $f=(f_1,\dots,f_m):\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ est fonction <u>vectorielle</u> diff. sur D:

- **dérivées partielles** $=$ fonctions vectorielles

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}:D\longrightarrow\mathbb{R}^m}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)$$

- **dérivées directionelles** $=$ fonctions vectorielles

$$\boxed{\partial_{\vec v}f:D\longrightarrow\mathbb{R}^m}$$
$$\partial_{\vec v}f=v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

- **gradient** "$\vec{\nabla}f$" n'est pas défini

- **différentielle** $=$ fonction à valeur applications linéaires

$$\boxed{df:D\longrightarrow\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}$$
mais les "dx_i" n'existent pas

- **Jacobienne** $=$ fonction à valeur dans les matrices

$$\boxed{J_f:D\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})}$$
$$J_f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

8. Règle de la chaîne

Dans cette section:

- Dérivées de la somme et du produit de fonctions
- Dérivées de la composée de fonctions
- Transformation des dérivées partielles: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \rho}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$

Dérivées de la somme de fonctions et du produit par scalaire

Proposition – *Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont différentiables, on a :*

- $$\boxed{\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \dots, n}$$

Par conséquent $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$ *(si $m=1$),*

$$d(f+g) = df + dg, \quad J_{f+g} = J_f + J_g$$

- $$\boxed{\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \dots, n} \qquad \textit{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Par conséquent $\vec{\nabla}(\lambda f) = \lambda \vec{\nabla}f$ *(si $m=1$),*

$$d(\lambda f) = \lambda\, df, \qquad J_{\lambda f} = \lambda J_f$$

Dérivées du produit de fonctions

Proposition – *Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions <u>réelles</u> différentiables, on a la* **règle de Leibniz***:*

- $$\boxed{\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, g + f\, \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \dots, n}$$

Par conséquent $\quad \vec{\nabla}(fg) = \big(\vec{\nabla} f\big) g + f \big(\vec{\nabla} g\big),$

$$d(fg) = \big(df\big) g + f \big(dg\big),$$

$$J_{fg} = \big(J_f\big) g + f \big(J_g\big)$$

Exemple : règle de Leibniz

Exemple – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy^2\ e^{xy}$. Le calcul de la différentielle de f peut se faire directement au moyen de la formule

$$d\Big(xy^2\ e^{xy}\Big) = \frac{\partial\big(xy^2\ e^{xy}\big)}{\partial x}\ dx + \frac{\partial\big(xy^2\ e^{xy}\big)}{\partial y}\ dy$$

ou en passant par la règle de Leibniz

$$\begin{aligned} d\Big(xy^2\ e^{xy}\Big) &= d\big(xy^2\big)\ e^{xy} + xy^2\ d\big(e^{xy}\big) \\ &= \big(y^2\ dx + 2xy\ dy\big)\ e^{xy} \\ &\qquad + xy^2\ \big(y\ e^{xy}\ dx + x\ e^{xy}\ dy\big) \\ &= \big(y^2 + xy^3\big)\ e^{xy}\ dx + \big(2xy + x^2y^2\big)\ e^{xy}\ dy \end{aligned}$$

Dérivées des fonctions composées

Proposition – *Pour deux fonctions*

$$f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \textit{différentiable en } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$
$$g = (g_1, ..., g_p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \quad \textit{différentiable en } \vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$$

la composée $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $\vec{x}$ et on a la **règle de la chaîne** *:*

- $$\boxed{\frac{\partial \big(g \circ f\big)_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\big(f(\vec{x})\big)\,\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}\big(f(\vec{x})\big)\,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x})}$$

pour tout $i = 1, ..., n$ et tout $j = 1, ..., p$,.

Par conséquent, on a aussi :

$d\big(g \circ f\big)_{\vec{x}} = dg_{f(\vec{x})} \circ df_x$ *(composition d'applications linéaires)*

$J_{g \circ f}(\vec{x}) = J_g(f(\vec{x})) \cdot J_f(\vec{x})$ *(produit de matrices)*

Cas particuliers de fonctions composées

Règle de la chaîne : cas particuliers –

- Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto z = f(x,y)$

  $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z)$

on a

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x,y) = g'\big(f(x,y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x,y) = g'\big(f(x,y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}}$$

$$d\big(g\circ f\big)_{(x,y)} = g'\big(f(x,y)\big)\ df_{(x,y)}$$

$$J_{g\circ f}(x,y) = g'\big(f(x,y)\big)\ J_f(x,y)$$

Cas particuliers de fonctions composées

Règle de la chaîne : cas particuliers –

- Si $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto (x,y) = h(u,v)$

  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$

on a

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

$$d\big(f\circ h\big)_{(u,v)} = df_{h(u,v)} \circ dh_{(u,v)}$$

$$J_{f\circ h}(u,v) = J_f\big(h(u,v)\big)\ J_h(u,v)$$

Cas particuliers de fonctions composées

Règle de la chaîne : cas particuliers –

- Si $\quad \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \mapsto (x, y) = \gamma(t)$

  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \; (x, y) \mapsto f(x, y)$

on a

$$\boxed{\big(f \circ \gamma\big)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\; x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\; y'(t)}$$

$$d\big(f \circ \gamma\big)_t = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t$$

$$J_{f\circ\gamma}(t) = J_f\big(\gamma(t)\big)\; J_\gamma(t)$$

Exercice

Énoncé – *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

1) Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ pour $F(x,y) = \ln f(x,y)$.

Réponse – Si on pose $g(z) = \ln z$, on a $F = g \circ f$ et donc

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = g'(f(x,y))\, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{f(x,y)}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = g'(f(x,y))\, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2 - 2y}{f(x,y)}$$

Exercice (suite)

2) Calculer $\dfrac{\partial G}{\partial u}$ *et* $\dfrac{\partial G}{\partial v}$ *pour* $G(u,v) = f(v, uv^2)$.

Réponse – Si on pose $h(u,v) = (v, uv^2) = (x,y)$, c. à d. $x = v$ et $y = uv^2$, on a $G = f \circ h$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, uv^2)\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v, uv^2)\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\
&= 2v\, uv^2 \cdot 0 + (v^2 - 2uv^2) \cdot v^2 \\
&= (1-2u)v^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, uv^2)\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v, uv^2)\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\
&= 2v\, uv^2 \cdot 1 + (v^2 - 2uv^2) \cdot 2uv \\
&= 4uv^2(v-u)
\end{aligned}$$

Exercice (suite)

3) Calculer $H'(t)$ pour $H(t) = f(t^2, 3t)$.

Réponse – Si on pose $\gamma(t) = (t^2, 3t) = (x, y)$,
c. à d. $x = t^2$ et $y = 3t$, on a $H = f \circ \gamma$ et donc

$$\begin{aligned} H'(t) &= (f \circ \gamma)'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t)\ y'(t) \\ &= 2t^2\,3t \cdot 2t + (t^4 - 6t) \cdot 3 \\ &= 24t^4 - 18t \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction* $f(x, y) = xy^2$.

1) Calculer $\dfrac{\partial g(xy^2)}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial g(xy^2)}{\partial y}$, *où*
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction telle que* $g'(z) = \sqrt{z}$.

Réponse – On veut calculer les dérivées de $g \circ f$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(xy^2)}{\partial x} &= g'(xy^2)\ \frac{\partial (xy^2)}{\partial x} \\ &= \sqrt{xy^2}\ y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(xy^2)}{\partial y} &= g'(xy^2)\ \frac{\partial (xy^2)}{\partial y} \\ &= \sqrt{xy^2}\ (x^2 - 2xy)\end{aligned}$$

Exercice (suite)

2) Soit $(x, y) = h(u, v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ *un changement de variables dont on connait la matrice Jacobienne*

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix},$$

et soit $\tilde{f} = f \circ h$. *Calculer* $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v)$ *et* $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v)$.

Réponse – On applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u,v))\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= y(u,v)^2 \cdot 0 + 2x(u,v)y(u,v)\ v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u,v))\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ &= y(u,v)^2 \cdot 1 + 2x(u,v)y(u,v)\, 2uv \end{aligned}$$

Exercice (suite)

Réponse (suite)–

En alternative, on peut passer par les matrices Jacobiennes. Puisque

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned}
J_{\tilde{f}}(u,v) &= J_f(h(u,v)) \cdot J_h(u,v) \\
&= \begin{pmatrix} y(u,v)^2 & 2x(u,v)y(u,v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y^2 \cdot 0 + 2xy \cdot v^2 & \quad y^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 2uv \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2v^2\, x(u,v)y(u,v) & \quad y(u,v)^2 + 4uv\, x(u,v)y(u,v) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice (suite)

3) Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *une trajectoire dans* $\mathbb{R}^2$ *dépendante du paramètre* t*. Calculer la dérivée en* t *de la fonction* $t \mapsto f(x(t), y(t))$*.*

Réponse – On veut calculer la dérivée de la fonction $f \circ \gamma$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{d\, f(x(t), y(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t) \\ &= y(t)^2 \;\; x'(t) + 2\, x(t) y(t)) \;\; y'(t) \end{aligned}$$

Exercice : transformation des dérivées partielles

Énoncé – *Soient (x, y, z) les coordonnées cartesiennes des points de $\mathbb{R}^3$, (ρ, φ, z) les coordonnées cylindriques et (r, φ, θ) les coordonnées sphériques. On rappelle que*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right. \quad et \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array} \right. \quad et \quad \left\{ \begin{array}{l} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{array} \right.$$

Montrer que les derivées partielles $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ *et* $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$ *satisfont aux formules suivantes :*

Exercice (suite)

$$(i)\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \rho} = \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$(i')\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} - \sin\varphi\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\varphi\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Exercice (suite)

$$(i)\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \cos\varphi\ \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} = \cos\varphi\ \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$(ii')\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\varphi\cos\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\varphi\cos\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \end{cases}$$

Exercice (suite)

$$(iii)\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\ \dfrac{\partial}{\partial\theta} = \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} - \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$(iii')\ \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \rho} = \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \end{cases}$$

Exercice (suite)

Réponse – Montrons (i). Pour cela on applique la règle de la chaîne à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(\rho, \varphi, z)$ est le changement de variables des coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \rho} \\
&= \cos\varphi\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -r\sin\varphi\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

d'où suivent les formules (i). Les formules (i') en découlent par inversion du système.

Exercice (suite)

- Pour montrer les formules (ii), on applique cette méthode à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(r, \varphi, \theta)$ est le changement de variables des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial r} \\
&= \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial z} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -\rho \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= r \cos\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + r \sin\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} - r \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

- On inverse le système (ii) pour obtenir (ii').
- On combine les (i) à (ii') pour obtenir (iii) et (iii').

9. Hessienne

Dans cette section:

- Dérivées d'ordre supérieur
- Théorème de Schwarz
- Matrice Hessienne
- Laplacien, fonctions harmoniques

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont à leur tour différentiables, on peut calculer leurs dérivées partielles.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les **dérivées partielles d'ordre** k **de** f sont les fonctions qu'on obtient en dérivant f succéssivement k fois:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}.$$

• La fonction f est **de classe** C^k si ses dérivées d'ordre k existent et sont des fonctions continues. La fonction f est **lisse** ou **de classe** C^∞ si elle est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est fonction de (x, y), on a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Théorème de Schwarz

Théorème – *Si les dérivées secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *existent et sont continue en un point* $\vec{x}$, *pour tout* $i, j = 1, \dots, n$, *alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) \quad \textit{pour tout } i \neq j.$$

Corollaire – *Si* f *est une fonction de classe* C^k *(ou lisse), alors toutes ses dérivées mixtes jusqu'à l'ordre* k *(ou* ∞*), ayant le même nombre de dérivées en chaque* x_i*, coincident indépendement de l'ordre dans lequel elles sont calculées.*

Exemple : dérivées secondes

Exemple – $f(x,y) = x^3y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2y \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2y & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^3 \end{cases}$$

l'on constate que les dérivées partielles sont continues (donc f est de classe C^2) et que les dérivées mixtes sont identiques.

Exercice

Énoncé – *Soient $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et soit $c \in \mathbb{R}^*$. Montrer que le fonction $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$ est solution de l'***équation des ondes**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \textit{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Réponse – La fonction u est de classe C^2 car composée de fonctions C^2. On a

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= F'(x-ct)\, \tfrac{\partial (x-ct)}{\partial x} + G'(x+ct)\, \tfrac{\partial (x+ct)}{\partial x} \\ &= F'(x-ct) + G'(x+ct) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= F'(x-ct)\, \tfrac{\partial (x-ct)}{\partial t} + G'(x+ct)\, \tfrac{\partial (x+ct)}{\partial t} \\ &= -c\, F'(x-ct) + c\, G'(x+ct) \end{aligned}$$

Exercice (suite)

d'où

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= F''(x-ct)\ \tfrac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G''(x+ct)\ \tfrac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\
&= F''(x-ct) + G''(x+ct),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= -c\, F'(x-ct)\ \tfrac{\partial(x-ct)}{\partial t} + c\, G'(x+ct)\ \tfrac{\partial(x+ct)}{\partial t} \\
&= (-c)^2\, F''(x-ct) + c^2\, G''(x+ct).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

Matrice Hessienne

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 en $\vec{x}$.

• La **matrice Hessienne** de f en $\vec{x}$ est la matrice carrée de taille n contenant toutes les dérivées secondes de f en $\vec{x}$:

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique par le théorème de Schwarz.

• Son déterminant $\mathrm{Hess}\, f(\vec{x}) = \det H_f(\vec{x})$ s'appelle le **Hessien** de f.

Exemple: matrice Hessienne

Exemple –

Pour $\quad g(x,y,z) = x \sin y + y \sin z, \quad$ on a

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x \cos y + \sin z \\ y \cos z \end{pmatrix}$$

puis

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y & 0 \\ \cos y & -x \sin y & \cos z \\ 0 & \cos z & -y \sin z \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det H_g(x,y,z) &= -\cos y \,\Big(-y \cos y \sin z - 0 \Big) \\ &= y \cos^2 y \sin z \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Montrer que le Hessien de la fonction $f(x,y)=\sin(x-y)$ est nul en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.*

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x-y) \\ -\cos(x-y) \end{pmatrix}$$

puis

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x-y) & \sin(x-y) \\ \sin(x-y) & -\sin(x-y) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det H_f(x,y) = \big(-\sin(x-y)\big)^2 - \big(\sin(x-y)\big)^2 = 0$$

Laplacien

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 au point $\vec{x} \in D$.

• Le **Laplacien** de f en $\vec{x}$ est la trace de la matrice Hessienne $H_f(\vec{x})$:

$$\Delta f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x}).$$

• La fonction f est dite **harmonique** si $\Delta f(\vec{x}) = 0$ en tout point $\vec{x} \in D$.

Interprétation géométrique du Laplacien

Proposition – *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^2. *Si*

- C *est un carré de taille* $h \times h$ *contenu dans* D, *et*
- $\mu(f, C)$ *est la valeur moyenne de* f *sur* C,

alors, pour tout point $(a, b) \in C$, *on a*

$$\mu(f, C) = f(a, b) + \frac{h^2}{24}\,\Delta f(a, b) + O(h^4)$$

N.B. Moyenne au Ch.3: $\mu(f, C) = \dfrac{1}{h^2} \displaystyle\iint_C f(x, y)\, dx\, dy.$

Remarque – Cela signifie que la différence $f(a, b) - \mu(f, C)$ est proportionnelle à $\Delta f(a, b)$, et que la constante de proportionalité ne dépend que de la taille du carré où on calcule la moyenne $\mu(f, C)$.

Exercice

Énoncé – *Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquelles la fonction $u(x,t) = x^2 - c^2 t^2$ est harmonique.*

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} u(x,t) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2c^2 t \end{pmatrix}$$

puis

$$H_u(x,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2c^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\Delta u(x,t) = 2 - 2c^2,$$

donc $\Delta u(x,t) = 0$ si et seulement si $c = \pm 1$.

Exercice

Énoncé – *Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$.*

1) Déterminer le Laplacien de F en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

Réponse – Il s'agit de calculer $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
En utilisant la règle de la chaîne on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Exercice (suite)

Puis, en utilisant aussi la règle de Leibniz, on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\
&= \frac{\partial f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2}) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + f'(\sqrt{x^2+y^2}) \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice (suite)

On a donc

$$\begin{aligned} \Delta F(x,y) &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} \\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Énoncé (suite) –

2) Trouver les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Réponse – En termes de f, l'équation s'écrit

$$f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

et dépend de la seule variable réelle $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$.

Exercice (suite)

• Finalement, on doit résoudre l'équation différentielle du 2ème ordre non homogène et à cœfficients non constants

$$\text{(E)} \qquad f''(r) + \frac{1}{r}\, f'(r) = r$$

• Pour cela, on transforme (E) en un système d'équations différentielles du 1er ordre:

$$\begin{cases} f'(r) = g(r) & \text{(E1)} \\ g'(r) + \frac{1}{r}\, g(r) = r & \text{(E2)} \end{cases}$$

On trouve g avec (E2) puis on reporte dans (E1) et on trouve f.

• Les solutions de (E2) sont de la forme $g = g_0 + g_p$, où g_0 est la solution générale de l'équation homogène associée

$$\text{(E2*)} \qquad g_0'(r) + \frac{1}{r}\, g_0(r) = 0$$

et g_p est une solution particulière de (E2) obtenue par la méthode de la variation de la constante.

Exercice (suite)

- Explicitement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\text{(E2*)} \quad g_0(r) = \lambda\ e^{-\int \frac{1}{r}\ dr} = \lambda\ e^{-\ln r} = \lambda\ e^{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\lambda}{r}$$

- On pose $g_p(r) = \frac{\lambda(r)}{r}$, ce qui donne $g_p'(r) = \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{\lambda(r)}{r^2}$:

$$\text{(E2)} \quad g_p'(r) + \frac{1}{r}\, g_p(r) = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'(r)}{r} = r \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(r) = r^2$$

On peut choisir $\lambda(r) = \frac{r^3}{3}$, d'où $\quad g_p(r) = \frac{r^2}{3}$.

- On a donc $\quad g(r) = g_0(r) + g_p(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Enfin, les solutions de (E) sont celles de (E1) :

$$\text{(E1)} \quad f'(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad f(r) = \lambda\ \ln(r) + \frac{r^3}{9} + \mu$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

10. Taylor

Dans cette section:

- Dévéloppement de Taylor
- Approximation et erreur relative

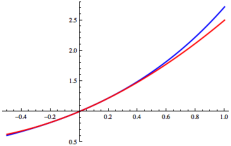
Formule de Taylor

Théorème de Taylor – *Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k autour d'un point $\vec{a}$ peut être approximée en tout point $\vec{x}$ proche de $\vec{a}$ par un polynôme de degré k en $\vec{x} - \vec{a}$, appellé* **polynôme de Taylor**, *dont les cœfficients dépendent uniquement des dérivées de f en $\vec{a}$.*

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ qui contient a, alors pour tout $x \in D$ on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)\,(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big).$$

Par exemple, voici le graphe de $f(x) = e^x$ (en bleu) et son polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 0$, $P(x) = 1 + x + x^2/2$ (en rouge).



Formule de Taylor

Cas particulier – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ qui contient un point (a, b).
Alors, pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) \\ &+ \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}\ (x-a)(y-b) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2 \\ &+ o\big(||(x-a, y-b)||^2\big), \end{aligned}$$

où $o(h)$ est une fonction qui tend vers zéro plus vite de $h \to 0$.

Écritures alternatives:

$$\text{terme à l'ordre 1} \quad = df_{(a,b)}(x-a, y-b) = J_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix},$$

$$\text{terme à l'ordre 2} \quad = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

Exemple

Exemple – Soit $\quad f(x,y) = \dfrac{x-1}{y-1} \quad$ et $(a,b) = (0,0)$.

On a $f(0,0) = 1$, puis

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y-1} & -\dfrac{x-1}{(y-1)^2} \end{pmatrix} \text{ d'o } J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(y-1)^2} \\[2ex] -\dfrac{1}{(y-1)^2} & \dfrac{2(x-1)}{(y-1)^3} \end{pmatrix}$$

d'o

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi: $\quad \dfrac{x-1}{y-1} = 1 - x + y - xy + y^2 + o\big(||(x,y)||^2\big).$

Exercice

Énoncé – *La pression P d'un gaz parfait est fonction de la temperature T et du volume V selon la loi*

$$P(T,V) = nR\,\frac{T}{V},$$

où n est la quantité de matière (moles) et R est la constante universelle d'un gaz parfait.

On voudrait connaitre la pression du gaz qui se trouve à l'état (T,V), mais la mesure de cet état nous donne les valeurs (T_0,V_0) avec une **erreure relative**

$$\left|\frac{T-T_0}{T_0}\right| < 0.005\,\% \qquad \textit{et} \qquad \left|\frac{V-V_0}{V_0}\right| < 0.002\,\%.$$

Quelle est l'erreure relative induite par cette mesure sur la valeur $P(V_0,T_0)$ de la pression?

Exercice (suite)

Réponse – On cherche une borne supérieur pour $\left|\frac{P-P_0}{P_0}\right|$, où $P = P(T,V)$ et $P_0 = P(T_0, V_0)$.

Pour cela, on utilise le dévéloppement de Taylor de $P(T,V)$ à l'ordre 1, autour de (T_0, V_0):

$$\begin{aligned} P - P_0 &\simeq dP_{(T_0,V_0)}(T-T_0, V-V_0) \\ &= \frac{\partial P}{\partial T}(T_0,V_0)\ (T-T_0) + \frac{\partial P}{\partial V}(T_0,V_0)\ (V-V_0) \\ &= nR\,\frac{T-T_0}{V_0} - nR\,\frac{T_0(V-V_0)}{V_0^2}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{P-P_0}{P_0} \simeq nR\,\frac{T-T_0}{V_0\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} - nR\,\frac{T_0(V-V_0)}{V_0^2\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} = \frac{T-T_0}{T_0} - \frac{V-V_0}{V_0}$$

d'où suit

$$\left|\frac{P-P_0}{P_0}\right| \leqslant \left|\frac{T-T_0}{T_0}\right| + \left|\frac{V-V_0}{V_0}\right| < 0.005\,\% + 0.002\,\% = 0.007\,\%.$$

11. Extrema locaux

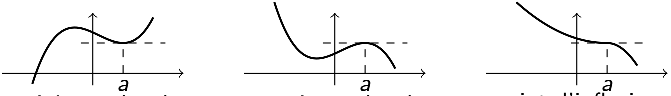
Dans cette section:

- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Extrema locaux
- Points critiques et critère pour trouver les extrema locaux
- Points cols et points plats

Rappels sur les fonctions d'une variable

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et non constante, la croissance ou décroissance de f en a est décelée par le signe de $f'(a)$ (positif ou négatif).
Que se passe-t-il si $f'(a) = 0$ (*point critique*) ?

Si $f'(a) = 0$, la tangente au graphe de f est horizontale, on est dans l'un des cas suivants:



minimum local — maximum local — point d'inflexion

Pour savoir lequel, on regarde la convexité (minimum) ou la concavité (maximum) par le signe de $f''(a)$ (positif ou négatif).
Que se passe-t-il si $f''(a) = 0$ (*point plat*) ?

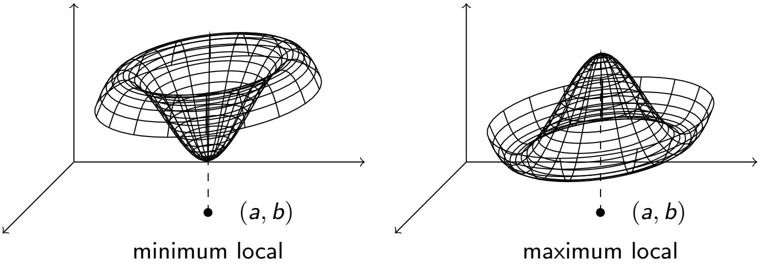
Si $f''(a) = 0$, on continue à dériver: si la première dérivée non nulle est d'ordre pair, on a un min ou un max local (selon le signe). Si elle est d'ordre impair, on a un point d'inflexion.

Extrema locaux et points selle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'un point $(a, b) \in D_f$ est un **extremum local** de f s'il est

- soit un **minimum local**: $f(a, b) \leqslant f(x, y)$ pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b),

- soit un **maximum local**: $f(a, b) \geqslant f(x, y)$ pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b).



Points critiques

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 en (a, b), le signe de ses dérivées en (a, b) permet de trouver les extrema locaux.

Définition – On dit que (a, b) est un **point critique** de f si $\vec{\nabla} f(a, b) = (0, 0)$. Le plan tangent au graphe de f au point $(a, b, f(a, b))$ est alors horizontal.

Proposition – *Soit (a, b) un point critique de f.*
Si $\det H_f(a, b) > 0$, *alors (a, b) est un extremum local.*
De plus

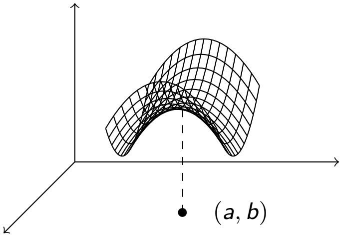
- *(a, b) est un minimum local si* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ *ou* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$;
- *(a, b) est un maximum local si* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ *ou* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$.

Points selles et points plats

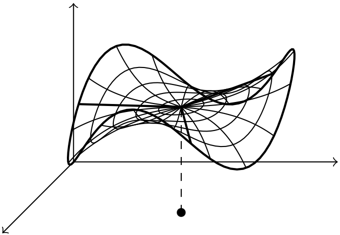
Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit (a, b) un point critique de f.

- Si $\det H_f(a, b) < 0$ on dit que (a, b) est un **point col** ou **point selle**

- Si $\det H_f(a, b) = 0$ on dit que (a, b) est un **point plat**.

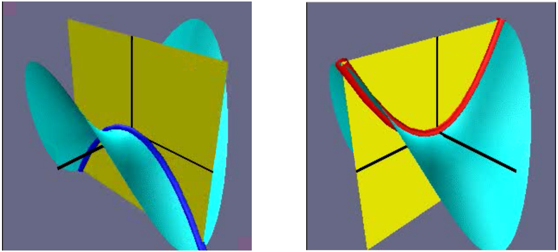


point selle

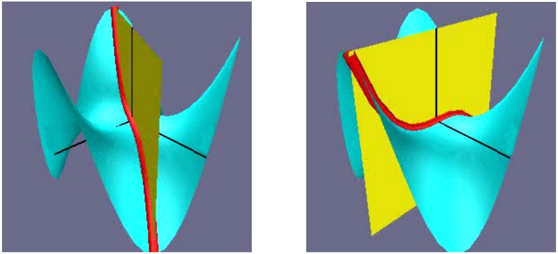


point plat

Point col et point plat



Un point col : paraboloïde hyperbolique ($z = x^2 - y^2$)



Un exemple de point plat : la selle de singe ($z = x^3 - 3xy^2$)

Exercice

Énoncé – *Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et, si possible, leur nature.*

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Réponse – Cherchons d'abord les points critiques:

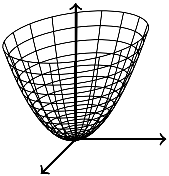
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

ainsi $(0,0)$ est le seul point critique de f. Cherchons sa nature:

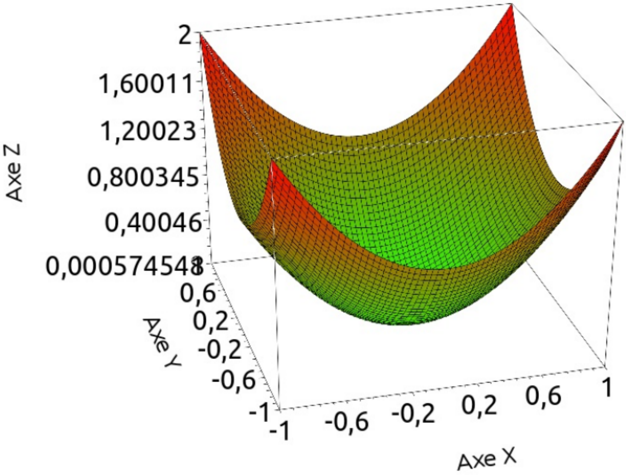
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{l} \det H_f(0,0) = 4 > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \end{array}$$

ainsi $(0,0)$ est un minimum local.

En effet, le graphe de f autour de $(0,0)$ est:



Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$



Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Exercice (suite)

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Réponse – Cherchons d'abord les points critiques:

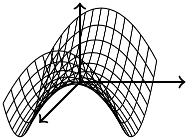
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

ainsi $(0,0)$ est le seul point critique de f. Cherchons sa nature:

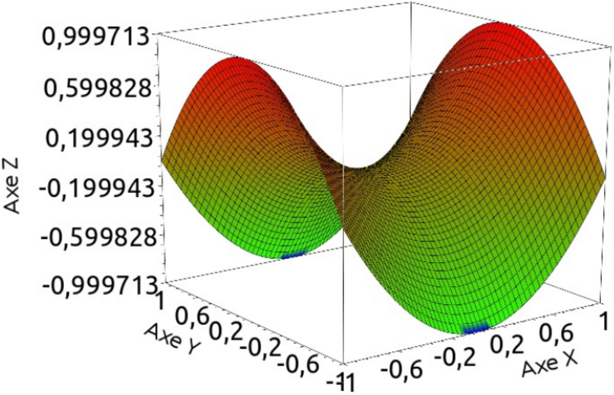
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det H_f(0,0) = -4 < 0$$

ainsi $(0,0)$ est un point col.

En effet, le graphe de f autour de $(0,0)$ est:



Graphe de $f(x,y) = x^2 - y^2$



Graphe de $f(x,y) = x^2 - y^2$

Exercice (suite)

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$.

Réponse – Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4x(x^2+y^2) \\ 8y - 4y(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} x(2-x^2-y^2) = 0 \\ y(2-x^2-y^2) = 0 \end{cases} \iff \left\langle \begin{array}{l} \text{soit } (x,y) = (0,0) \\ \text{soit } x^2+y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Par conséquent, f admet un cercle de points critiques d'équation $x^2+y^2 = 2$ et un point critique isolé de coordonnées $(0,0)$.

Exercice (suite)

Cherchons la nature de ces points critiques:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8-12x^2-4y^2 & -8xy \\ -8xy & 8-12y^2-4x^2 \end{pmatrix}$$

- Pour le point $(0,0)$, on a

$$\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 64 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0$$

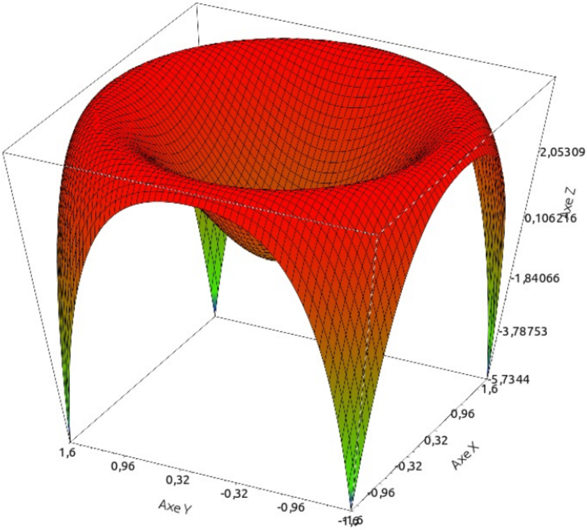
donc $(0,0)$ est un minimum local.

- Pour les points (x,y) tels que $x^2+y^2=2$, on a

$$\det H_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix} = 0$$

donc tous les points du cercle $x^2+y^2=2$ sont plats.

Graphe de $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$



Graphe de $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$

Chapitre 3
Intégrales multiples

1. Intégrales de Riemann
2. Intégrales doubles
3. Intégrales triples
4. Aire, volume, moyenne et centre de masse

1. Intégrales de Riemann

Dans cette section:

- Rappels sur primitive et intégrale
- Subdivisions des intervalles
- Somme de Riemann d'une fontion d'une variable
- Intégrale de Riemann
- Aire sous le graphe d'une fonction

Rappels sur les fonctions d'une variable

Rappel [TMB] – Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$:

- Une **primitive de f sur** $[a,b]$ est une fonction F dérivable telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. On note $F(x) = \int f(x)dx$.

- L'**intégrale de f sur** $[a,b]$ est $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

- **Intégration par changement de variable** $x = h(t)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f\big(h(t)\big)\;h'(t)\,dt,$$

où h est un <u>difféomorphisme</u> (bijection dérivable avec réciproque h^{-1} dérivable).

- **Intégration par parties**

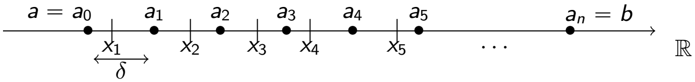
$$\int_a^b f(x)\;g'(x)\,dx = \Big[f(x)\;g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\;g(x)\,dx.$$

Problème – Pas d'analogue pour les fonctions de plusieurs variables!

Somme de Riemann d'une fonction d'une variable

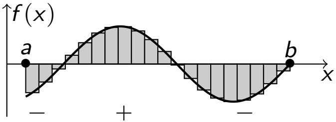
Définition – Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable.

• Une **subdivision** $\mathcal{S}_\delta$ de $[a, b]$ est une partition de l'intervalle $I = [a, b]$ en n intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ (pour $i = 1, \dots, n$) de longueur $\delta = \frac{b-a}{n}$, avec $a_0 = a$ et $a_n = b$.



• Pour tout choix de n points $x_i \in I_i$, on appelle **somme de Riemann de** f la somme

$$R_\delta(f; \{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \delta.$$



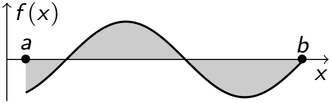
Chaque terme $f(x_i)\,\delta$ est l'**aire algébrique** ($= \pm$ aire) du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$.

Intégrale simple de Riemann

Définition – Si la limite $\lim_{\delta \to 0} R_\delta(f; \{x_i\})$ existe, elle est indépendante du choix des points $x_i \in I_i$. Dans ce cas:

- on appelle **intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$** la limite:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} R_\delta(f; \{x_i\})$$



- on dit que f est **intégrable sur $[a, b]$ selon Riemann** si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est finie (un nombre réel, pas $\pm\infty$). Par exemple: les fonctions continues et celles monotones.

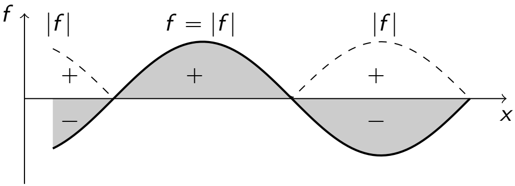
Théorème fondamental du calcul intégral – *Si f est intégrable sur $[a, b]$ selon Riemann, alors f admet une primitive F sur $[a, b]$, et on a:*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt + c \quad \textit{pour tout } x \in [a, b] \textit{ et } c \in \mathbb{R}.$$

Signification géométrique de l'intégrale simple

Corollaire –

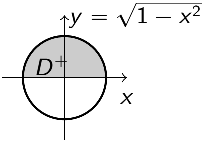
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ aire "algébrique" sous le graphe de f.
- $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx =$ aire sous le graphe de f.



Exemple: aire d'un disque

Aire d'un disque –

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$



$$\mathrm{Aire}\,(D) = 2\mathrm{Aire}\,(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\; dx$$

Calcul par changement de variable: $x = \sin t$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, car $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Alors $dx = \cos t \; dt$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}\,(D) &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \; dt \\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2} \; dt \\ &= \Big[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \Big(0 + \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2}\Big) = \pi. \end{aligned}$$

2. Intégrales doubles

Dans cette section:

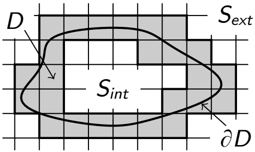
- Subdivisions des domaines du plan
- Sommes de Riemann des fonctions de deux variables
- Intégrale double
- Volume sous le graphe d'une fonction
- Théorème de Fubini
- Théorème du changement de variables

Subdivisions d'un domaine du plan

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné, avec bord ∂D lisse (au moins par morceaux).

Définition – Pour tout $\delta > 0$, on appelle **subdivision de** D l'ensemble $\mathcal{S}_\delta$ des carrés K_i de coté δ du plan qui couvrent D dans n'importe quel grillage de pas δ.
En particulier, on considère deux recouvrements:

- un **à l'extérieur** $\mathcal{S}_\delta^{ext}$,
- un **à l'intérieur** $\mathcal{S}_\delta^{int}$.



Puisque D est borné, les subdivisions contiennent un nombre fini de carrés, et on a $\mathcal{S}_\delta^{int} \subset \mathcal{S}_\delta^{ext}$.

Les carrés dans $\mathcal{S}_\delta^{ext} \setminus \mathcal{S}_\delta^{int}$ couvrent exactement le bord ∂D.

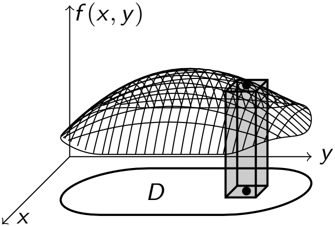
Sommes de Riemann d'une fonction de deux variables

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Définition – Pour tout choix de points $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$, on appelle **sommes de Riemann de** f associées aux subdivisions $\mathcal{S}_\delta^{ext/int}$ et aux points $\{(x_i, y_i)\}$ les sommes

$$R_\delta^{ext/int}(f, \{(x_i, y_i)\}) = \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta^{ext/int}} f(x_i, y_i)\ \delta^2,$$

où chaque terme $f(x_i, y_i)\ \delta^2$ représente le **volume algébrique** ($= \pm$ volume) du parallélepipède de base K_i et hauteur $f(x_i, y_i)$.



Intégrale double

Théorème – *Si les limites* $\lim_{\delta\to 0} R_\delta^{ext/int}(f;\{(x_i,y_i)\})$ *existent, elles sont indépendantes du choix des points* $(x_i,y_i) \in K_i \cap D$ *et elles coincident.*

Définition – Dans ce cas:

- on appelle **intégrale double de f sur D** cette limite:

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \lim_{\delta\to 0} R_\delta^{ext/int}(f;\{(x_i,y_i)\}).$$

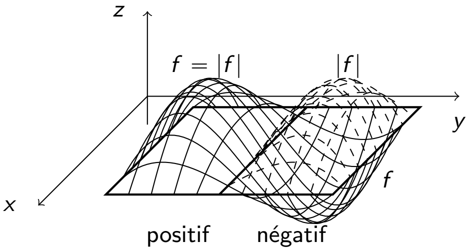
- on dit que f **est intégrable sur D selon Riemann** si l'intégrale $\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$ est finie ($=$ nombre, pas $\pm\infty$).

Proposition – *Toute fonction f <u>continue</u> est intégrable selon Riemann sur un ensemble D <u>borné</u> à <u>bord lisse</u> (par morceaux).*

Signification géométrique de l'intégrale double

Corollaire –

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = $ *volume "algébrique" sous le graphe de* f.
- $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy = $ *volume sous le graphe de* f.



Exemple: volume d'une boule

Volume d'une boule – Le volume de la boule

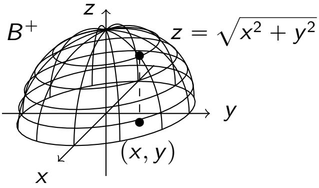
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

est deux fois le volume de la demi-boule

$$B^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\},$$

qui se trouve sous le graphe de la fonction

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$



On a alors

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\; dx\, dy$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est le disque unitaire.

Propriétés des intégrales doubles

Propriétés – 1) *Pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)\, dx\, dy = \lambda \iint_D f\, dx\, dy + \mu \iint_D g\, dx\, dy.$$

2) *Si* $D = D_1 \cup D_2$ *et* $D_1 \cap D_2 =$ *courbe ou point ou* $\emptyset$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy.$$

3) $$\left| \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

4) *Si* $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in D$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leqslant \iint_D g(x,y)\, dx\, dy.$$

Théorème de Fubini sur un rectangle

Théorème de Fubini sur un rectangle – *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $D = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle. Alors on a*

$$\boxed{\begin{aligned} \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy \end{aligned}}$$

Notation – $\displaystyle \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$

Corollaire – $\displaystyle \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy$

Exemples : calcul d'intégrales doubles

Exemples –

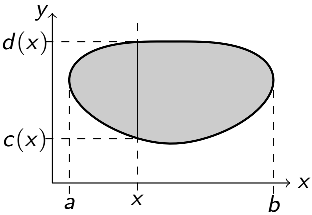
- $$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

- $$\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2y-1)\,dy = \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1}$$
$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2-1\right)\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}$$

Théorème de Fubini

Lemme – *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné quelconque.*

- *Pour tout $(x,y) \in D$ il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$.*
- *Pour tout $x \in [a,b]$ il existe $c(x), d(x) \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$.*



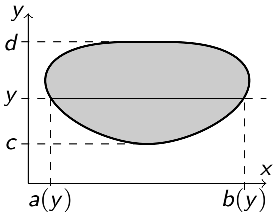
Au final:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [c(x), d(x)] \right\}$$

Théorème de Fubini sur D – *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors*

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx}$$

Théorème de Fubini



Alternative –

L'ensemble D est décrit par

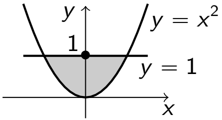
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x \in [a(y), b(y)] \}$$

Théorème de Fubini sur D –

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right) dy}$$

Exemple : calcul d'intégrale double

Exemple – Soit D la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut.



On peut décrire D comme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in [x^2, 1]\}.$$

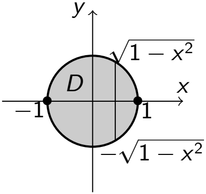
Par conséquent:

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 y \; dx \; dy &= \int_{-1}^{1} x^2 \; dx \int_{x^2}^{1} y \; dy \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{x^2}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x^4) \; dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Exemple : volume de la boule

Exemple – Rappelons que le volume de la boule unitaire est

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$



où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$.

On peut décrire D comme l'ensemble

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right] \right\}.$$

- Voici donc le calcul du volume de la boule:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy \\ &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy. \end{aligned}$$

- On pose $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$ pour avoir $\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = |\cos t|$.

Exemple : volume de la boule (suite)

- $y = \sqrt{1-x^2}\,\sin t \qquad dy = \sqrt{1-x^2}\,\cos t\,dt$
- $-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad -1 \leqslant \sin t \leqslant 1$

  $\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \quad$ et $\quad \sqrt{1 - \frac{y^2}{1-x^2}} = \cos t$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy \\
&= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-x^2}\,\cos t\,\sqrt{1-x^2}\,\cos t\;dt \\
&= 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)\;dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\;dt
\end{aligned}$$

- puisque $\displaystyle 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\;dt = \pi$ (voir ex. précédent)

$$\mathrm{Vol}\,(B) = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\;dx = \pi\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

Changement de variables

Définition – Un **changement de variables**

$$(x,y) = h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

est un difféomorphisme $h : \tilde{D} \to D : (u,v) \mapsto h(u,v) = (x,y)$, c'est-à-dire une bijection de classe C^1 avec réciproque $h^{-1} : D \to \tilde{D} : (x,y) \mapsto h^{-1}(x,y) = (u,v)$ de classe C^1.

Théorème – *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction des variables (x,y) et $(x,y) = h(u,v)$ un changement de variables. Alors*

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v)\,\Big|\det J_h(u,v)\Big|\,du\,dv}$$

où $\tilde{f}(u,v) = f(h(u,v))$, $\tilde{D} = \big\{(u,v) \mid h(u,v) \in D\big\}$
et $\det J_h(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ *est le Jacobien de h.*

Passage en polaire – $\boxed{dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi}$

Exemple : volume d'une boule en polaires

Volume de la boule en coordonnées polaires – On calcul

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_{D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

en coordonnées polaires $\quad (x,y) = h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

- Puisque $x^2+y^2=\rho^2$, on a :

$$\tilde{D} = \left\{ (\rho,\varphi) \in \,]0,\infty[\times[0,2\pi[\; \middle|\; \rho \leqslant 1 \right\} = \,]0,1]\times[0,2\pi[$$

- on utilise $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$, $\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\rho^2}$ et Fubini:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\;\rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\;\rho\,d\rho$$

- enfin, on pose $\quad t = 1-\rho^2 \quad$ donc $\quad dt = -2\rho\,d\rho$:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = -\frac{4\pi}{2}\int_1^0 t^{1/2}\;dt = 2\pi\int_0^1 t^{1/2}\;dt = 2\pi\frac{2}{3}\Big[t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

3. Intégrales triples

Dans cette section:

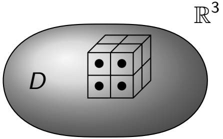
- Subdivisions des solides
- Sommes de Riemann des fonctions de trois variables
- Intégrales triples
- Théorème de Fubini
- Théorème du changement de variables

Intégrale triple

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble <u>borné</u> avec bord $\partial\Omega$ <u>lisse</u> (par morceaux), et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de trois variables.

Définition –

• On choisit une **subdivision** $\mathcal{S}_\delta$ de Ω en petits <u>cubes</u> K_i de taille δ^3, avec δ qui tend vers zéro.



• On définit l'**intégrale triple de** f **sur** Ω comme la limite de la **somme de Riemann** associée à $\mathcal{S}_\delta$ et à des points $(x_i, y_i, z_i) \in K_i \cap \Omega$ quelconque:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\delta\to 0} \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta} f(x_i,y_i,z_i)\,\delta^3.$$

• On dit que f est **intégrable** si son intégrale est finie.

Proposition – *Toute fonction f <u>continue</u> est intégrable selon Riemann sur un ensemble Ω <u>borné</u> à <u>bord lisse</u> (par morceaux).*

Signification géométrique et propriétés

Signification géométrique – *Le graphe de f est une <u>hyper-surface</u> de $\mathbb{R}^4$* (difficile à dessiner)*:*

- $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$ *<u>quadri-volume</u> "algébrique" sous le graphe de f.*
- $\displaystyle\iiint_\Omega |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz =$ *<u>quadri-volume</u> sous le graphe de f.*

Propriétés – 1) *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\iiint_\Omega (\lambda f + \mu g)\,dx\,dy\,dz = \lambda \iiint_\Omega f\,dx\,dy\,dz + \mu \iiint_\Omega g\,dx\,dy\,dz.$$

2) *Si $\Omega_1 \cap \Omega_2 =$ surface ou courbe ou point ou $\emptyset$, alors*

$$\iiint_{\Omega_1\cup\Omega_2} f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_1} f\,dx\,dy\,dz + \iiint_{\Omega_2} f\,dx\,dy\,dz.$$

etc

Théorème de Fubini

Théorème de Fubini – *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.*

- *Si Ω est un parallélépipède, alors*

$$\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$$

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz\ f(x,y,z)}$$

(on intègre dans l'ordre qu'on veut)

- *Si Ω est un ensemble borné quelconque, alors:*

$$\Omega = \big\{(x,y,z) \big| \, x \in [a,b],\ \ y \in [c(x), d(x)],\ \ z \in [e(x,y), g(x,y)]\big\}$$

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\ f(x,y,z)}$$

(l'ordre d'intégration est forcé)

Exemples d'intégrales triples avec Fubini

Exemple – $\Omega = [0,1]\times[1,2]\times[2,3] \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint_\Omega (x^2 - 2yz)\, dx\, dy\, dz = \int_2^3 dz \int_1^2 dy \int_0^1 dx\ (x^2 - 2yz)$$

$$= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left[\frac{1}{3}x^3 - 2xyz \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left(\frac{1}{3} - 2yz \right) = \int_2^3 \left[\frac{1}{3}y - y^2 z \right]_{y=1}^{y=2} dz$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z \right) dz = \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z \right) dz$$

$$= \left[\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2 \right]_2^3 = \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{15}{2} = -\frac{43}{6}$$

Exemples d'intégrales triples avec Fubini

Exemple – On veut calculer $\displaystyle\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz$

où Ω est le cylindre plein de hauteur 3 et de base le disque

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ z=0\Big\}.$$

- D'abord, on décrit explicitement Ω :

$$\begin{aligned}\Omega &= \Big\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\Big\} \\ &= \Big\{(x,y,z) \mid x \in [-1,1],\ y \in \big[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\big],\ z \in [0,3]\Big\}\end{aligned}$$

- Ensuite on applique Fubini:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\,dx\,dy \\ &= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\ (1-2yz)\end{aligned}$$

Exemples d'intégrales triples avec Fubini

Exemple (suite) –

$$\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\,dy$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big[y - y^2 z \Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big(\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)z \Big)\,dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\;dt$$

$$= 3\pi$$

Changement de variables

Définition – Un **changement de variables**

$$\vec{x} = (x, y, z) = h(u, v, w) = \big(x(\vec{u}), y(\vec{u}), z(\vec{u})\big)$$

est un <u>difféomorphisme</u> $h : \tilde{\Omega} \to \Omega : \vec{u} \mapsto h(\vec{u}) = \vec{x}$
(bijection C^1 avec réciproque $h^{-1}(\vec{x}) = \vec{u}$ aussi C^1).

Théorème – *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de $\vec{x}$ et $\vec{x} = h(\vec{u})$ un changement de variables. Alors*

$$\boxed{\iiint_D f(\vec{x})\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\tilde{\Omega}} f\big(h(\vec{u})\big)\, \Big|\det J_h(\vec{u})\Big|\, du\, dv\, dw}$$

où $\tilde{\Omega} = \big\{\vec{u} \mid h(\vec{u}) \in \Omega\big\}$ *et* $\det J_h(\vec{u})$ *est le Jacobien de h.*

Passage en coordonnées cylindriques et sphériques –

$$\boxed{dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta}$$

Exemple d'intégrale par changement de variables

Exemple – Considérons à nouveau $\displaystyle\iiint_{\Omega}(1-2yz)\,dx\,dy\,dz$

où Ω est le cylindre de hauteur 3 et de base le disque D.

- En coordonnées cylindriques, on a

$$\Omega = \Big\{\, (\rho,\varphi,z) \mid \rho \in\,]0,1],\ \ \varphi \in [0,2\pi[,\ \ z\in[0,3]\,\Big\}$$

- Puisque $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$, on a

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega}(1-2yz)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho\ \int_0^{2\pi}(1-2\rho\sin\varphi z)\ d\varphi \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho\ \Big[\,\varphi + 2\rho\cos\varphi z\,\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 \Big(\,2\pi + 2\rho z - 2\rho z\,\Big)\ \rho\,d\rho \\
&= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\ \rho\,d\rho \quad = 3\ \pi\ \Big[\,\rho^2\,\Big]_0^1 \quad = 3\pi
\end{aligned}$$

4. Aire, volume, moyenne, centre de masse

Dans cette section:

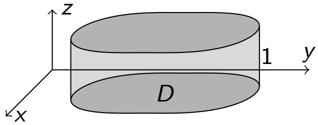
- Aire d'un domaine du plan
- Volume d'un solide
- Quantités totale et moyenne
- Centre de masse et moment d'inértie

Aire d'un domaine du plan

Remarque – Si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, l'intégrale

$$\iint_D dx\ dy$$

représente le volume sous le graphe de la fonction $f(x,y) = 1$.



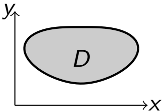
Ce solide Ω est un cylindre de hauteur $H = 1$ et de base D:

$$\iint_D dx\ dy = \mathrm{Vol}\,(\Omega) = \mathrm{Aire}\,(D) \times H = \mathrm{Aire}\,(D).$$

Aire d'un domaine du plan

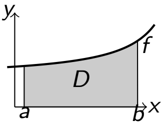
Définition – L'**aire** d'un domaine D borné de $\mathbb{R}^2$ est

$$\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \iint_D dx\,dy}$$



Proposition – *Si D est la portion du plan sous le graphe d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ positive, c'est-à-dire si*

$$D = \big\{(x, y) \mid x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\big\},$$



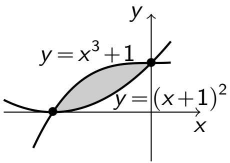
alors: $$\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

- En effet: $$\iint_D dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercice

Énoncé – Calculer l'aire du domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

Réponse – D'abord on dessine D et on trouve les deux points d'intersection des courbes: $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.
On a donc



$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ x^2 + 2x + 1 \leqslant y \leqslant x^3 + 1\Big\}.$$

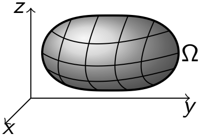
Ensuite on applique Fubini:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Aire}\,(D) &= \iint_D dx\,dy \quad = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy \\
&= \int_{-1}^{0} \big(x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1\big)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

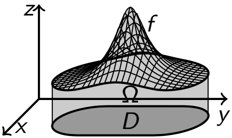
Volume d'un solide

Définition – Le **volume** d'un solide Ω borné de $\mathbb{R}^3$ est

$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz}$$



Proposition – *Si Ω est l'espace sous le graphe d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire si*



$$\Omega = \big\{ (x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z \in [0, f(x,y)] \big\},$$

alors: $$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iint_{D} f(x,y)\, dx\, dy}$$

- Car $$\iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz = \iint_{D} dx\, dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_{D} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Exemple : volume d'une boule en sphériques

Volume de la boule en coordonnées sphériques – En coordonnées sphériques, la boule unité B s'écrit

$$B = \big\{(r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ \theta \in [0,\pi]\big\}.$$

Puisque $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(B) &= \iiint_B dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi[\times[0,\pi]} r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^1 r^2\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\ 2\pi \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}\ (1+1) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Quantités totale et moyenne

Définition – En physique, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ représente une *concentration* de matière (une *densité volumique*), ou une *densité* de courant ou d'énergie, alors on appelle

• **quantité totale** de matière / courant / énergie en Ω le nombre

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

• **quantité moyenne** de matière / courant / énergie en Ω le nombre

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(\Omega)} \iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Exemple : moyenne

Exemple – Un matériau est réparti dans un cube $\Omega = [0, R]^3$ selon la densité volumique $f(x, y, z) = \frac{x+y}{(z+1)^2}$.

- La quantité totale du matériau est alors

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^R dx \int_0^R (x+y)\,dy \int_0^R \frac{1}{(z+1)^2}\,dz$$
$$= \int_0^R \Big[xy + \frac{1}{2}y^2\Big]_0^R dx \Big[-\frac{1}{z+1}\Big]_0^R$$
$$= \int_0^R \Big(Rx + \frac{1}{2}R^2\Big)dx \Big(1 - \frac{1}{R+1}\Big)$$
$$= \Big[\frac{1}{2}Rx^2 + R^2x\Big]_0^R \frac{R}{R+1} = \frac{3R^4}{2(R+1)}.$$

- Puisque $\mathrm{Vol}(\Omega) = R^3$, la quantité moyenne est

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{R^3}\,\frac{3R^4}{2(R+1)} = \frac{3R}{2(R+1)}.$$

Barycentre

Définition – Si $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ denote la *densité de masse* d'un matiériau contenu dans Ω, on appelle

• **masse totale** le nombre $\quad M = \iiint_D \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

• **centre de masse** (ou **centre d'inertie**, ou **barycentre**) le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_D x\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_D y\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_D z\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Un matériau est dit **homogène** si sa densité de masse μ est constante.

Moment d'inertie

Définition (suite) – Si $r(x, y, z)$ est la distance d'un point (x, y, z) à un point fixé P ou à une droite Δ:

- le **moment d'inertie** par rapport à P ou à Δ est le nombre

$$\frac{1}{M} \iiint_{\Omega} r^2(x, y, z)\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Exemple : centre de masse

Exemple – On cherche à déterminer le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$\Omega = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2,\ z \in [0,H],\ y \geqslant 0\big\}.$$

• Il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le demi-cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \big\{(\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,\pi],\ z \in [0,H]\big\}.$$

• Le calcul de la masse totale donne

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz \quad = \iiint_{\tilde{\Omega}} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \\ &= \int_0^R \rho\,d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^H dz \quad = \frac{\pi R^2 H}{2}. \end{aligned}$$

Exemple (suite)

- Le centre de masse G a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\tilde{\Omega}} \rho \cos\varphi \;\, \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \frac{1}{M} \int_0^R \rho^2 \, d\rho \, \int_0^\pi \cos\varphi \, d\varphi \;\, \int_0^H dz = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M} \int_0^R \rho^2 \, d\rho \;\, \int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi \;\, \int_0^H dz = \frac{2}{\pi R^2 H} \, \frac{R^3}{3} \, 2 \, H = \frac{4R}{3\pi} \\
z_G &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M} \int_0^R \rho \, d\rho \;\, \int_0^\pi d\varphi \, \int_0^H z \, dz = \frac{2}{\pi \; R^2 H} \, \frac{R^2}{2} \, \pi \, \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi $G = \left(0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2}\right)$.

Exercice

Énoncé – *De la farine s'éparpille au sol selon la densité*

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2}, \quad \textit{où } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Trouver la quantité totale et moyenne de farine éparpillée sur un disque D de rayon $R > 0$ centré en l'origine.

Réponse – En coord. polaires, on a $f(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{(\rho+1)^2}$ et $D = \{\, (\rho,\varphi) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi[\,\}$. Ainsi:

$$\text{Quantité totale} = \iint_D \frac{1}{(\rho+1)^2}\ \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^R \left(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \right) d\rho \ \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \right) d\rho$$

$$= 2\pi \Big[\ \ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1}\ \Big]_0^R = 2\pi \left(\ \ln(R+1) - \frac{R}{R+1}\right)$$

Exercice (suite)

Au final:

$$\text{Quantité totale} = 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right).$$

Puisque

$$\mathrm{Aire}\,(D) = \iint_D \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}\, 2\pi = \pi R^2,$$

on a

$$\begin{aligned} \text{Quantité moyenne} \quad &= \frac{1}{\mathrm{Aire}\,(D)} \iint_D \frac{1}{(\rho+1)^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi \\ &= \frac{2}{R^2} \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right). \end{aligned}$$

Exercice

Exercice – *Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B et du cylindre C suivants:*

$$
\begin{aligned}
B &= \Big\{ (r,\varphi,\theta) \;\Big|\; r \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [\pi/2,\pi] \Big\} \\
C &= \Big\{ (\rho,\varphi,z) \;\Big|\; \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [0,R] \Big\},
\end{aligned}
$$

et avec la densité de masse $\mu(x,y,z) = z^2$.

Réponse – Puisque $\Omega = B \cup C$, et $B \cap C =$ courbe, le centre de masse G a coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_\Omega x\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \quad \text{(idem pour } y_G \text{ et } z_G\text{)},$$

où $\quad M_\Omega = M_B + M_C \quad$ et $\quad \displaystyle\iiint\limits_\Omega = \iiint\limits_B + \iiint\limits_C .$

• Les intégrales se calculent:
en coordonnées sphériques sur B, où $\mu(r,\varphi,\theta) = r^2 \cos^2\theta$,
en coordonnées cylindriques sur C, où $\mu(\rho,\varphi,z) = z^2$.

Exercice (suite)

- Calcul de la masse de Ω:

$$\begin{aligned}
M_B &= \iiint_B r^2 \cos^2\theta \; r^2 \sin\theta \; dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^R r^4\, dr \; \int_0^{2\pi} d\varphi \; \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{R^5}{5} 2\pi \Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \Big]_{\pi/2}^{\pi} \quad = \frac{2\pi R^5}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_C &= \iiint_C z^2\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\
&= \int_0^R \rho\, d\rho \; \int_0^{2\pi} d\varphi \; \int_0^R z^2\, dz \quad = \frac{R^2}{2}\; 2\pi \; \frac{R^3}{3} \quad = \frac{\pi R^5}{3}
\end{aligned}$$

Au final: $\quad M_\Omega = M_B + M_C = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3} \right) \pi R^5 = \frac{7\pi R^5}{15}.$

Exercice

- Puisque $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = 0$, on a:

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_\Omega x \, \mu(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 \, dr \ \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2 \, d\rho \ \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \ \int_0^R z^2 \, dz \quad = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_\Omega y \, \mu(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 \, dr \ \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2 \, d\rho \ \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \ \int_0^R z^2 \, dz \quad = 0
\end{aligned}$$

Exercice (suite)

Enfin:

$$
\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega z\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\theta \sin\theta\, d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z^3\, dz \\
&= \frac{15}{7\pi R^3} \left(\frac{R^6}{6}\, 2\pi \left[-\frac{1}{4} \cos^4\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, \frac{R^4}{4} \right) \\
&= \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{15 R^3}{7}\, \frac{2}{12} \\
&= \frac{5R^3}{14}.
\end{aligned}
$$

Exercice (suite)

- En conclusion, le barycentre G de Ω a pour coordonnées

$$G = (0, 0, 5R^3/14)$$

Puisque $5R^3/14 > 0$, il se trouve dans la partie cylindrique.

- Le barycentre se trouve à l'intérieur de Ω si

$$5R^3/14 \leqslant R$$

c'est-à-dire si $R \leqslant \sqrt{14/5}$.