UCBL – L1 PCSI – UE Math 2

Fonctions de plusieures variables et champs de vecteurs

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

http://math.univ-lyon1.fr/∼frabetti/Math2/

http://math.univ-lyon1.fr/∼borrelli/CoursMath2/

Programme et plan des cours

Partie I : Fonctions de plusieures variables

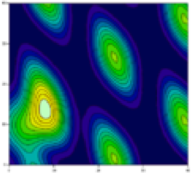
CM 1 – Coordonnées, ensembles compacts
CM 2 – Fonctions, graphes, composition
CM 3 – Dérivées partielles, gradient
CM 4 – Différentielle, Jacobienne
CM 5 – Règle de la chaîne, Hessienne
CM 6 – Taylor, extrema locaux
CM 7 – Intégrales simples et doubles
CM 8 – Intégrales triples, aire, volume, centre de masse

Partie II : Champs de vecteurs

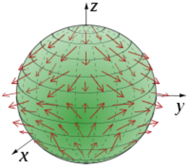
CM 9 – Champs scalaires et champs de vecteurs
CM 10 – Champs conservatifs et incompressibles
CM 11 – Courbes et circulation
CM 12 – Surfaces et flux

But du cours:

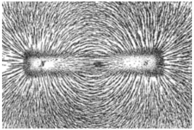
Champ scalaire
(lignes de niveau)



Champ de vecteur
sur la sphère



Lignes de champ
(dipole magnétique)



et aussi potentiels, circulation, flux...

Prérequis

1. **Espaces vectoriels et vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$**
   (produits scalaire, vectoriel et mixte).
2. **Applications linéaires et matrices**
   (produit, détérminant, matrice inverse).
3. **Géométrie cartesienne du plan et de l'espace**
   (droites, coniques, plans, quadriques).
4. **Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable**
   (graphes, dérivées, points critiques, extrema, Taylor, primitives).
5. **Équations différentielles du 1er ordre**.

Chapitre 4
Champs scalaires et champs de vecteurs

1. Champs et fonctions

Dans cette section:

- Repères et referentiels
- Dépendance des repères
- Loi de transformation d'un champ
- Dessin d'un champ

Repères et referentiels

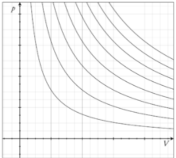
En physique, le **referentiel** est l'ensemble des *grandeurs* et de leurs *unité de mesure*. En mathématiques, le referentiel est représenté par un **repère** $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, où:

- la **direction** des vecteurs $\vec{e}_i$ represente les grandeurs,
- la **longueur** des vecteurs $\vec{e}_i$ represente l'unité de mesure,
- l'**origine** O donne la valeur zéro des grandeurs.

Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, les **coordonnées** $(x_1, \dots, x_n)$ telles que $\vec{x} = \sum x_i \, \vec{e}_i$ représentent les *mesures* des grandeurs $\vec{e}_i$.

Exemple – Dans un gaz parfait, la loi $PV = nRT$ décrit la relation entre la *pression* P, le *volume* V et la *temperature* T.

Les *isothermes* (courbes à temperature constante), sont dessinées dans l'espace $\mathbb{R}^2$ où l'on fixe le repère $(O, \vec{e}_V, \vec{e}_P)$ pour représenter le referentiel (V, P).



Lois dépendantes du changement de repère

Idée – Une *fonction* et un *champ* sont des lois qui associent à $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ une valeur $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. La différence entre fonctions et champs est dans la *dépendance des repères* sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$: les fonctions sont indépendantes des changement de repères, les champs en dépendent.

Exemple – On veut se ranger en file indienne devant la porte:

$x =$ grandeur qui décrit chaque personne de cette salle

$P(x) = \dfrac{x}{10} =$ position dans la file à partir de la porte

Si on change l'unité de mesure de x, la position dans la file ne change pas, mais comment se transforme-t-elle la loi $P(x)$ qui représente cette position?

On donne deux exemples: une loi qui ne dépend pas du changement de referentiel, et une qui en dépend.

Loi de transformation des fonctions

- **Loi basée sur l'age –**
  $x =$ age en années et $P(x) = \dfrac{x}{10}$ en mètres.

Si $u =$ age en mois, la même position est donnée par $\tilde{P}(u) = \dfrac{u}{120}$.
Par exemple, vu que $u = 12\,x$, on a:

$$P(10) = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{P}(120) = \frac{120}{120} = 1.$$

Quelle est la relation entre $\tilde{P}(u)$ et $P(x)$?

Le changement de variable est $x = h(u) = \dfrac{u}{12}$, et on a

$$P(x) = P\big(h(u)\big) = P\left(\frac{u}{12}\right) = \frac{u}{120} = \tilde{P}(u)$$

c'est-à-dire $\boxed{\tilde{P} = P \circ h}$.

C'est la <u>loi de transformation des fonctions</u> par changement de coordonnées.

Loi de transformation des champs

- **Loi basée sur la distance –**

x = distance du tableau en mètres, alors $P(x) = \dfrac{x}{10}$ est en mètres.

Si u = distance en centimètres, la position dans la file ne change pas, mais elle est exprimée en centimètres et on a $\tilde{P}(u) = \dfrac{u}{10}$.

Par exemple, vu que $u = 100\,x$, on a:

$$P(10) = \frac{10}{10} = 1m \quad \text{et} \quad \tilde{P}(1000) = \frac{1000}{10} = 100cm\ (= 1m).$$

Quelle est donc, cette fois, la relation entre $P(x)$ et $\tilde{P}(u)$?

Le changement de variable est $x = h(u) = \dfrac{u}{100}$, et on a

$$P(x) = P\big(h(u)\big) = P\Big(\frac{u}{100}\Big) = \frac{u}{1000} = \frac{\tilde{P}(u)}{100} \quad \text{donc } \tilde{P} \neq P \circ h!$$

La bonne loi de transformation est $\boxed{\quad \tilde{P} = H \circ P \circ h \quad}$, où

$$h(u) = \frac{u}{100} \quad \text{et} \quad H(z) = 100\ z = h^{-1}(z).$$

Champs de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

Definition – Un **champ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$** est une loi

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \ \vec{x} \mapsto F(\vec{x})$$

qui se transforme, par changement de coordonnées $\vec{x} = h(\vec{u})$, comme

$$\tilde{F}(\vec{u}) = H\big(F(\vec{x})\big) = H\Big(F\big(h(\vec{u})\big)\Big), \quad \text{pour tout } \vec{u} \in \mathbb{R}^n,$$

c'est-à-dire comme

$$\tilde{F} = H \circ F \circ h$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "H"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[u, "h"] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\tilde{F}"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

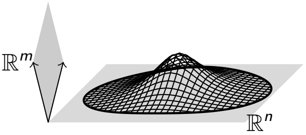
où $H : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est un <u>changement de repère sur $\mathbb{R}^m$</u> déterminé par l'application h.

Dessin d'un champs

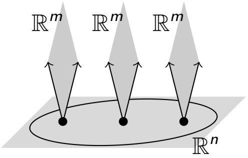
Remarque – Si $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto F(\vec{x})$ est un champ, le repère utilisé pour décrire la valeur $F(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ n'est pas libre, mais dépend de celui utilisé pour décrire $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi, un champ ne peut être representé par un graphe $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ comme si c'était une fonction (pour laquelle les repère de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont indépendants).

Définition – La **représentation graphique**, ou **dessin**, du champ F est l'ensemble des dessins de la valeur $F(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ au-dessus de chaque point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire dans un repère de $\mathbb{R}^m$ centré au point $\vec{x}$),



un seul repère pour le graphe d'une fonction vectorielle



union de repères pour le dessin d'un champ de vecteurs

2. Champs scalaires

Dans cette section:

- Champs scalaires de $\mathbb{R}^3$
- Surfaces de niveau
- Le potentiel gravitationnel V et le potentiel de Coulomb ϕ

Champs scalaires de R^3

Definition – Un **champ scalaire sur** $\mathbb{R}^3$ est un champ $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \phi(\vec{x})$ à valeurs dans les nombres.

• Si $\vec{x} = h(\vec{u})$, à priori on a $\tilde{\phi}(\vec{u}) = H\big(\phi(\vec{x})\big)$, où $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un changement de repère dans $\mathbb{R}$ déterminé par h.

• Dans $\mathbb{R}$ il y a une seule direction $\vec{\imath}$, donc H n'affecte que l'*unité de mesure*. Sans unités de mesure, on peut supposer $H(y) = y$.

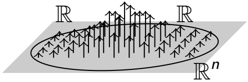
En maths, **un champ scalaire est assimilé à une fonction**

$$\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \; \vec{x} \mapsto \phi(x),$$

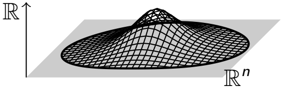
qui se transforme comme

$$\tilde{\phi}(\vec{u}) = \phi(\vec{x}) \quad \text{si} \quad \vec{x} = h(\vec{u})$$

et se représente avec un graphe usuel.



dessin d'un champ scalaire



graphe d'un champ scalaire comme fonction réelle

• Attention en physique, quand l'unité de mesure change!

Exemples de champs scalaires sur $\mathbb{R}^3$

Exemples –

• La *temperature* T et la *pression* P sont des champs scalaires en physique statistique.

• L'*altitude* n'est pas un champ mais une fonction (car la détérmination de l'endroit où on la mesure n'affecte pas le résultat).

• Le *volume* V n'est pas un champ scalaire (car il n'est pas défini sur les points de $\mathbb{R}^3$ mais pour des objets étendus).

La *densité volumique* ν est le champ scalaire qui permet de calculer le volume d'un objet (par intégration).

• La **distance** depuis l'origine: $\boxed{d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

En coordonnées sphériques: $\boxed{d(r,\varphi,\theta)=r}$

Ceci montre la signification de la variable r.

Exemples: potentiel gravitationnel et de Coulomb

• Le **potentiel gravitationnel** engendré par une masse M située à l'origine O:

$$V(x,y,z) = -\frac{G\,M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

où $G = 6,673 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}^2$ est la *constante gravitationnelle*.

En coordonnées sphériques: $\boxed{V(r,\varphi,\theta) = -\frac{G\,M}{r}}$.

• Le **potentiel électrostatique** ou **potentiel de Coulomb** engendré par une charge immobile Q située à l'origine O:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

où $\epsilon = 8.854 \times 10^{12}\,\mathrm{A\,s/V\,m}$ est la *permittivité diélectrique*.

En coordonnées sphériques: $\boxed{\phi(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r}}$.

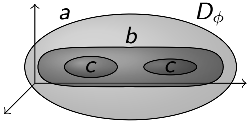
Surfaces de niveau

Définition – Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire.

• Comme une fonction f, ϕ est caractérisé par son **domaine de définition** $D_\phi \subset \mathbb{R}^3$, et il est **de classe** C^k s'il est différentiable jusqu'à l'ordre k.

• Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'analogue des *lignes de niveau* $L_a(f)$ d'une fonction f de deux variables est la **surface de niveau** a de ϕ:

$$S_a(\phi) = \Big\{(x,y,z) \in D_\phi \mid \phi(x,y,z) = a\Big\}.$$



N.B. – En général on ne sait pas tracer le graphe de ϕ, qui est dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice: potentiels gravitationnel et de Coulomb

Énoncé – *Pour le potentiel gravitationnel V et pour le potentiel de Coulomb ϕ, trouver les surfaces de niveau et dessiner le graphe comme fonctions de r.*

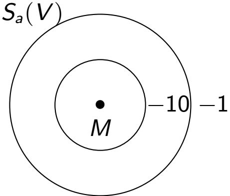
Réponse – En coordonnées sphériques, on a:

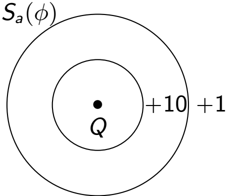
$$V(r,\varphi,\theta) = -\frac{G\,M}{r} \qquad \text{et} \qquad \phi(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

- Pour $a \in \mathbb{R}$, les surfaces de niveau a sont données par:

$$r = -\frac{G\,M}{a} \quad \text{si } a < 0 \qquad \text{et} \qquad r = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{a} \quad \text{si } a > 0$$

et sont donc des <u>sphères</u> centrées en l'origine



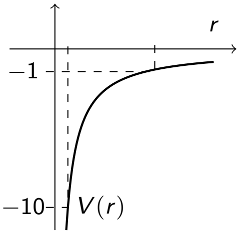


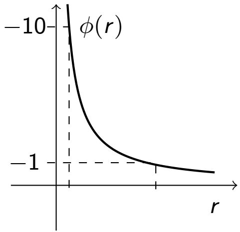
Exercice (suite)

• La différence entre le potentiel gravitationnel V et celui de Coulomb ϕ est dans le sens croissant des niveaux correspondants aux sphères: le graphe des potentiels

$$V(r,\varphi,\theta) = -\frac{G\,M}{r} \qquad \text{et} \qquad \phi(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

dans la seule variable $r > 0$ est:





3. Champs de vecteurs

Dans cette section:

- Champs de vecteurs
- Repères mobiles
- Lois de transformations en coordonnées cylindriques et sphériques
- Champ axial et champ central
- Lignes de champ
- Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le champ gravitationnel $\overrightarrow{\mathcal{G}}$

Champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Définition – Un **champ de vecteurs** ou **champ vectoriel** de $\mathbb{R}^3$ est un champ

$$\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \vec{x} \longmapsto \overrightarrow{V}(\vec{x})$$

à valeur dans les vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exemples –

• La *position* $\vec{x}$ des points, une *force* $\overrightarrow{F}$, les *champs gravitationnel* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$, *électrique* $\overrightarrow{E}$ et *magnétique* $\overrightarrow{B}$, ou encore le *potentiel magnétique* $\overrightarrow{A}$, sont des champs vectoriels.

• La *vitesse d'écoulement des points d'un fluide* est un champ de vecteurs. La *vitesse de déplacement d'un corps ponctuel* est un champ vectoriel, défini sur la trajectoire du corps.

• La vitesse de déplacement d'un *objet étendu qu'on ne peut pas identifier à son baricentre* n'est pas un champ vectoriel, car elle n'est pas définie sur des points.

Composantes cartesiennes d'un champ de vecteurs

Définition – Soit $\vec{x} \longmapsto \overrightarrow{V}(\vec{x})$ un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

- Si $\vec{x} = (x, y, z)$ est donné en coordonnées cartesiennes, on a

$$\overrightarrow{V}(\vec{x}) = V_x(\vec{x})\ \vec{\imath} + V_y(\vec{x})\ \vec{\jmath} + V_z(\vec{x})\ \vec{k},$$

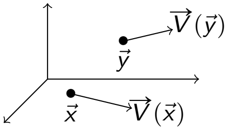
où $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est le repère cartesien de $\mathbb{R}^3$ centré au point $\vec{x}$, et $V_x, V_y, V_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles qui s'appellent **coefficients** ou **composantes** de $\overrightarrow{V}$.

- Le **domaine** de $\overrightarrow{V}$ est l'ensemble

$$D_{\overrightarrow{V}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \in D_{V_x},\ \vec{x} \in D_{V_y},\ \vec{x} \in D_{V_z} \right\}.$$

- Le champ est **de classe** C^k si ses coefficients le sont.

- Le **dessin** de $\overrightarrow{V}$ consiste des vecteurs $\overrightarrow{V}(\vec{x})$ appliqués aux points $\vec{x}$:



Loi de transformation d'un champ vectoriel

Remarque – Soit $\overrightarrow{V}$ un champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- Même si on ne considère pas les unités de mesure, un chmt de variables $\vec{x} = h(\vec{u})$ peut modifier le repère pour $\overrightarrow{V}(\vec{x})$, dans la direction des vecteurs.

- En général, si $\vec{x} = h(\vec{u})$, le champ $\overrightarrow{V}(\vec{x})$ se transforme en

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\overrightarrow{V}}(\vec{u}) &= H\big(\overrightarrow{V}(h(\vec{u}))\big) \\ &= \tilde{V}_x(\vec{u})\ H(\vec{\imath}) + \tilde{V}_y(\vec{u})\ H(\vec{\jmath}) + \tilde{V}_z(\vec{u})\ H(\vec{k}) \end{aligned}}$$

où $\tilde{V}_x(\vec{u}) = V_x\big(h(\vec{u})\big)$ (même chose pour $\tilde{V}_y$ et $\tilde{V}_z$),

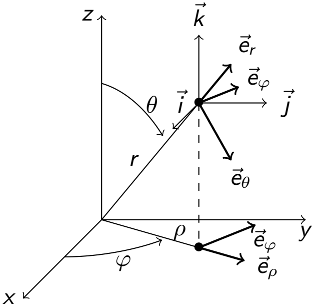
et $H(\vec{\imath})$, $H(\vec{\jmath})$, $H(\vec{k})$ sont les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ exprimés dans le nouveau repère de $\mathbb{R}^3$ déterminé par h, c'est-à-dire le repère $\big(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\big)$ qui permet de décrire $\vec{u} = u\,\vec{e}_1 + v\,\vec{e}_2 + w\,\vec{e}_3$ par les coordonnées (u, v, w).

Repères mobiles

Définition – Un **repère mobile** est un repère centré en tout point P variable, et qui dépend de la représentation en coordonnées de P: <u>les vecteurs indiquent la direction de variation des coordonnées de P</u>.

En particulier:

- **repère cartesien:**
  $$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$$
- **repère cylindrique:**
  $$\left(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k}\right)$$
- **repère sphérique:**
  $$\left(\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_\theta}\right)$$



Attention – Les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ ne changent pas de direction quand P bouge, mais les autres vecteurs si !

Transformations des repères cartesien, cylindrique et sphérique

Proposition – *Les transformations H entre les repères cartesien, cylindrique et sphérique, sont les suivantes:*

- **cartesien – cylindrique:**

Si $(x,y,z) = h(\rho,\varphi,z)$, *avec* $\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \ \cos\varphi \\ y = \rho \ \sin\varphi \\ z = z \end{array} \right.$ *, on a*

$$\left[\begin{array}{l} \vec{e_\rho} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath} \\ \vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{array} \right. \qquad et \qquad \left[\begin{array}{l} \vec{\imath} = \cos\varphi\ \vec{e_\rho} - \sin\varphi\ \vec{e_\varphi} \\ \vec{\jmath} = \sin\varphi\ \vec{e_\rho} + \cos\varphi\ \vec{e_\varphi} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{array} \right.$$

Preuve – La première formule vient de la définition des vecteurs $\vec{e_\rho}$, $\vec{e_\varphi}$, et la deuxième formule s'obtient en inversant le système donné par la première.

Transformations des repères cartesien, cylindriques et sphériques

- **cartesien – sphérique:**

Si $(x, y, z) = h(r, \varphi, \theta)$, *avec* $\begin{cases} x = r \ \cos\varphi \sin\theta \\ y = r \ \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \ \cos\theta \end{cases}$, *on a*

$$\left[\begin{array}{l} \vec{e_r} = \cos\varphi \ \sin\theta \ \vec{\imath} + \sin\varphi \ \sin\theta \ \vec{\jmath} + \cos\theta \ \vec{k} \\ \vec{e_\varphi} = -\sin\varphi \ \vec{\imath} + \cos\varphi \ \vec{\jmath} \\ \vec{e_\theta} = \cos\varphi \ \cos\theta \ \vec{\imath} + \sin\varphi \ \cos\theta \ \vec{\jmath} - \sin\theta \ \vec{k} \end{array}\right.$$

et

$$\left[\begin{array}{l} \vec{\imath} = \cos\varphi \ \sin\theta \ \vec{e_r} - \sin\varphi \ \vec{e_\varphi} + \cos\varphi \ \cos\theta \ \vec{e_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\varphi \ \sin\theta \ \vec{e_r} + \cos\varphi \ \vec{e_\varphi} + \sin\varphi \ \cos\theta \ \vec{e_\theta} \\ \vec{k} = \cos\theta \ \vec{e_r} - \sin\theta \ \vec{e_\theta} \end{array}\right.$$

Preuve – La première formule vient de la définition des vecteurs $\vec{e_r}$, $\vec{e_\varphi}$, $\vec{e_\theta}$ et la deuxième formule s'obtient en inversant le système donné par la première.

Champ vectoriel en coordonnées

Conclusion – Un champ vectoriel $\overrightarrow{V}(\vec{x})$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit dans le repère mobile de sa variable $\vec{x}$:

- en **coordonnées cartesiennes** (x, y, z):

$$\overrightarrow{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k},$$

- en **coordonnées cylindriques** (ρ, φ, z):

$$\overrightarrow{V} = V_\rho\,\vec{e_\rho} + V_\varphi\,\vec{e_\varphi} + V_z\,\vec{k},$$

- en **coordonnées sphériques** (r, φ, θ):

$$\overrightarrow{V} = V_r\,\vec{e_r} + V_\varphi\,\vec{e_\varphi} + V_\theta\,\vec{e_\theta},$$

où les coefficients V_x, etc, sont des fonctions $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

La **transformation** d'une forme à une autre est donnée par le **changement de coordonnées** usuel sur les coefficients, et par le **changement de repère** décrit ci-dessus sur les vecteurs.

Champ axial et champ central

Définition – Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ de $\mathbb{R}^3$ s'appelle:

• **Axial** s'il ne dépend que de la distance ρ d'un axe (supposons $\vec{k}$) et est dirigé dans la direction radiale (par rapport au "radius" ρ).

En coordonnées cylindrique, il s'écrit $\boxed{\overrightarrow{V}(\rho) = f(\rho)\,\vec{e_\rho}}$

• **Central** s'il ne dépend que de la distance r d'un point (supposons l'origine) et est dirigé dans la direction radiale (par rapport au "radius" r).

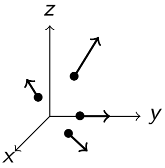
En coordonnées sphériques, il s'écrit $\boxed{\overrightarrow{V}(r) = f(r)\,\vec{e_r}}$

Exemples de champs vectoriels

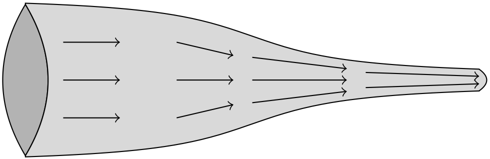
Exemples –

- Le **vecteur position** est le champ central

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x} &= x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \\ &= \rho\,\vec{e_\rho} + z\,\vec{k} \\ &= r\,\vec{e_r} \end{aligned}}$$



- La **vitesse d'écoulement d'un fluide**:



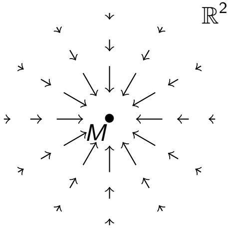
Exemples de champs vectoriels

• Le **champ gravitationnel** engendré par une masse M est le champ central

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GM}{r^2}\ \vec{e_r}}$$

Une masse m situé à distance r de M est soumise à la **force gravitationnelle**

$$\vec{F}(r) = m\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\ \vec{e_r}.$$

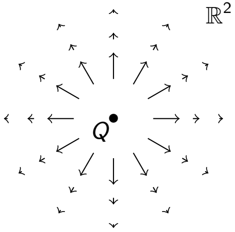


• Le **champ électrique** engendré par une charge Q est le champ central

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}\ \vec{e_r}}$$

Une charge q située à distance r de Q est soumise à la **force de Coulomb**

$$\vec{F}(r) = q\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Qq}{r^2}\ \vec{e_r}.$$

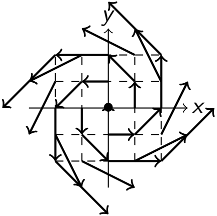


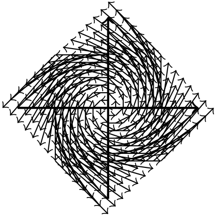
Exercices

Énoncé – *Trouver le domaine des champs de vecteurs suivants, les dessiner en un point générique de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$) et en deux ou trois points particuliers au choix. Enfin, exprimer ces champs en les autres coordonnées.*

- $\overrightarrow{V}(x,y) = (-y,x) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

Réponse –
Domaine $= \mathbb{R}^2$.





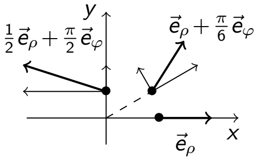
En coord. polaires:

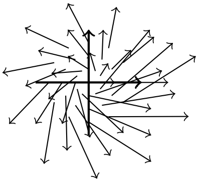
$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) &= -\rho\sin\varphi\,\big(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}\big) + \rho\cos\varphi\,\big(\sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \cos\varphi\,\vec{e_\varphi}\big)\\ &= \rho\,\big(-\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi\big)\,\vec{e_\rho} + \rho\,\big(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\big)\,\vec{e_\varphi}\\ &= \boxed{\rho\ \vec{e_\varphi}}.\end{aligned}$$

Exercices

- $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \rho\ \vec{e_\rho} + \varphi\ \vec{e_\varphi}$

Réponse – $\rho > 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$, ainsi $D_V = R_+^* \times [0, 2\pi[$.



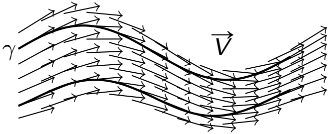


En coord. cartesiennes:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(x,y) &= \rho\left(\cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}\right) + \varphi\left(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}\right) \\
&= \left(\rho\cos\varphi - \varphi\sin\varphi\right)\vec{\imath} + \left(\rho\sin\varphi + \varphi\cos\varphi\right)\vec{\jmath} \\
&= \left(x - \arctan\frac{y}{x}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{\imath} \\
&\qquad + \left(y + \arctan\frac{y}{x}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{\jmath} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ et } y > 0.
\end{aligned}$$

Lignes de champ

Définition – Les **lignes de champ** ou **courbes intégrales** d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ sont les courbes γ qui ont $\overrightarrow{V}(\vec{x})$ comme vecteur tangent en tout point $\vec{x} \in \gamma$.



- Si γ est une **courbe paramétrée** par $\vec{x}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, avec $t \in \mathbb{R}$, le **vecteur tangent à γ au point** $\vec{x}(t)$ est le vecteur des dérivées

$$\dot{\vec{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

- Alors γ est une ligne de champ pour $\overrightarrow{V} = V_x \vec{\imath} + V_y \vec{\jmath} + V_z \vec{k}$ si et seulement si, pour tout t, on a:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \overrightarrow{V}(\vec{x}(t)) \quad \text{c-à-d} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = V_x\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ \dot{y}(t) = V_y\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ \dot{z}(t) = V_z\big(x(t), y(t), z(t)\big) \end{cases}$$

- Par tout point fixé $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ il passe <u>une seule</u> ligne de champ.

Exercice

Énoncé – *Trouver et dessiner les lignes de champ des champs de vecteurs suivants.*

- $\overrightarrow{V}(x, y, z) = (-y, x, 0) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

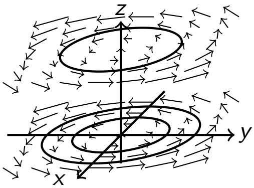
Réponse – $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ décrit une ligne de champ si:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\big) \\ &= \overrightarrow{V}\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ &= \big(-y(t), x(t), 0\big) \end{aligned} \quad \text{c.-à-d.} \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) \\ \dot{z}(t) &= 0 \end{aligned} \right. .$$

Ainsi $\dot{x}(t)\,x(t) + \dot{y}(t)\,y(t) = \dfrac{d}{dt}\big(x(t)^2 + y(t)^2\big) = 0,$ et donc

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t)^2 + y(t)^2 \text{ est constant} \\ z(t) \text{ est constant} \end{array} \right. .$$

Au final, γ decrit un cercle sur un plan horizontal centré sur l'axe Oz.



Exercice

- **Champ gravitationnel**: $\overrightarrow{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}\ \vec{e}_r.$

Réponse – Les lignes de champ de $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ donnent la *trajectoire* d'un corps sousmis à la force gravitationnelle exercée par la masse M.

- En coord. sphériques, une courbe paramétrée γ est donnée par

$$r(t) \in]0, \infty[\,, \quad \varphi(t) \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad \theta(t) \in]0, \pi[.$$

- Les points de la courbe sont donnés par les vecteurs positions

$$\vec{x}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t),$$

où le vecteur $\vec{e}_r$ dépend aussi de t car il <u>change de direction</u> avec le point $\vec{x}(t)$ (contrairement à $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$).

- Le vecteur tangent à γ au point $\vec{x}(t)$ est donc

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\,\dot{\vec{e}}_r(t).$$

- Pour trouver les lignes de champ, il nous faut un petit lemme.

Dérivée d'un vecteur à norme constante

Lemme – *Soit $\vec{u} = \vec{u}(t)$ un vecteur paramétré par $t \in \mathbb{R}$. Si $\vec{u}$ a norme constante non nulle, c-à-d $||\vec{u}(t)|| = c \neq 0$, alors le vecteur dérivé $\dot{\vec{u}}$ est toujours orthogonal à $\vec{u}$, c-à-d*

$$\vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t) = 0 \quad \textit{pour tout } t \qquad \textit{(produit scalaire).}$$

Preuve – On écrit $||\vec{u}(t)|| = \sqrt{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)}$ et on dérive:

$$\begin{aligned} \Big(||\vec{u}(t)||\Big)' &= \Big(\sqrt{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)}\Big)' = \frac{\dot{\vec{u}}(t) \cdot \vec{u}(t) + \vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t)}{2\sqrt{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)}} \\ &= \frac{2\ \vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t)}{2\sqrt{\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)}} = \frac{\vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t)}{||\vec{u}(t)||} \end{aligned}$$

On a donc

$$||\vec{u}(t)|| = c \quad \Leftrightarrow \quad \Big(||\vec{u}(t)||\Big)' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t) = 0. \quad \square$$

Exercice (suite)

- Resumé: pour une courbe γ en coordonnées sphérique

$$\vec{x}(t) = r(t)\, \vec{e_r}(t),$$

le vecteur tangent est

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{r}(t)\, \vec{e_r}(t) + r(t)\, \dot{\vec{e_r}}(t),$$

et, puisque $\vec{e_r}(t)$ a norme constante 1, le vecteur $\dot{\vec{e_r}}(t)$ est orthogonal à $\vec{e_r}(t)$, c-à-d avec seulement des composantes dans les directions $\vec{e_\varphi}(t)$ et $\vec{e_\theta}(t)$.

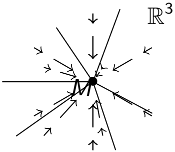
- Alors γ est une ligne de champ de $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ si

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= \dot{r}(t)\ \vec{e_r}(t) + r(t)\ \dot{\vec{e_r}}(t) \\ &= \overrightarrow{\mathcal{G}}\left(\vec{x}(t)\right) = -\frac{GM}{r(t)^2}\ \vec{e_r}(t) \end{aligned}$$

c'est-à-dire si $\begin{cases} \dot{r}(t) = -\dfrac{GM}{r(t)^2} & (1) \\ \dot{\vec{e_r}}(t) = 0 & (2) \end{cases}$.

Exercice (suite)

• (2) dit que $\vec{e_r}(t)$ est constant.
Donc les lignes de champ sont des droites *radiales* centrées en M.



• (1) donne la distance $r(t)$ de M:

$$\dot{r}(t) = -\frac{GM}{r(t)^2} \quad \Rightarrow \quad r(t)^2 \, \dot{r}(t) = \frac{1}{3} \, \frac{d}{dt}\big(r(t)^3\big) = -GM$$

$$\Rightarrow \quad r(t)^3 = -3GM\, t + r_0^3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r(t) = \sqrt[3]{r_0^3 - 3GM\, t}}$$

où $r_0 = r(0)$ est la distance initiale du corps de M.
Pour que $r(t)$ soit positif, il faut que $t \leqslant r_0^3/3GM$.

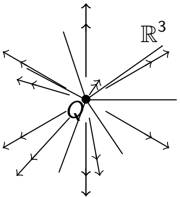
• En somme, un corps qui se trouve distance r_0 de M est attiré par la masse (car $r(t)$ diminue quand t augmente), et la touche à l'instant $t = r_0^3/3GM$. Les lignes de champ sont orientée vers M: le champ gravitationnel est **attractif**.

Exercice (suite)

- **Champ électrique**: $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon}\dfrac{Q}{r^2}\ \vec{e_r}$

  Réponse brève – Les lignes de champ sont aussi des droites radiales, passant par la position de la charge Q qui engendre le champ.

  Cette fois, les lignes de champs sont orientée vers l'extérieur: le champ électrique est **répulsif**.



4. Champs conservatifs

Dans cette section:

- Gradient
- Potentiel scalaire et champs conservatifs
- Rotationnel
- Champs irrotationnels
- Ensembles connexes, simplement connexes, contractiles
- Lemme de Poincaré (cas simplement connexe)
- Calcul du potentiel scalaire
- Le champ électrique $\vec{E}$ et le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$

Gradient d'un champ scalaire

Définition – Soit $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire. Le **gradient** de ϕ est le champ de vecteurs $\vec{\nabla}\phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ sur D donné par les expressions:

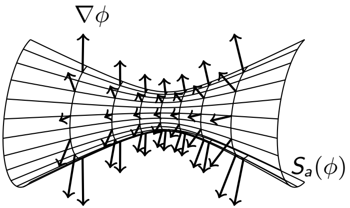
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\vec{k} \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\vec{k} \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\,\vec{e_\theta}.
\end{aligned}$$

Exemple – Le gradient de $\phi(r,\varphi,\theta) = r\varphi\sin\theta$ est

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\phi(r,\varphi,\theta) &= \frac{\partial(r\varphi\sin\theta)}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\varphi\sin\theta)}{\partial\varphi}\,\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}\,\vec{e_\theta} \\
&= \varphi\sin\theta\,\vec{e_r} + \frac{r\sin\theta}{r\sin\theta}\,\vec{e_\varphi} + \frac{r\varphi\cos\theta}{r}\,\vec{e_\theta} \\
&= \varphi\sin\theta\,\vec{e_r} + \vec{e_\varphi} + \varphi\cos\theta\,\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

Propriétés du gradient

Proposition – *Le gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est orthogonal aux surfaces de niveau de ϕ en tout point, et indique le sens de plus forte croissance de ϕ.*



Proposition – *Le gradient $\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}$ est un* opérateur linéaire *agissant sur les champs scalaires (ici f et g):*

$$\overrightarrow{\nabla}(\lambda f + \mu g) = \lambda \overrightarrow{\nabla} f + \mu \overrightarrow{\nabla} g, \quad \textit{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Sur un produit, il agit par la règle de Leibniz:

$$\overrightarrow{\nabla}(f\,g) = \left(\overrightarrow{\nabla} f\right) g + f \left(\overrightarrow{\nabla} g\right).$$

Potentiel scalaire et champ conservatif

Définition –

• On appelle **champ de gradient** tout champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ qui est le gradient d'un champ scalaire ϕ, c'est-à-dire de la forme

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi.$$

• Une force $\overrightarrow{F}$ est **conservative** si, quand elle agit sur un système isolé, l'*énérgie mécanique* du système est conservée.

Si on voit $\overrightarrow{F}$ comme un champ de force, cela arrive s'il existe un champ scalaire ϕ tel que

$$\overrightarrow{F} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi.$$

Dans ce cas, le champ ϕ s'appelle **potentiel (scalaire)** de $\overrightarrow{F}$.

• Donc <u>le potentiel de $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}\phi$ est le champ $-\phi$</u>!

Exemples de forces conservatives

Exemples –

• La force gravitationnelle $\overrightarrow{F}(r) = m\overrightarrow{\mathcal{G}}(r)$ et la force de Coulomb $\overrightarrow{F}(r) = q\overrightarrow{E}(r)$ sont conservatives.

Justement: quel est leur potentiel?

• La *force de Lorentz* (due à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$), la *pression*, le *frottement* ou un *choc* sont des forces non-conservatives.

Questions –

• Comment savoir si une force $\overrightarrow{F}$ est conservative?

• Si elle l'est, comment trouver son potentiel?

Rotationnel d'un champ vectoriel

Définition – Soit $\vec{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. Le **rotationnel de** $\vec{V}$ est le champ de vecteurs sur D, noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$ (produit vectoriel, en France $\wedge$), donné par:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{\imath} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k}
\end{aligned}
$$

$$
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e_\varphi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{k}
$$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} &= \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial (\sin\theta\, V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e_r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e_\varphi} \\
&\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r V_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e_\theta}
\end{aligned}
$$

Exemples de rotationnel

Exemples – En coordonnées cartesiennes:

- $\overrightarrow{V}(x,y,z) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial(-y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\vec{k} \\ &= 0\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + (1+1)\,\vec{k} = 2\,\vec{k}. \end{aligned}$$

- $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + 2xy\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}(x,y,z) &= 0\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + (2y)\,\vec{k} \\ &= 2y\,\vec{k}. \end{aligned}$$

Exemples de rotationnel

Exemples – En coordonnées cylindriques et sphériques:

- $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \sin\varphi\,\vec{e_\rho} + \rho\,\vec{k}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(\rho,\varphi,z) &= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\varphi} - \frac{\partial 0}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial\sin\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\rho}{\partial\rho}\right)\vec{e_\varphi} \\ &\qquad + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho\cdot 0)}{\partial\rho} - \frac{\partial\sin\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{k} \\ &= -\vec{e_\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\rho}\,\vec{k}.\end{aligned}$$

- $\vec{V}(r,\varphi,\theta) = \sin\varphi\,\vec{e_r} + r\,\vec{e_\theta}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(r,\varphi,\theta) &= \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\cdot 0)}{\partial\theta} - \frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r^2}{\partial r} - \frac{\partial\sin\varphi}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi} \\ &\qquad + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\sin\varphi}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r\cdot 0)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} \\ &= 0\,\vec{e_r} + \frac{2r}{r}\,\vec{e_\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\,\vec{e_\theta} \\ &= 2\,\vec{e_\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}\,\vec{e_\theta}.\end{aligned}$$

Champs irrotationnels

Proposition – *Le rotationnel est un* opérateur linéaire *agissant sur les champs de vecteurs (ici $\vec{U}$ et $\vec{V}$):*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\lambda\,\vec{U} + \mu\,\vec{V}) = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} + \mu\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}, \quad \textit{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

et satisfait l'identité

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) = 0, \qquad \textit{pour tout champ scalaire } \phi.$$

Définition – Un champ de vecteurs $\vec{V}$ se dit **irrotationnel** si

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = 0.$$

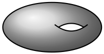
- Donc <u>tout champ de gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ est irrotationnel</u>.

- Mais un champ irrotationnel <u>n'est pas toujours</u> un gradient! Pour savoir s'il l'est, il existe un critère basé sur les proprietés *topologiques* du domaine D du champ.

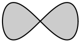
Ensembles simplement connexes et contractiles

Définition – Un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ s'appelle:

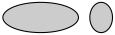
• **Connexe** si tous les points de D peuvent être joint par une courbe contenue dans D.



connexe



connexe



non connexe

• **Simplement connexe** s'il est connexe et toute courbe fermée dans D peut être déformée en un point.

simpl. connexe

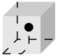
non simpl. connexe

$\mathbb{R}^n$ simpl. connexe

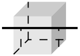
$\mathbb{R}^2 \setminus$ point, $\mathbb{R}^3 \setminus$ droite non simpl. connexe

• **Contractile** si on peut déformer l'espace entier D en un point.

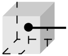
contractile



non contractile simpl. connexe



non contractile non simpl. connexe



contractile

Lemme de Poincaré (cas simplement connexe)

Théorème – Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ et soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble simplement connexe. Alors:

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \quad \text{sur } D \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = 0 \quad \text{sur } D.$$

• Ainsi, si $\vec{F}$ est un champ de force sur $D \subset \mathbb{R}^3$:

> Si D est **simplement connexe**:
>
> $\vec{F}$ **est conservative** (a un potentiel scalaire) $\Longleftrightarrow$ $\vec{F}$ **est un champ irrotationnel**

• **Attention –** On ne peut rien dire sur $\vec{F}$ si D n'est pas simplement connexe: tout peut arriver!

Calcul du potentiel scalaire

Problème – *Soit $\overrightarrow{V}$ un champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} = 0$, défini sur un domaine D simplement connexe.*
Trouver son potentiel scalaire ϕ, tel que $\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{\nabla}\phi$.

Méthode – Pour simplifier, on cherche l'opposé de ϕ: une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} f$. En coordonnées cartesiennes:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = V_x, \qquad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = V_y, \qquad (3) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = V_z.$$

• On intègre (1) et on trouve

$$f(x,y,z) = \int V_x(x,y,z)\,dx + g(y,z). \quad (4)$$

• On dérive f par rapport à y, on trouve $\frac{\partial g}{\partial y}$ avec (2) et on l'intègre:

$$g(y,z) = \int \frac{\partial g}{\partial y}(y,z)\,dy + h(z). \quad (5)$$

• On met (5) dans (4) pour obtenir à nouveau f. On dérive f par rapport à z et on utilise (3) pour trouver $h'(z)$ et donc $h(z)$.

• À rebour, on insère $h(z)$ dans (5) pour avoir $g(y,z)$, qu'on met dans (4), et on obtient enfin $f(x,y,z)$.

Exemple: calcul du potentiel scalaire

Exemple – Soit $\vec{V}(x,y,z) = 2xy\,\vec{\imath} + (x^2+z)\,\vec{\jmath} + y\,\vec{k}$.

• D'abord on vérifie que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = 0$.

• Puisque $\vec{V}$ est défini sur tout $\mathbb{R}^3$, qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on sait que $\vec{V}$ est un champ de gradient.

• Cherchons la fonction f telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$. On a

$$(1)\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \qquad (2)\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2+z, \qquad (3)\quad \frac{\partial f}{\partial z} = y.$$

• (1) donne $f(x,y,z) = \displaystyle\int 2xy\,dx + g(y,z) = x^2y + g(y,z)$.

• (2) donne $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + z$, d'où suit $\frac{\partial g}{\partial y} = z$,
ensuite $g(y,z) = \displaystyle\int z\,dy + h(z) = zy + h(z)$
et enfin $f(x,y,z) = x^2y + zy + h(z)$.

• (3) donne $\frac{\partial f}{\partial z} = y + h'(z) = y$, d'où $h'(z) = 0$ et $h(z) = c$.

• On a alors $\boxed{f(x,y,z) = x^2y + zy + c}$.

Exemple: potentiel du champ gravitationnel

Exemple – Soit $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}$ le champ gravitationnel.

• D'abord, vérifions qu'il admet un potentiel:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{G}}(r) = -\tfrac{1}{r}\,\tfrac{\partial}{\partial\theta}\left(-\tfrac{GM}{r^2}\right)\,\vec{e_\varphi} + \tfrac{1}{r\sin\theta}\,\tfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\tfrac{GM}{r^2}\right)\,\vec{e_\theta} = 0.$$

• Le champ $\vec{\mathcal{G}}$ est défini sur $D = \{(r,\varphi,\theta) \mid r > 0\} = \mathbb{R}^3\setminus$origine, qui est simplement connexe. Par le Lemme de Poincaré, $\vec{\mathcal{G}}$ admet donc un potentiel scalaire.

• En coordonnées sphériques: cherchons une fonction $\phi(r,\varphi,\theta)$ telle que $\vec{\mathcal{G}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$, c'est-à-dire

$$-\tfrac{\partial\phi}{\partial r}\,\vec{e_r} - \tfrac{1}{r\sin\theta}\,\tfrac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\vec{e_\varphi} - \tfrac{1}{r}\,\tfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\,\vec{e_\theta} = -\tfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_r},$$

Cela donne les équations

$$(1)\quad \tfrac{\partial\phi}{\partial r} = \tfrac{GM}{r^2}, \qquad (2)\quad \tfrac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0, \qquad (3)\quad \tfrac{\partial\phi}{\partial\theta} = 0.$$

• (2) et (3) disent que ϕ ne dépend pas de φ et de θ.

• (1) devient alors $\phi'(r) = \frac{GM}{r^2}$, d'où suit $\phi(r) = -\frac{GM}{r} = V(r)$.

5. Champs incompressibles

Dans cette section:

- Divergence
- Champs à divergence nulle (incompressibles, solénoïdaux)
- Potentiel vectoriel
- Lemme de Poincaré (cas contractile)
- Calcul du potentiel vectoriel
- Le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ et son potentiel $\overrightarrow{A}$

Divergence

Définition – Soit $\overrightarrow{V} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs. La **divergence** de $\overrightarrow{V}$ est le champ scalaire sur D, noté $\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{V}$ (produit scalaire), donné par:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\
\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} &= \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial(\rho\, V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\
\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} &= \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial(r^2\, V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial(\sin\theta\, V_\theta)}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

Exemples –

- $\overrightarrow{V}(x,y) = -y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{div}\,\overrightarrow{V}(x,y) = 0.$

- $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + 2xy\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \quad \Longrightarrow$
$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\overrightarrow{V}(x,y,z) &= 2x + 2x + 1 \\
&= 4x + 1
\end{aligned}.$$

- $\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon}\,\dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{r^2}{r^2}\right) = 0$

Propriétés de la divergence

Proposition – *La divergence est un* opérateur linéaire *agissant sur les champs de vecteurs (ici $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$):*

$$\mathrm{div}\,(\lambda\,\overrightarrow{U} + \mu\,\overrightarrow{V}) = \lambda\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{U} + \mu\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{V}, \qquad \textit{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

et satisfait aux identités suivantes:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(\phi\overrightarrow{V}) &= \phi\,\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi\cdot\overrightarrow{V} \\
\mathrm{div}\,(\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}) &= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{U})\cdot\overrightarrow{V} - \overrightarrow{U}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{V}) \\
\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) &= \Delta\phi \qquad \textit{(= Laplacien)} \\
\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\overrightarrow{V}) &= \Delta\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} \qquad (\Delta\overrightarrow{V} = \textit{Laplacien vectoriel}) \\
\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}) &= 0
\end{aligned}$$

pour tout champ scalaire ϕ.

Champs à divergence nulle, incompressibles, solénoïdaux

Définition –

• Un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ est **à divergence nulle** si $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$.

• Un fluide est **incompressible** si son volume reste constant quand il est sousmis à une pression. (Par exemple, un liquide est consideré incompressible, un gaz non.) Cela arrive si le champ $\overrightarrow{V}$ qui décrit la *vitesse d'écoulement* du fluide a divergence nulle.

• Un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ qui décrit un *courant de matière* est dit **solénoïdal** (du grèque *sôlen* = tuyau) si le volume de matière transportée est constant (comme s'il était contraint dans un tuyau): cela arrive si $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$.

Exemple – Un champ de gradient $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi$ est solénoïdal si

$$\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \phi) = \Delta\phi = 0,$$

c'est-à-dire si la fonction ϕ est harmonique.

Potentiel vectoriel et invariance de jauge

Définition – Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs. On appelle **potentiel vectoriel** de $\overrightarrow{V}$ un champ $\overrightarrow{U}$ tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$.

Proposition –

• *Si le champ $\overrightarrow{V}$ admet un potentiel vectoriel, alors $\overrightarrow{V}$ est à divergence nulle.* (Car $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$ et $\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = 0$.)

• *Si $\overrightarrow{U}$ est un potentiel de $\overrightarrow{V}$, alors $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ l'est aussi, quelconque soit le champ scalaire ϕ.*

(En effet, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V},$$

car $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi = 0$ pour tout ϕ.)

Définition – Le remplacement $\overrightarrow{U} \to \overrightarrow{U} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ s'appelle **transformation de jauge**, la liberté dans le choix du potentiel vectoriel est due à l'**invariance de jauge** du champ $\overrightarrow{V}$ et le choix d'un potentiel s'appelle **choix de jauge**.

Lemme de Poincaré (cas contractile)

Remarque – Si $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$ alors $\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = 0$, mais si $\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = 0$ alors $\overrightarrow{V}$ n'est pas toujours $= \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U}$!

Théorème – Soit $\overrightarrow{V}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ et soit $D \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble contractile. Alors:

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} \quad \text{sur } D \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = 0 \quad \text{sur } D.$$

- Ainsi, si $\overrightarrow{V}$ est un champ de vecteurs sur $D \subset \mathbb{R}^3$:

Si D est **contractile**:		
$\overrightarrow{V}$ **admet un potentiel vectoriel**	$\Longleftrightarrow$	$\overrightarrow{V}$ **est à divergence nulle** (incompressible / solénoïdal)

- **Attention –** On ne peut rien dire sur $\overrightarrow{V}$ si D n'est pas contractile: tout peut arriver!

Calcul du potentiel vectoriel

Problème – *Soit $\overrightarrow{V}$ un champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$, défini sur un ensemble contractile. Trouver son potentiel vectoriel $\overrightarrow{U}$, tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{U}$.*

Méthode – En coordonnées cartesiennes, le potentiel vectoriel de $\overrightarrow{V}$ est un champ $\overrightarrow{U} = f\,\vec{\imath} + g\,\vec{\jmath} + h\,\vec{k}$ défini sur D tel que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{U}$, c'est-à-dire

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = V_x, \quad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} = V_y, \quad (3) \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = V_z.$$

• Il s'agit de trouver les trois fonctions f, g et h à travers leurs dérivées partielles (9 en tout) à partir de seulement 3 équations différentielles du 1er ordre qui les relient.

• Ce système se résout par intégrations successives (comme pour le potentiel scalaire), mais n'a pas de réponse unique: mis à part les constantes, il y a en plus 6 $(= 9 - 3)$ choix à faire!

Cas particulier de champ et de potentiel

Cas particulier – Si $\overrightarrow{V} = V_z \,\vec{k}$ (c-à-d $V_x = V_y = 0$), avec

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,$$

et on choisit $h = 0$ (ce qui fixe 3 conditions sur les 6 libres), il ne reste qu'un potentiel de la forme $\overrightarrow{U} = f\,\vec{\imath} + g\,\vec{\jmath}$ sousmis aux équations

$$(1) \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \quad (2) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (3) \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = V_z.$$

• (1) et (2) assurent que f et g ne dépendent pas de z.

• Pour resoudre (3), il faut encore fixer arbitrairement $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ (2 conditions), plus l'une des deux dérivées $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou $\frac{\partial g}{\partial x}$ (dernière condition libre).

Exemple: calcul de potentiel vectoriel

Exemple – Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z) = (xy^2 - x^3y)\,\vec{k}$.

- D'abord, vérifions qu'il admet un potentiel vectoriel:

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial(xy^2 - x^3y)}{\partial z} = 0.$$

- Puisque $D_{\overrightarrow{V}} = \mathbb{R}^3$ est contractile, par le Lemme de Poincaré $\overrightarrow{V}$ admet un potentiel vectoriel $\overrightarrow{U}$ défini sur tout $\mathbb{R}^3$.

- Cherchons $\overrightarrow{U}$ sous la forme

$$\overrightarrow{U}(x,y,z) = f(x,y)\,\vec{\imath} + g(x,y)\,\vec{\jmath}$$

($h = 0$ et donc $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$) tel que

$$(3) \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2 - x^3y.$$

Exemple (suite)

Solution 1: on choisit

$$\frac{\partial g}{\partial x} = xy^2 \quad \Rightarrow \quad g(x,y) = \int xy^2\,dx + G(y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + G(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3y \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int x^3y\,dy + F(x) = \frac{1}{2}x^3y^2 + F(x)$$

où $F(x)$ et $G(y)$ sont des fonctions arbitraires. On a donc

$$\vec{U}_1(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x^3y^2 + F(x)\right)\vec{\imath} + \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + G(y)\right)\vec{\jmath}.$$

Solution 2: on choisit

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x,y) = G'(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3y - xy^2 \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int (x^3y - xy^2)\,dy + F'(x) = \tfrac{1}{2}x^3y^2 - \tfrac{1}{3}xy^3 + F'(x)$$

où $F'(x)$ et $G'(y)$ sont des fonctions arbitraires. On a alors

$$\vec{U}_2(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{1}{3}xy^3 + F'(x)\right)\vec{\imath} + G'(y)\vec{\jmath}.$$

Exemple (suite)

Transformation de jauge – La différence entre les deux solutions trouvées est donnée par le gradient d'une fonction: en posant toutes les fonctions F, G, F' et G' égales à zéro, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{U}_1(x,y,z) - \overrightarrow{U}_2(x,y,z) &= \tfrac{1}{3}xy^3\,\vec{\imath} + \tfrac{1}{2}x^2y^2\,\vec{\jmath} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\left(\tfrac{1}{6}x^2y^3 + c\right). \end{aligned}$$

Exercice: le champ magnétique

Énoncé – *Un courant d'intensité I qui passe dans un fil droit placé sur l'axe $\vec{k}$ engendre le* **champ magnétique** *(statique)*

$$\overrightarrow{B}(x,y,z) = \frac{\mu I}{2\pi}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}\Big),$$

où μ est la permeabilité magnétique. *La force que $\overrightarrow{B}$ exerce sur une charge q placée en position (x,y,z) est donnée par*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = q\,\overrightarrow{B}(x,y,z)$$

et s'appelle **force de Lorentz**.

1) *Trouver le domaine de définition de $\overrightarrow{B}$, son expression en coordonnées cylindriques et en dessiner quelques valeurs.*

Réponse –

- $D_{\vec{B}} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\neq 0\big\} \quad = \quad \mathbb{R}^3$ privé de l'axe $\vec{k}$

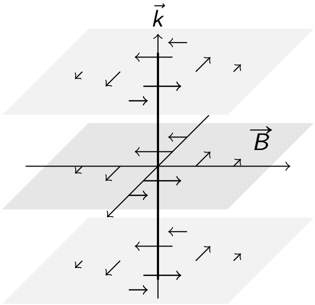
Donc $\underline{D_{\vec{B}}\text{ n'est pas simplement connexe}}$ (et $\underline{\text{pas contractile}}$).

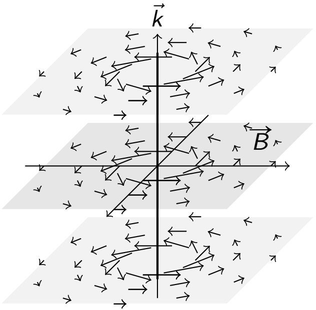
Exercice: le champ magnétique

- L'expression de $\overrightarrow{B}(x,y,z) = \frac{\mu I}{2\pi}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\jmath}\right)$ en coordonnées cylindriques est:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B}(\rho,\varphi,z) &= \frac{\mu I}{2\pi}\left(-\frac{\rho\sin\varphi}{\rho^2}\vec{\imath} + \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}\vec{\jmath}\right) \\ &= \boxed{\frac{\mu I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}}.\end{aligned}$$

- Le dessin de $\overrightarrow{B}$ est alors:





Exercice: le champ magnétique

2) *La force de Lorentz* $\overrightarrow{F} = q\,\overrightarrow{B} = \frac{\mu\, I\, q}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$ *est-elle conservative? Autrement dit, le champ* $\overrightarrow{B}$ *admet-il un potentiel scalaire?*

Réponse –

- On a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right)\,\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{1}{\rho}\right)\,\vec{k}\right] = 0.$$

Par le lemme de Poincaré alors, on sait qu'un potentiel scalaire ϕ existe sur tout sous-ensemble $D \subset D_{\vec{B}}$ simplement connexe, par exemple sur $D = \mathbb{R}^3$ privé du demi-plan $\varphi = 0$.

- Calculons ϕ tel que $\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ sur un D simplement connexe:

$$(1)\quad -\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = 0 \qquad (2)\quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho} \qquad (3)\quad -\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$$

(1) et (3) disent que ϕ ne dépend pas de ρ et de z.

(2) s'écrit $\quad \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = -\frac{\mu_0\, I}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\phi(\varphi) = -\frac{\mu_0\, I}{2\pi}\,(\varphi + \varphi_0)}$.

Exercice: le champ magnétique

• Or, le potentiel $\phi(\varphi) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\varphi + \varphi_0)$ est bien défini seulement si φ ne fait pas un tour complet autour de l'axe $\vec{k}$!

En effet, si φ peut faire un tour complet, au même point physique donné en coordonnées polaires par φ_0 ou $\varphi_0 + 2\pi$, on a deux valeurs distinctes du champ

$$\phi_0 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\varphi_0 \quad \text{et} \quad \phi_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}(\varphi_0 + 2\pi),$$

ce qui n'a pas de sens.

• En conclusion, le champ $\overrightarrow{B}$ n'a pas de potentiel scalaire sur tout son domaine de définition.

Par conséquent, la force de Lorentz n'est pas conservative, dès qu'on considère des tours complets autour du fil.

• L'effet physique est bien visible: si une particule chargée, sousmise à la force de Lorentz, fait un tour complet du fil, elle aquiert une *énergie potentielle* qui se manifeste à la fin du tour par un tourbillonement (*spin*)!

Exercice: le champ magnétique

3) *Le champ $\overrightarrow{B}$ admet-il un potentiel vecteur?*

Réponse –

- On a
$$\operatorname{div} \overrightarrow{B}(\rho,\varphi,z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

Par le lemme de Poincaré alors, on sait qu'un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ existe sur tout sous-enemble $D \subset D_{\vec{B}}$ contractile,
par exemple $D = \mathbb{R}^3$ privé du demi-plan $\varphi = 0$.

- Calculons $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$ sur un D contractile. En générale:
$$\overrightarrow{A}(\rho,\varphi,z) = f(\rho,\varphi,z)\,\vec{e_\rho} + g(\rho,\varphi,z)\,\vec{e_\varphi} + h(\rho,\varphi,z)\,\vec{k}$$

est sousmis aux équations

$$(1)\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial h}{\partial\varphi} - \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \qquad (2)\quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{\rho} \qquad (3)\quad \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho g)}{\partial\rho} - \frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) = 0$$

et on a six choix à faire pour avoir une solution (plus des constantes).

Exercice: le champ magnétique

- On choisit $f = g = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$, alors on a:

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0 \quad \Longrightarrow \quad h \text{ ne dépend pas de } \varphi \quad (\text{choix: } \varphi_0 = 0)$$

$$(2) \quad \frac{\partial h}{\partial \rho} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \quad \Longrightarrow \quad h(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho \quad (\text{choix: } \rho_0 = 1)$$

Avec ces choix, l'expression du **potentiel magnétique** $\overrightarrow{A}$ est

$$\boxed{\overrightarrow{A}(\rho) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(\rho)\, \vec{k}} \,.$$

- Contrairement au potentiel scalaire ϕ, le potentiel magnétique $\overrightarrow{A}$ est bien défini partout sauf en $\rho = 0$:

$$D_{\vec{A}} = D_{\vec{B}}.$$

En conclusion, le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ admet bien un potentiel vectoriel sur tout son domaine de définition!