Fascicule d'exercices pour l'UE Math2

Printemps 2015

Responsables : Vincent Borrelli et Alessandra Frabetti

http ://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/

TD 0 – PRÉREQUIS DE MATH2

Exercice 1 – Équations polynomiales

Resoudre les équations et les systèmes suivants :

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $x(x+1) = 0$

c) $y^2(y^2 - 4) = 0$

d) $\begin{cases} x(y+1) = 0 \\ y^2(x^2 - 4) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} (x-1)(y^2-1) = 0 \\ xy(x-y) = 0 \end{cases}$

Exercice 2 – Dérivées de fonctions d'une variable réelle

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^4(x-1)^2}{(x^2+1)^3}$

b) $t \mapsto f(t) = t\cos(t)e^t$

c) $y \mapsto f(y) = \ln(2y^2+1)$

d) $x \mapsto f(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$

e) $u \mapsto f(u) = \arcsin\left(\dfrac{2u}{u^2+1}\right)$

f) $x \mapsto f(x) = \sqrt{1+x^2} + \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{e^x}$

g) $y \mapsto f(y) = \left(\dfrac{y}{1-\sqrt{1-y^2}}\right)^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3 – Primitives et intégrales de fonctions d'une variable réelle

Calculer les primitives ou les intégrales suivants :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^5 + 3x^3 + x^2)\ dx$

b) $\displaystyle\int \sin^2 y\ dy$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 u\ \cos u\ du$

d) $\displaystyle\int_0^1 t^2\ e^t\ dt$

e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\ dx$

g) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\ du$

h) $\displaystyle\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\ du$

i) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^4}\ dx$

Exercice 4 – Équations différentielles du 1er ordre

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $x'(t) = x(t) + t$

b) $y'(t) = -y(t) + t^2$

c) $x'(t) = t\ x(t)$

d) $r'(t) = \dfrac{1}{r(t)}$

e) $z'(t) = z^2(t)$

f) $r'(t) = \dfrac{1}{r^2(t)}$

Exercice 5 – Vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Dans $\mathbb{R}^3$, considerons les deux vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 0)$ et $\vec{v} = (-3, 0, 1)$.

a) Calculer les normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ et le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

b) Montrer que les vecteurs $(0, 6, 1)$ et $(5, 4, -1)$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Montrer que le vecteur $(4, 2, 0)$ ne l'est pas.

Exercice 6 – Applications linéaires et matrices

Dire si les applications suivantes sont linéaires, et dans ce cas déterminer la matrice associée :

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y - 3x, 5x + 2y)$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x + 3, x^2 - 5y)$

c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (2u + 3v, u - 5v)$

d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2z, y - z - x)$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (1 - v, 2u, 3v - 4)$

f) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v, w) \mapsto (w - v, 2u, 3v - 4w)$

Calculer les composées $f \circ h$, $h \circ f$, $h \circ L$ et $L \circ Q$.

Exercice 7 – Produit et détérminant de matrices

Calculer les possibles produits et détérminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 – Droites, coniques, plans et quadriques

Dire si les équations cartesiennes suivantes décrivent des droites, des coniques (lesquelles ?), des plans ou des quadriques (lesquelles ?).

Dans le plan :

a) $2x - 3y + 1 = 0$

b) $x = 2$

c) $(x - 1)^2 + y^2 = 7$

d) $(x - 1)^2 = y^2$

e) $2x^2 + 3y^2 = 1$

f) $2x^2 - 3y^2 = 1$

g) $(x + 1)y = 5$

h) $y = x^2 + 2x$

i) $x = 2y^2 - 3$

Dans l'espace :

a) $2x - 3y - z + 1 = 0$

b) $y = 2$

c) $\begin{cases} 2x - 3y - z + 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 7$

e) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 7 \\ y = 2 \end{cases}$

f) $(x - 1)^2 + y^2 = 7$

g) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 7 \\ z = 2 \end{cases}$

h) $(x - 1)^2 = y^2$

i) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$

j) $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1$

k) $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 1$

l) $z = 2x^2$

m) $\begin{cases} z = 2x^2 \\ y = 2 \end{cases}$

n) $z = 2x^2 + 3y^2$

Exercice 9 – Changement de coordonnées des points
Dessiner les points suivants, donnés en coordonnées cartesiennes, ensuite trouver leur expression en coordonnées polaires (ρ, φ) (dans le plan) ou cylindriques (ρ, φ, z) et sphériques (r, φ, θ) (dans l'espace) :

a) Dans le plan : $(\sqrt{3}, 1)$, $(2, -2)$, $(0, 5)$, $(-3, 0)$, $(-1, -1)$.

b) Dans l'espace : $(1, 1, 1)$, $(0, 2, 1)$, $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(0, 0, 3)$.

Exercice 10 – Ensembles ouverts, fermés, bornés, compacts
Dessiner les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ et dire s'il sont ouverts, fermés, bornés et compacts (en justifiant la réponse) :

a) Dans le plan :

$$\begin{aligned}
A &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^2,\ y \leqslant x+1\big\}\\
B &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^2\big\}\\
C &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\big\}\\
D &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2,\ y < x+1\big\}\\
E &= \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \leqslant 3,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\big\}\\
F &= \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \rho < 3,\ 0 < \varphi < \pi/2\big\}\\
G &= \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \rho \geqslant 3\big\}
\end{aligned}$$

b) Dans l'espace :

$$\begin{aligned}
H &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 \leqslant y \leqslant x+1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\big\}\\
I &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y > x^2,\ z > 0\big\}\\
J &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, z \leqslant 1-x\big\}\\
K &= \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \leqslant 3,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\big\}\\
L &= \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \leqslant 3,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,\ z \leqslant 0\big\}\\
M &= \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid r > 3\big\}\\
N &= \big\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid r \leqslant 3,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\big\}
\end{aligned}$$

Exercice 11 – Domaine de fonctions
Trouver le domaine des fonctions suivantes et le dessiner dans un plan ou dans l'espace :

a) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x+y)}{e^{x+y}}$

b) $g(x,y,z) = \dfrac{\ln(z)}{x-y}$

c) $h(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{y}\right)$

Exercice 12 – Lignes de niveau et graphe
Trouver les lignes de niveau des fonctions suivantes et dessiner celles des niveaux indiqués. Ensuite, dessiner le graphe de f en remontant chaque ligne de niveau à son hauteur.

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 2, et 3.

b) $f(x,y) = x^2+4y^2$, dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 4 et 9.

c) $f(x,y) = \dfrac{2y}{x}$ (avec $x \neq 0$), dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 2, -1 et -2.

Exercice 13 – Composées
Calculer les possibles composées des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\
&F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(u,v) = \frac{u^2}{v^2} \\
&g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(z) = z^4+1 \\
&h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \\
&\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t+1, t-1)
\end{aligned}$$

Exercice 14 – Changement de coordonnées des fonctions
Exprimer les fonctions suivantes en coordonnées cylindriques et sphériques :

a) $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$

b) $g(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

c) $h(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+z}{x^2+y^2+z^2}$

Exercice 15 – Fonctions différentiables
Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles (où exactes s'il n'y a qu'une variable) et détérminer l'ensemble où les fonctions sont différentiables :

a) $f(x,y) = y\,\sin(xy)$
b) $g(u,v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\right)$
c) $h(x,y,z) = \left(x^2(y+1), xz^2, y+1\right)$
d) $\gamma(t) = \left(\sqrt{2+t}, \sqrt{2-t}\right)$
e) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$
f) $\phi(p,q) = \left(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1)\right)$
g) $u(\omega,t) = \left(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t\right)$
h) $F(r,\varphi,\theta) = \left(r\cos\varphi, r\sin\theta\right)$

Exercice 16 – Gradient et différentielle des fonctions réelles
Pour les fonctions suivantes, ecrire le gradient et la différentielle en tout point, et puis au point indiqué :
a) $f(x,y) = y\sin(xy)$ en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$
b) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$ en $(3,2)$

Exercice 17 – Matrice Jacobienne des fonctions vectorielles
Pour les fonctions suivantes, calculer la matrice Jacobienne et, si possible, le déterminant Jacobien en tout point, et puis au point indiqué :
a) $g(u,v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\right)$ en $(1,1)$
b) $h(x,y,z) = \left(x^2(y+1), xz^2, y+1\right)$ en $(1,0,1)$
c) $\phi(p,q) = \left(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1)\right)$ en $(1,1)$
d) $u(\omega,t) = \left(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t\right)$ en $(\pi,1)$
e) $F(r,\varphi,\theta) = \left(r\cos\varphi, r\sin\theta\right)$ en $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

Exercice 18 – Dérivée directionelle
Un randonneur se promène sur une montagne qui ressemble au graphe de la fonction $f(x,y) = xy^2$, dans un voisinage du point $(2,1)$. Il arrive au point $(2,1,2) = (2,1,f(2,1))$ de la montagne depuis la direction $\vec{d} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, et là demarrent trois chemins de direction

$$\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}, \quad \vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \vec{\jmath} - \vec{\imath}.$$

a) Quel chemin doit-il prendre pour monter la pente le plus doucement possible ?
b) Quelle est la direction où il faudrait réaliser un nouveau chemin qui monterait la pente le plus rapidement possible ?
c) Au retour, en passant par le même point, quel chemin doit-il prendre, parmi les quatre existant, pour descendre la pente le plus rapidement possible ?

TD 4 – DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES

Exercice 19 – Règle de la chaine
Soient $x = x(t)$ et $y = y(t)$ deux fonctions dérivables en tout $t \in \mathbb{R}$. Trouver la dérivée par rapport à t de

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ b) $g(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ c) $h(x,y) = \Big(\dfrac{x}{x+y}, \dfrac{y}{x-y}\Big)$

Exercice 20 – Règle de la chaine
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, de variables (x,y). Trouver la dérivée de f par rapport à t quand

a) $x = \sin t$ et $y = \cos t$ b) $x = e^{-t}$ et $y = e^t$

Exercice 21 – Règle de la chaine
Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $y = y(x)$ est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée $z'(x)$ en fonction des dérivées de f et de y.

Appliquer la formule trouvée aux cas particuliers suivants (tous indépendants) :

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ c) $y = e^{3x}$
b) $f(x,y) = xy^2 + x^2y$ d) $y = \ln x$

Exercice 22 – Règle de la chaine
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2xy}{y-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{x^2}{(y-1)^2}.$$

a) Calculer les dérivées partielles de la fonction $F(u,v) = f(2u - v, u - 2v)$.
b) Calculer la dérivée de la fonction $G(t) = f(t+1, t^2)$.

Exercice 23 – Différentielle de fonctions composées
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et posons

a) $g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$ b) $g(x,y,z) = f(2x - yz, xy - 3z)$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f, et écrire la différentielle de g.

Exercice 24 – Jacobienne de fonctions composées
Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et posons

a) $g(x,y) = h(x^2 - y^2, 2xy)$ b) $g(x,y,z) = h(2x - yz, xy - 3z)$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de h, et écrire la matrice Jacobienne de g.

Exercice 25 – Jacobienne de fonctions composées
Soient $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ deux fonction différentiables sur $\mathbb{R}^2$, dont on connait les matrices Jacobiennes

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J_G(u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ 3u^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice Jacobienne et le détérminant Jacobien des fonctions composées $f(x,y) = G(F(x,y))$ et $g(u,v) = F(G(u,v))$.

TD 5 – HESSIENNE, TAYLOR, EXTREMA LOCAUX

Exercice 26 – Matrice Hessienne
Calculer la matrice Hessienne et le détérminant Hessien des fonctions suivantes, en tout point et puis au point indiqué :

a) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ en $(1,-1)$

b) $g(\varphi,\theta) = \varphi\sin\theta - \theta\sin\varphi$ en $(0,\frac{\pi}{2})$

c) $h(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ en $(0,1,2)$

d) $F(u,v) = \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$ en $(1,1)$

Exercice 27 – Fonctions harmoniques
Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquels la fonction $u(x,y,t) = x^2 + y^2 - c^2t^2$ est harmonique.

Exercice 28 – Laplacien
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et posons $F(x,y) = f(x-2y)$.

a) Calculer le Laplacien de F en (x,y), c'est-à-dire la valeur $\Delta F(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$.

b) Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = 25(x-2y)^4$.

Exercice 29 – Formule de Taylor
Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour du point indiqué :

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ autour de $(0,0)$

b) $g(x,y) = \ln(xy^2+1)$ autour de $(1,1)$ et puis de $(1,-1)$

Exercice 30 – Approximation
La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts), où E est la différence de potentiel électrique (en volt) et R est la résistance (en ohm). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E decroît de 5 volt et R de 0.2 ohm ? Comparer les résultats obtenus par le calcul exact avec l'approximation fournie par la différentielle de $P = P(E,R)$.

Exercice 31 – Points critiques et extrema
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux ?

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

b) $g(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

c) $F(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

d) $G(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^3$

TD 6 – INTÉGRALES DOUBLES ET TRIPLES, AIRE ET VOLUME

Exercice 32 – Intégrales doubles
Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $\displaystyle\iint_D xy\,dx\,dy$, où $D = [0,1] \times [0,1]$.

b) $\displaystyle\iint_D (x-y)\,dx\,dy$, où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites $x = 0$, $y = x+2$, $y = -x$.

c) $\displaystyle\iint_D (4 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$, où $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est le quart de disque unité.

Exercice 33 – Aire de surfaces planes
Calculer l'aire des surfaces S suivantes :

a) S est la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x$ et $y^2 = x$.

b) $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{y^2}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$.

c) S est la partie du plan délimitée par l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.
[*Hint* : utiliser le changement de variable $x = 2\rho\cos\varphi$ et $y = 3\rho\sin\varphi$.]

Exercice 34 – Intégrales triples
Calculer les intégrales triples suivantes :

a) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^3y^2z - xy^2z^3)\,dx\,dy\,dz$, où $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

b) $\displaystyle\iiint_B \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz$, où B est la boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 centrée en l'origine.

Exercice 35 – Volumes
Calculer le volume des ensembles $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ suivants :

a) Ω est le tronc de cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$, pour $z \in [0,H]$.

b) Ω est le recipient délimité en bas par le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et en haut par le disque $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 1\}$. [*Hint* : utiliser les coordonnées cylindriques.]

Exercice 36 – Quantité totale et moyenne
Une substance de concentration $f(x,y,z) = \frac{1}{z+1}$ occupe le recipient Ω délimité en bas par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et en haut par le disque $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 1\}$. Trouver la quantité totale de substance contenue dans Ω et la quantité moyenne.

Exercice 37 – Centre de masse

a) Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

b) Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

c) Calculer la masse totale du cube $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$ ayant pour densité de masse $\mu(x,y,z) = x^2y + xz^2$. Calculer ensuite le centre de masse du cube.

Exercice 38 – Culbuto homogène en équilibre

Un *culbuto* est un objet avec base arrondie fait de telle manière que si on le déplace de la position verticale il y revient en oscillant.

[Photo : MONSIEUR COLBUTO de HIBAI AGORRIA MUNITIS]

Considerons le culbuto homogène constitué d'une demi-boule de rayon 1 surmontée d'un cône de hauteur $a > 0$. Nous voulons trouver les valeurs de a pour lesquelles le culbuto revient à l'équilibre en position verticale, en sachant que cela arrive si le centre de masse G se trouve strictement en dessous du plan qui sépare la demi-boule du cône.

Soit K_a l'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avec $-1 \leqslant z \leqslant a$ et tels que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \quad \text{(demi-boule)}, \\ x^2 + y^2 \leqslant \left(1 - \dfrac{z}{a}\right)^2 & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant a \quad \text{(cône plein)}. \end{cases}$$

a) Dessiner K_a et en calculer le volume.

b) Pour tout $z \in [-1, a]$, soit D_z le disque contenu dans K_a à hauteur z fixée. Dessiner D_z, trouver son rayon et calculer son aire.

c) Trouver le centre de masse de K_a, en sachant qu'il se trouve sur l'axe $\vec{Oz}$.

d) Trouver les valeurs de $a > 0$ pour que le culbuto K_a revienne à l'équilibre en position verticale.

Exercice 39 – Champs scalaires, surfaces de niveau
Considerons le champ scalaire de $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x,y,z) = -\frac{K}{x^2+y^2},$$

où $K > 0$ est une constante.

a) Exprimer ϕ en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et en coordonnées sphériques (r, φ, θ).

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, trouver les surfaces de niveau a de ϕ en séparant les cas $a \geqslant 0$ et $a < 0$, et dessiner celles de niveau $a = -1$ et $a = -2$. [Hint : utiliser l'expression de ϕ en coordonnées cylindriques.]

c) Dessiner le graphe du champ ϕ comme fonction de la seule variable ρ.

Exercice 40 – Champs de vecteurs
Trouver le domaine et dessiner quelques valeurs des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}$

c) $\vec{V}(x,y) = y\ \vec{\imath} + x\ \vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \rho\ \vec{e_\varphi}$

e) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\ \vec{e_\varphi}$

f) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\ \vec{\jmath} + \vec{k}$

g) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + \vec{k}$

h) $\vec{V}(r,\varphi,\theta) = r\ \vec{e_\varphi} + r\ \vec{e_\theta}$

Exercice 41 – Lignes de champ
Trouver les lignes de champ des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

c) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y) = y\ \vec{\imath} + x\ \vec{\jmath}$

e) $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{G\ M}{r^2}\ \vec{e_r}$ (champ gravitationnel)

Exercice 42 – Gradient et Laplacien en coordonnées polaires [Facultatif]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 donnée en coordonnées cartesiennes et soit $\tilde{f}(\rho,\varphi) = f(x,y)$ son expression en coordonnées polaires, où $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$.

Trouver l'expression en coordonnées polaires du gradient $\tilde{\nabla}$ et du Laplacien $\tilde{\Delta}$, définis par les identitées

$$\tilde{\nabla}\tilde{f}(\rho,\varphi) = \nabla f(x,y) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Delta}\tilde{f}(\rho,\varphi) = \Delta f(x,y).$$

Exercice 43 – Rotationnel
Calculer le rotationnel des champs de vecteurs suivants :

a) $\vec{B}(x,y,z) = xy^2\ \vec{\imath} + 2x^2yz\ \vec{\jmath} + 3yz^2\ \vec{k}$

b) $\vec{B}(x,y,z) = \sin(xyz)\ \vec{\imath} + \cos(xyz)\ \vec{\jmath}$

c) $\vec{B}(x,y,z) = yz\ \vec{\imath} + xz\ \vec{\jmath} + xy\ \vec{k}$

d) $\vec{B}(x,y,z) = xyz\ \vec{\imath}$

e) $\vec{B}(\rho,\varphi,z) = \rho^2\sin\varphi\ \vec{e_\rho} + \rho^2(z^2+1)\ \vec{e_\varphi} + \rho^2\ \vec{k}$

f) $\vec{B}(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi\ \vec{e_r} + r^2\sin\theta\ \vec{e_\varphi} + r^2\ \vec{e_\theta}$

Exercice 44 – Champs de gradient
Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est un *champ de gradient* si $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(f)$ pour une fonction f qui s'appelle *potentiel scalaire* de $\vec{V}$. Dire si les champs suivants sont des champs de gradient (en utilisant le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas déterminer un potentiel scalaire.

a) $\vec{V}(x,y) = (y,x)$

b) $\vec{V}(x,y) = (x+y, x-y)$

c) $\vec{V}(x,y) = ye^{xy}\ \vec{\imath} - xe^{xy}\ \vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y) = \cos x\ \vec{\imath} + \sin y\ \vec{\jmath}$

e) $\vec{V}(x,y) = (y+\frac{1}{x}, x+\frac{1}{y})$

f) $\vec{V}(x,y) = (3x^2y+2x+y^3)\ \vec{\imath} + (x^3+3xy^2-2y)\ \vec{\jmath}$

g) $\vec{V}(x,y,z) = \frac{2}{x}\ \vec{\imath} + \frac{1}{y}\ \vec{\jmath} - \frac{1}{z}\ \vec{k}$

h) $\vec{V}(x,y,z) = (yz, -zx, xy)$

i) $\vec{V}(x,y,z) = (x^2-yz)\ \vec{\imath} + (y^2-zx)\ \vec{\jmath} + (z^2-xy)\ \vec{k}$

Exercice 45 – Champ central
Un *champ central* dans $\mathbb{R}^3$ est un champ de la forme

$$\vec{V}(x_1,x_2,x_3) = f(r)\ \vec{x}$$

où

$\vec{x} = x_1\ \vec{\imath} + x_2\ \vec{\jmath} + x_3\ \vec{k} = (x_1,x_2,x_3)$ est le vecteur position,

$r = \|\vec{x}\|^2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ est la distance du point de l'origine, et

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une application dérivable.

Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer son potentiel quand $f(r) = e^r$.

TD 10 – CHAMPS INCOMPRESSIBLES

Exercice 46 – Divergence
Calculer la divergence des champs de vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$
b) $\overrightarrow{V}(x,y) = (x+1)\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}$
c) $\overrightarrow{V}(x,y) = y\ \vec{\imath} + x\ \vec{\jmath}$
d) $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \rho\ \vec{e_\varphi}$
e) $\overrightarrow{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\ \vec{e_\varphi}$
f) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\ \vec{\jmath} + \vec{k}$
g) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + \vec{k}$
h) $\overrightarrow{V}(r,\varphi,\theta) = r\ \vec{e_\varphi} + r\ \vec{e_\theta}$

Exercice 47 – Divergence
Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a-t-on $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$ pour les champs de vecteurs $\overrightarrow{V}$ suivants :
i) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xz\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + (f(z) - z^2/2)\vec{k}$
ii) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xf(y)\vec{\imath} - f(y)\vec{\jmath}$
iii) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xf(x)\vec{\imath} - y\vec{\jmath} - zf(x)\vec{k}$

Exercice 48 – Divergence
Pour les champs de vecteurs $\overrightarrow{E}$ suivants, définis sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, calculer la divergence en fonction de $\rho = \|\vec{OM}\|$ où $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
a) $\overrightarrow{E}(M) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$
b) $\overrightarrow{E}(M) = \|\vec{OM}\| \cdot \vec{OM}$
c) $\overrightarrow{E}(M) = \left(\frac{\|\vec{OM}\|^2+1}{\|\vec{OM}\|}\right) \cdot \vec{OM}$

Exercice 49 – Champs à potentiel vectoriel
Un champ de vecteurs $\overrightarrow{B}$ admet un *potentiel vectoriel* s'il esiste un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{A}$. Dire si les champs suivants admettent un potentiel vectoriel (en utilisant le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas en trouver un.
a) $\overrightarrow{B}(x,y,z) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$
b) $\overrightarrow{B}(x,y,z) = x\ \vec{\imath} + yz\ \vec{\jmath} - x\ \vec{k}$
c) $\overrightarrow{B}(x,y,z) = 2xyz\ \vec{\imath} - y^2z^3\ \vec{\jmath}$

Exercice 50 – Divergence [Facultatif]
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^3$. Montrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) &= \operatorname{div}\overrightarrow{U} + \operatorname{div}\overrightarrow{V} \\ \operatorname{div}(\alpha\ \overrightarrow{V}) &= \alpha\ \operatorname{div}\vec{V} \\ \operatorname{div}(f\ \overrightarrow{V}) &= f\ \operatorname{div}\vec{V} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{V} \end{aligned}$$

Exercice 51 – Circulation le long d'une courbe
Dessiner les courbes C^+ indiquées, trouver une paramétrisation si elle n'est pas déja donnée et calculer la circulation des champs de vecteurs $\vec{V}$ le long de C^+.

a) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\quad C^+$ = cycloïde paramétrée par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\vec{V}(x,y) = (x^2+1)\,\vec{\jmath}$, $\quad C^+$ = courbe plane fermée $\left\{ \begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ x : 1 \to 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y : 1 \to 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x : 0 \to 1 \end{array} \right.$.

c) $\vec{V}(x,y) = \dfrac{y\,\vec{\imath} - x\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad C^+$ = cercle paramétré par $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

d) $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \rho\, z\, \vec{e_\varphi}$, $\quad C^+$ = cercle $\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 = R^2 \\ z = H \end{array} \right.$ orienté dans le sens antihoraire sur le plan $x0y$.

e) $\vec{V}(x,y,z) = x^2 z\,\vec{\imath} - \dfrac{y}{x}\,\vec{\jmath} + \dfrac{xz^2}{y^2}\,\vec{k}$, $\quad C^+$ = courbe paramétré par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, avec $t \in]0, T]$.

f) $\vec{V}(x,y,z) = \frac{x}{y}\,\vec{\imath} + zy\,\vec{\jmath}$, $\quad C^+$ = arc d'hyperbole $\left\{ \begin{array}{l} z = y - x \\ xy = 1 \\ y : 1 \to 2 \end{array} \right.$.

Exercice 52 – Circulation de $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$
Calculer la circulation des champs de gradient le long des courbes indiquées, en utilisant le théorème $\displaystyle\int_{A,\ C^+}^{B} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \vec{d\ell} = \phi(B) - \phi(A)$.

a) $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ avec $\phi(x,y,z) = \ln(xy + z^2)$, $\quad C^+$ = courbe qui relie le point $(5,1,0)$ au point $(3,2,1)$.

b) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique** produit par une charge Q (quel est son potentiel $\phi(r)$?)
C_1^+ = courbe qui relie le point $A = (6,0,0)$ au point $B = (0,0,3)$,
C_2^+ = cercle centré en O de rayon R.

c) $\vec{B}(\rho,\varphi,z) = \dfrac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$ = **champ magnétique** produit par un courant d'intensité I dans un fil droit de direction $\vec{k}$ (quel est son potentiel $\phi(\varphi)$ <u>si on ne fait pas le tour complet autour du fil</u> ?)
C_1^+ = arc de cercle de rayon R centré sur le fil, reliant le point $A = (R,0,0)$ au point $B = (0,R,0)$,
C_2^+ = cercle de rayon R qui ne fait pas le tour du fil.

TD 12 – SURFACES ET FLUX

Exercice 53 – Flux à travers une surface
Dessiner les surfaces S^+ indiquées, trouver une paramétrisation si elle n'est pas déja donnée et calculer le flux des champs de vecteurs à travers S^+.

a) $\vec{V}(x,y,z) = y^3\,\vec{\jmath} + 2(z-x^2)\,\vec{k}$,

$S^+ =$ parapluie de Whitney $\begin{cases} x^2 = y^2 z \\ x,y,z \in [0,1] \end{cases}$ paramétré par $\begin{cases} f(u,v) = (uv, v, u^2) \\ u,v \in [0,1] \end{cases}$.

b) $\vec{V}(x,y,z) = x^2 z\,\vec{\imath} + xy^2\,\vec{\jmath} + x(y-z)\,\vec{k}$, $\quad S^+ =$ carré $\begin{cases} z = 3 \\ x,y \in [0,1] \end{cases}$ avec paramètres (x,y).

c) $\vec{V}(r,\varphi,\theta) = \varphi\,\vec{e_r} + r\,\vec{e_\theta}$,

$S^+ =$ calotte de sphère $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x,y,z \geqslant 0 \end{cases}$ avec paramètres = coordonnées sphériques (φ,θ).

d) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique**, $\quad S^+ =$ calotte de sphère de l'exercice précédent.

Exercice 54 – Flux de $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$
Calculer le flux du rotationnel des champs de vecteurs suivants, dans l'une des deux possibles manières :
- soit en calculant le rotationnel, en décrivant S^+ et en utilisant la définition du flux,
- soit en trouvant le bord de S^+ et en appliquant le **théorème de Stokes** $\displaystyle\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{U}\cdot\overrightarrow{d\ell}$.

a) $\vec{U}(x,y) = (2x-y)\,\vec{\imath} + (x+y)\,\vec{\jmath}$, $\quad S^+ =$ disque $\quad x^2+y^2 \leqslant R^2\quad$ orienté par $\vec{n} = \vec{k}$.

b) $\vec{A}(\rho,\varphi,z) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln\rho\,\vec{k}$ = **potentiel vectoriel du champ magnétique** $\quad \vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$,

S^+= cylindre (ouvert) $\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ z \in [0,H] \end{cases}$ avec $\vec{n}$ entrant.

Exercice 55 – Flux à travers une surface fermée
Calculer le flux des champs de vecteurs suivants, à travers les surfaces fermées indiquées, dans l'une des deux possibles manières :
- soit en décrivant S^+ et en utilisant la définition du flux,
- soit en trouvant la divergence du champ et le domaine Ω délimité par S^+, et en appliquant le **théorème de Gauss** $\displaystyle\oiint_{\partial\Omega^+} \vec{V}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\,\vec{V}\,dx\,dy\,dz$.

a) $\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$,

$S =$ boite cylindrique fermée $\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ z \in [0,H] \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant R^2 \\ z = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+y^2 \leqslant R^2 \\ z = H \end{cases}$

orientée par $\vec{n}$ entrant.

b) $\vec{V}(x,y,z) = z^2\,\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}$, $\quad S =$ statue du David de Michelangelo à Florence, orientée par $\vec{n}$ entrant.

c) Calculer le flux du **champ gravitationnel** $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}$ produit par le soleil, à travers la surface de la planète Terre, orientée par $\vec{n}$ entrant.

Exercice 56 – Flux [Facultatif]
Calculer les flux suivants, en utilisant la définition ou un théorème approprié (Stokes ou Gauss) :

a) $\vec{V}(x,y,z) = yz\,\vec{\imath} - xz\,\vec{\jmath} - z(x^2+y^2)\,\vec{k}$,

$S^+ =$ hélicoïde (escalier en colimaçon) paramétré par $\begin{cases} f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi) \\ r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,2\pi] \end{cases}$.

b) $\vec{V}(x,y,z) = y^2\,\vec{\imath} + z\,\vec{k}$, $S^+ =$ triangle $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x,y,z \geqslant 0 \end{cases}$ avec paramètres $\begin{cases} u = x \\ v = x+y \end{cases}$.

[*Hint* : noter que les bornes des variables x, y et z sont liées sur S. Par exemple, si on choisit $x \in [0,1]$ comme variable indépendante, alors on a $y \in [0, 1-x]$ et $z = 1-(x+y)$, ou bien $z \in [0,1-x]$ et $y = 1-(x+z)$.]

c) $\vec{U}(x,y) = (2xy - x^2)\,\vec{\imath} + (x+y^2)\,\vec{\jmath}$, $S^+ =$ surface plane délimitée par $\begin{cases} y = x^2 \\ x : 0 \to 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x = y^2 \\ y : 1 \to 0 \end{cases}$.

d) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r} =$ **champ électrique**,

$S^+ =$ cube de coté R centré en $(3R, 3R, 3R)$ orienté par $\vec{n}$ sortant.

e) $\vec{A}(\rho,\varphi,z) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln\rho\,\vec{k} =$ **potentiel vectoriel du champ magnétique** $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$,

$S+=$ écran vertical $\begin{cases} \rho = \varphi + 1 \\ \varphi \in [0,2\pi] \\ z \in [0,H] \end{cases}$ avec $\vec{n}$ sortant.