Université Claude Bernard Lyon 1
Faculté des Sciences et Technologie
Licence mention Physique, Chimie, Mécanique et Génie Electrique
L1 – UE Math 2

Fonctions de plusieures variables et champs de vecteurs
Cours et exercices de Math 2

François Dayrens et Alessandra Frabetti
Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques de l'Université Claude Bernard Lyon 1,
Universités de Lyon
dayrens@math.univ-lyon1.fr et frabetti@math.univ-lyon1.fr

Février 2015

Présentation du cours

Ce cours est conçu comme support pour l'UE de Math2, L1 - portail PCSI, de la Faculté des Sciences et Technologie de l'Université Lyon 1. Il contient les résultats théoriques mentionnés au Cours Magistral, illustrés par des exemples et des exercices resolus.

Le but du cours est d'introduire les notions mathématiques qui permettent de comprendre et manipuler les champs scalaires, comme la temperature ou l'altitude, et les champs de vecteurs, tels que les forces de gravité, de Coulomb et de Lorentz, ou les champs de vitesse décrivant le mouvement d'un corps rigide ou l'écoulement d'un fluide.

Les champs, scalaires ou vectoriels, sont des lois qui dépendent des réferentiels fixés au départ et à l'arrivée, c'est-à-dire des grandeures qu'on choisit pour les décrire et de leur unité de mesure. La nature des champs est determinée par la manière de se transformer sous changement de réferentiels. Quand on fixe les réferentiels, les champs sont representés par des fonctions, scalaires ou vectorielles. Quand on fixe les unité de mesure mais on admet des changement de grandeurs (comme on le fait en mathématiques), les champs scalaires peuvent être assimilés à des fonctions réelles, et les champs de vecteurs peuvent être assimilés à des fonctions vectorielles sousmises à une modification du repère d'arrivée si celui de départ est modifié.

Le cours est divisé en deux parties: dans la première on étudie les fonctions réelles (representation graphique, lignes ou surfaces de niveau, dérivées, intégrales) et les fonctions vectorielles (en particulier les changements de coordonnées). Dans la deuxième partie on étudie les champs vectoriels (lignes de champ, divergence, rotationnel, circulation et flux), en coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques.

Les principaux résultats visés sont:

- La representation graphique d'un champ scalaire (fonction) avec surfaces de niveau, points de minimum et maximum locaux, et approximation locale par un polynôme de Taylor.
- La representation graphique d'un champ de vecteur et la détermination de ses lignes de champ.
- Le calcul du potentiel scalaire d'un champ conservatif, et du potentiel vectoriel d'un champ incompressible (solenoïdale).
- Le calcul de la circulation et du flux d'un champ de vecteurs, le théorème de Stokes-Ampère, le théorème de Gauss-Ostrogradski et le théorème sur la circulation d'un champ de gradient.

Prérequis:

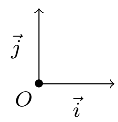
1. Espaces vectoriels et vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (produits scalaire, vectoriel et mixte).
2. Applications linéaires et matrices (produit, détérminant, matrice inverse).
3. Géométrie du plan et de l'espace en coordonnées cartesiennes (droites, coniques, plans, quadriques).
4. Calcul différentiel et intégral des fonctions réelles d'une variable (graphes, dérivées, extrema locaux, Taylor, primitives).
5. Équations différentielles du 1er ordre.

Programme du cours

Part I
Fonctions et champs scalaires

1 Fonctions de plusieures variables

1.1 Coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

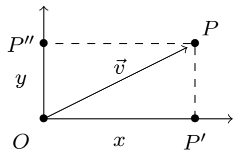


Le plan est identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ si on fixe un **repère cartesien** (orthonormal direct) $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$, où O est un point quelconque et $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ sont deux vecteurs orientés dans le sens antihoraire tels que $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.

En effet, tout **point** P du plan est identifié au **vecteur** $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ appliqué en O, et puisque l'ensemble $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\,\}$ forme une **base** de l'espace vectoriel des tels vecteurs, tout vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. On appelle:

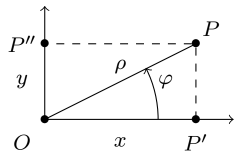
- **Coordonnées cartesiennes** de P = couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ t. q. $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

  c. à d. $\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \end{cases}$ = longueur des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$:



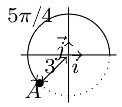
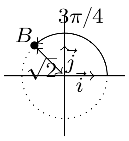
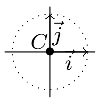
- **Coordonnées polaires** de P (si $P \neq (0,0)$) = couple $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$

  t. q. $\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$ c. à d. $\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi \ \text{ t.q. } \tan\varphi = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ ou } \cot\varphi = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \\ \quad \big(\text{par ex. } \varphi = \arctan\frac{y}{x} \text{ si } x, y > 0\big) \end{cases}$

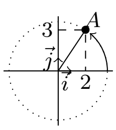
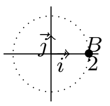
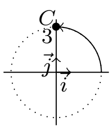


Exemples.

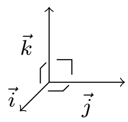
1. **Coordonnées polaires** $\longrightarrow$ **dessin** + **calculs avec formules** $\longrightarrow$ **coordonnées cartesiennes**

$A \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = 5\pi/4 \end{cases}$		$\begin{cases} x = 3\cos(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 3\sin(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$	$A = (-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2})$
$B \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \end{cases}$		$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(3\pi/4) = \frac{-\sqrt{2}^2}{2} \\ y = \sqrt{2}\sin(3\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}^2}{2} \end{cases}$	$B = (-1, 1)$
$C \begin{cases} \rho = 0 \\ \varphi = 3\pi/2 \end{cases}$		$\begin{cases} x = 0\ \cos(3\pi/2) = 0 \\ y = 0\ \sin(3\pi/2) = 0 \end{cases}$	$C = (0, 0)$

2. **Coordonnées cartesiennes** $\longrightarrow$ **dessin** + **calculs avec formules** $\longrightarrow$ **coordonnées polaires**

$A = (2, 3)$		$\begin{cases} \rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ \tan\varphi = \frac{3}{2} \end{cases}$	$A \begin{cases} \rho = \sqrt{13} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases}$
$B = (2, 0)$		$\begin{cases} \rho = \sqrt{4+0} = 2 \\ \tan\varphi = \frac{0}{2} = 0 \end{cases}$	$B \begin{cases} \rho = 2 \\ \varphi = 0 \end{cases}$
$C = (0, 3)$		$\begin{cases} \rho = \sqrt{0+9} = 3 \\ \cos\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\varphi = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$	$C \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$

De même, l'espace est identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ si on fixe un **repère cartesien** (orthonormal direct) $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, où est un point quelconque et $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ sont trois vecteurs orientés comme dans la figure, tels que $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k} \perp \vec{\imath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$.



En effet, tout **point** P de l'epace est identifié au **vecteur** $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ appliqué en O, et puisque l'ensemble $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ forme une **base** de l'espace vectoriel des tels vecteurs, tout vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$. On appelle:

- **Coordonnées cartésiennes** de P = triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ t. q. $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

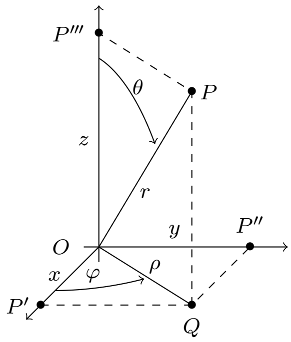
  c. à d. $\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \\ z = \|\overrightarrow{OP'''}\| \end{cases}$ = longueur des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$

- **Coordonnées cylindriques** de P = triplet $(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ t.q.

  $$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{c. à d.} \quad \begin{cases} \rho = |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}.$$

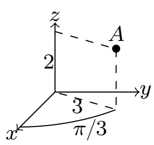
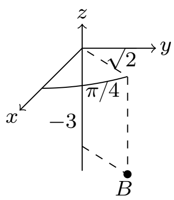
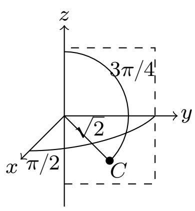
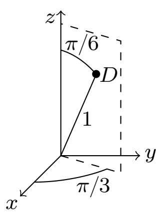
- **Coordonnées sphériques** de P = triplet $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times[0, \pi]$ t.q.

  $$\begin{cases} x = r \cos\varphi \sin\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad \text{c. à d.} \quad \begin{cases} r = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{y}{x} \\ \theta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}.$$

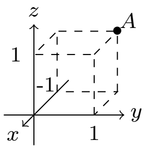
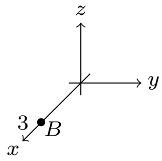
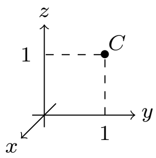


Exemples.

1. **Coordonnées cylindriques ou sphériques** $\longrightarrow$ **dessin** + **calculs avec formules** $\longrightarrow$ **coordonnées cartesiennes**

$A \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/3 \\ z = 2 \end{cases}$		$\begin{cases} x = 3\cos(\pi/3) = -\frac{3}{2} \\ y = 3\sin(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 \end{cases}$	$A = (-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 2)$
$B \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/4 \\ z = -3 \end{cases}$		$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ y = \sqrt{2}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ z = -3 \end{cases}$	$B = (1, 1, -3)$
$C \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/2 \\ \theta = 3\pi/4 \end{cases}$		$\begin{cases} x = \sqrt{2}\ \cos(\pi/2)\ \sin(\pi/4) = 0 \\ y = \sqrt{2}\ \sin(\pi/2)\ \sin(\pi/4) = 1 \\ z = \sqrt{2}\ \cos(3\pi/4) = -1 \end{cases}$	$C = (0, 1, -1)$
$D \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \pi/3 \\ \theta = \pi/6 \end{cases}$		$\begin{cases} x = \cos(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{1}{4} \\ y = \sin(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ z = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	$D = (\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

2.

Coordonnées cartesiennes	$\longrightarrow$ **dessin**	+ **calculs avec formules**	$\longrightarrow$ **coordonnées cylindriques**	+ **coordonnées sphériques**
$A=(-1,1,1)$		$\begin{cases} \rho=\sqrt{1+1}=\sqrt{2} \\ \tan\varphi=-1 \\ r=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3} \\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$	$A \begin{cases} \rho=\sqrt{2} \\ \varphi=3\pi/4 \\ z=1 \end{cases}$	$A \begin{cases} r=\sqrt{3} \\ \varphi=3\pi/4 \\ \theta=\pi/6 \end{cases}$
$B=(3,0,0)$		$\begin{cases} \rho=\sqrt{9+0}=3 \\ \tan\varphi=\frac{0}{3}=0 \\ r=\sqrt{9+0+0}=3 \\ \cos\theta=\frac{0}{3}=0 \end{cases}$	$B \begin{cases} \rho=3 \\ \varphi=0 \\ z=0 \end{cases}$	$B \begin{cases} r=3 \\ \varphi=0 \\ \theta=\pi/2 \end{cases}$
$C=(0,1,1)$		$\begin{cases} \rho=\sqrt{0+1}=1 \\ \cos\varphi=0 \\ \sin\varphi=1 \\ r=\sqrt{0+1+1}=\sqrt{2} \\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$	$C \begin{cases} \rho=1 \\ \varphi=\pi/2 \\ z=1 \end{cases}$	$C \begin{cases} r=\sqrt{2} \\ \varphi=\pi/2 \\ \theta=\pi/4 \end{cases}$

1.2 Ensembles ouverts, fermés, bornés et compacts.

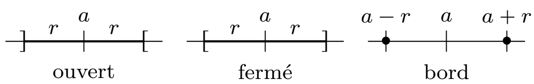
Soit $\mathbb{R}^n$ l'un des trois espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Définition. Si $P \in \mathbb{R}^n$ est un point et $r \geqslant 0$ indique un rayon, on note $B_P(r)$, $\overline{B}_P(r)$ et $\partial B_P(r)$ les ensembles suivants:

- dans $\mathbb{R}$: **intervalle ouvert** $B_a(r) =]a-r, a+r[$

  intervalle fermé $\overline{B}_a(r) = [a-r, a+r]$

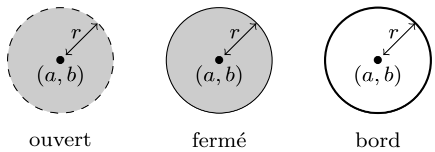
  bord de l'intervalle $\partial B_a(r) = \{a-r, a+r\}$ (= points extrémaux).



- dans $\mathbb{R}^2$: **disque ouvert** $B_{(a,b)}(r) = \{(x,y) \mid (x-a)^2+(y-b)^2 < r^2\}$

  disque fermé $\overline{B}_{(a,b)}(r) = \{(x,y) \mid (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2\}$

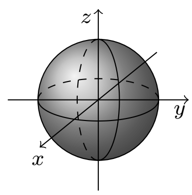
  bord du disque $\partial B_{(a,b)}(r) = \{(x,y) \mid (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2\}$ (= cercle)



- dans $\mathbb{R}^3$: **boule ouverte** $B_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 < r^2\}$

  boule fermée $\overline{B}_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \leqslant r^2\}$

  bord de la boule $\partial B_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2\}$ (= sphère)

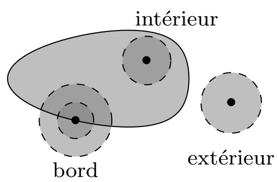


Définition. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fixé.

- À noter: si P est un point intérieur à D il existe une boule ouverte B_P contenue dans D;
  si P est un point extérieur à D il existe une boule ouverte B_P qui n'intersecte pas D.

- Un point $P \in \mathbb{R}^n$ s'appelle **point du bord** de D si toute boule ouverte B_P centrée en P contient à la fois des points de D et de son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash D$ (où le symbol $\backslash$ indique la soutraction entre ensembles).

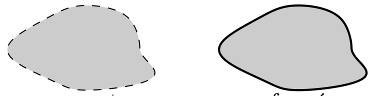
  Attention: un point du bord de D peut être dans D ou non!



- L'ensemble des points du bord de D s'indique avec ∂D.

L'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ s'appelle

- **ouvert** s'il ne contient aucun de ses points de bord;
- **fermé** s'il contient tous ses points de bord.

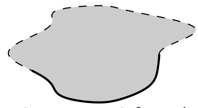


ouvert fermé

Le complémentaire d'un ouvert est toujours fermé, et viceversa le complémentaire d'un fermé est toujours ouvert.

Par convention, l'**ensemble vide** $\varnothing$ et son complémentaire $\mathbb{R}^n$ sont <u>à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$</u>.

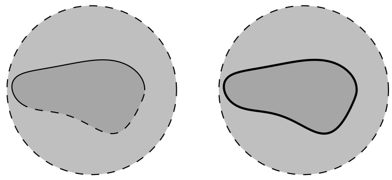
<u>Attention</u>: il existe aussi des ensembles qui ne sont <u>ni ouverts ni fermés</u>!
Par exemple, un disque avec moitiè de son bord.



ni ouvert ni fermé

L'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ s'appelle

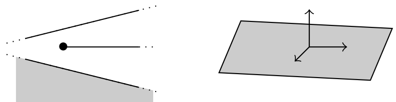
- **borné** s'il existe un disque ouvert B qui le contient;
- **compact** s'il est fermé et borné.



borné compact

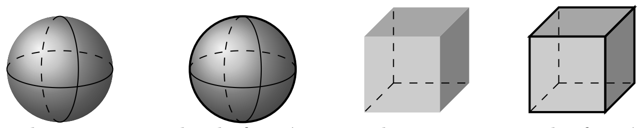
Exemples.

1. Les droites, demi-droites et demi-plans sont fermés non bornés dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
   De même, les plans sont fermés non bornés dans $\mathbb{R}^3$.



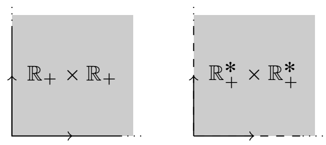
dans $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

2. Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ est ouverte et bornée.
   Toute boule fermée est compacte, ainsi que l'intérieur d'un carré avec son bord (dans $\mathbb{R}^2$), et l'intérieur d'un cube avec son bord (dans $\mathbb{R}^3$).



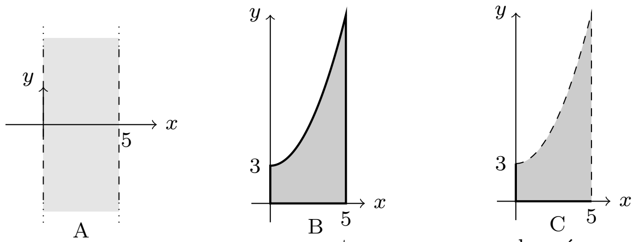
boule ouverte boule fermée cube ouvert cube fermé

3. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, le quadrant $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ est fermé non borné.
   Le même quadrant sans bord, $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est ouvert non borné.



Exercice. Dessiner les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ et dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés et compacts:

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 5\Big\}$$
$$B = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2+3\Big\}$$
$$C = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x < 5,\ 0 \leqslant y < x^2+3\Big\}$$



A ouvert non borné

B compact

C borné ni ouvert ni fermé

1.3 Fonctions de deux ou trois variables.

Soient $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ les espaces vectoriels $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Les points P de $\mathbb{R}^n$, déterminés par des coordonnées, sont alors notés par $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$.

Définition. Une **fonction de plusieures variables** est une application f qui associe à tout point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ au plus une valeure $f(\vec{x}) = \big(f_1(\vec{x}), ..., f_m(\vec{x})\big) \in \mathbb{R}^m$. On la note par

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \vec{x} \mapsto f(\vec{x}).$$

Si $m = 1$, la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'appelle **réelle**. Si $m > 1$, la fonction f s'appelle **vectorielle**. (Attention: une fonction vectorielle n'est pas forcement une application linéaire!)

Exemples.

- Fonctions réelles: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 + \sin(xy) + 1$

  $\text{Pression} = f(\text{Volume}, \text{Temperature})$

  $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^3 z + xyz + \ln(z^2 + 1)$

- Fonctions vectorielles: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2, x + y, y^3)$

  $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (x^2 + z, xz + y)$

  $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (\rho, \varphi) \mapsto h(\rho, \varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ **changement de coordonnées**

- L'association $f(x, y) = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ n'est pas une fonction, car à tout (x, y) elle associe deux valeurs, $+\sqrt{x^2 + y^2}$ et $-\sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. On appelle:

- **domaine de** f l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels f est bien définie:

$$D_f := \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{il esiste } f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \Big\};$$

- **image de** f l'ensemble

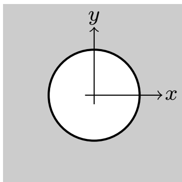
$$I_f := \Big\{(y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m \mid (y_1, ..., y_m) = f(x_1, ..., x_n),\ (x_1, ..., x_n) \in D_f \Big\}.$$

Exemples.

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

   $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \geqslant 0\} =$ complémentaire du disque $B_O(1)$ (fermé non borné)

   $I_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$ (fermé non borné)

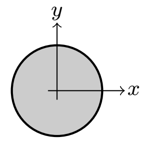


2. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

   $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} =$ disque fermé $\overline{B}_O(1)$ (compact)

   $I_f = [0, 1]$ (compact)

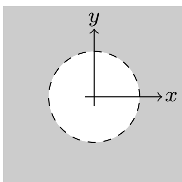
   car $x^2 + y^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow 0 \leqslant 1 - x^2 - y^2 \leqslant 1 \Longleftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2} = f(x, y) \leqslant 1$



3. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1), \quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

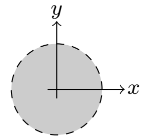
   $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 > 0\} =$ complémentaire du disque $\overline{B}_O(1)$ (ouvert non borné)

   $I_f = \mathbb{R}$ (ouvert et fermé dans $\mathbb{R}$, non borné)



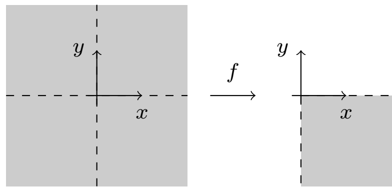
4. $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2), \quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

   $D_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 - y^2 > 0\big\}$ = disque ouvert $B_O(1)$ (ouvert borné)

   $I_f = \ln]0,1] =]-\infty, 0] = \mathbb{R}^-$ (ouvert non borné)

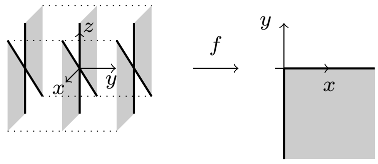
5. $f(x,y) = \Big(\dfrac{1}{x^2}, -\dfrac{1}{y^2}\Big), \quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

   $D_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0,\ y \neq 0\big\}$ = plan sans axes (ouvert non borné)

   $I_f = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^- = 4^{eme}$ quadrant sans bord (ouvert non borné)

6. $f(x,y,z) = \Big(\sqrt{x^2 - z^2}, -\sqrt{y^2 + z^2}\Big), \quad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

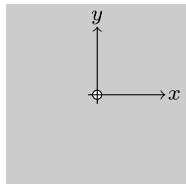
   

   $D_f = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 \geqslant 0\big\}$ = espace délimité par les deux plans $z = \pm x$ (fermé non borné)

   $I_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- = 4^{eme}$ quadrant (fermé non borné)

Exercice. Trouver et dessiner le domaine et l'image des fonctions suivantes, en précisant s'ils sont ouvert, fermés, bornés et compacts:

1. $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2}, \quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

   $D_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^1 + 1 > 0,\ x^2 + y^2 \neq 0\big\}$
   $= \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ = plan moins l'origine (ouvert non borné)

   car la condition $x^2 + y^1 + 1 > 0$ est vérifiée pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et puisque $x^2 + y^2 \geqslant 0$ toujours, la condition $x^2 + y^2 \neq 0$ est vérifiée si $(x,y) \neq (0,0)$.

   $I_f = \mathbb{R}_+^* =]\,0, +\infty\,[$ (ouvert non borné)

   car $x^2 + y^2 > 0$ implique $x^2 + y^2 + 1 > 1$ et par conséquent $\ln(x^2 + y^2 + 1) > 0$: le quotient de deux nombres positifs est positif.

2. $g(x,y) = \left(\dfrac{\ln(x^2 + 1)}{y^2}, \dfrac{\ln(y^2 + 1)}{x^2}\right), \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

   $D_g = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 1 > 0,\ y \neq 0,\ y^2 + 1 > 0,\ x \neq 0\big\}$
   $= \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ = plan moins les deux axes (ouvert non borné)

   car les conditions $x^2 + 1 > 0$ et $y^2 + 1 > 0$ sont vérifiées pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

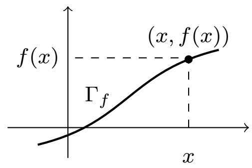
   $I_g = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = 1^{er}$ quadrant sans bord (ouvert non borné)

   car $x \neq 0$ et $y \neq 0$ implique que $x^2 > 0$ et $y^2 > 0$, et par conséquent $\ln(x^2+1) > 0$ et $\ln(y^2 + 1) > 0$: les deux termes sont donc le quotient de deux nombres positifs, il sont forcement positifs.

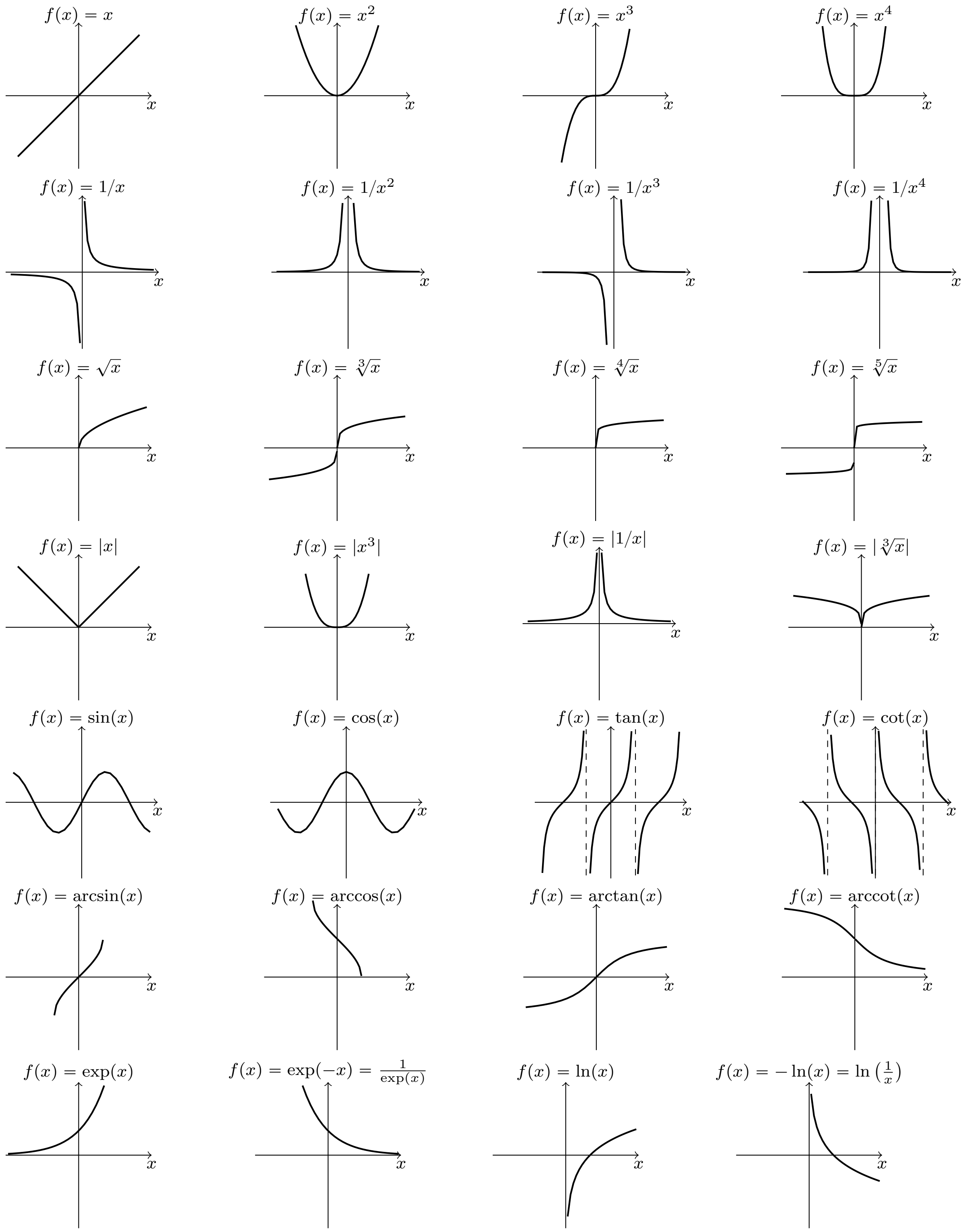
1.4 Graphes et lignes de niveau.

Rappel. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une seule variable, son graphe est l'ensemble

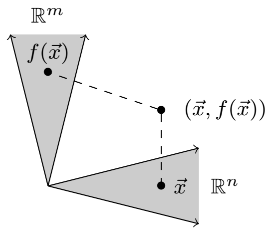
$$\Gamma_f = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f,\ y = f(x) \Big\} \subset \mathbb{R}^2.$$



Les propriétés principales des fonctions sont bien visibles sur son graphe, qui a l'avantage de pouvoir être dessiné. Le graphe des fonctions usuelles est à connaitre par coeur:



Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieures variables.



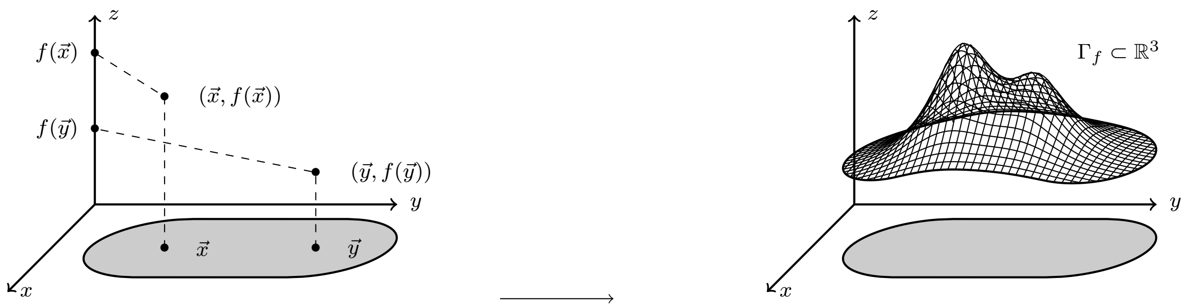
Le **graphe de** f est l'ensemble

$$\Gamma_f := \Big\{ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \vec{x} \in D_f \ , \ \vec{y} = f(\vec{x}) \Big\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Le dessin du graphe est difficile à réaliser si n et m sont grands, à cause de la taille de l'espace ambient $\mathbb{R}^{n+m}$.

On regarde alors en particulier les <u>fonctions réelles de deux variables</u>: le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

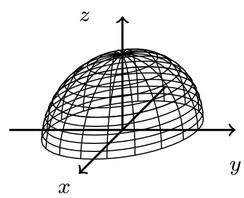
$$\Gamma_f := \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f \ , \ z = f(x, y) \Big\} \subset \mathbb{R}^3.$$



Exemple. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = z$

$\Longrightarrow \quad D_f = \overline{B}_O(1) \qquad I_f = [0, 1]$

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma_f =$ demi-sphère

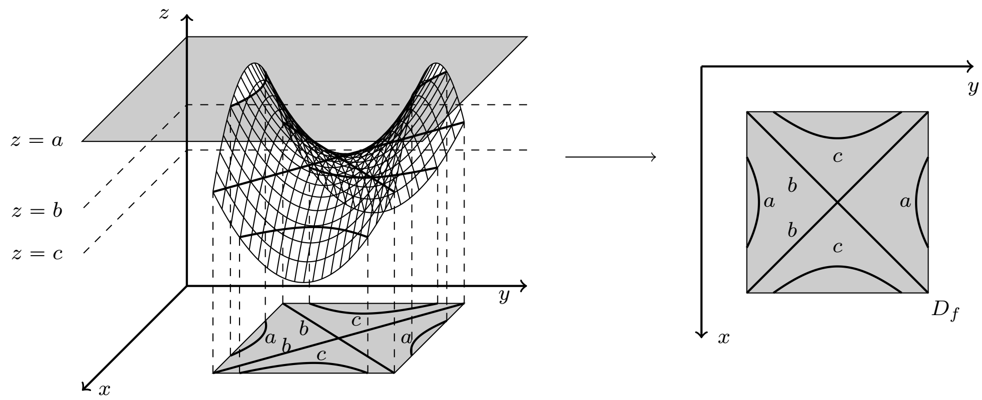


Pour dessiner le graphe d'une fonction f, on peut regarder l'intersection de Γ_f avec les plans horizontaux $z = a$ (pour tout $a \in \mathbb{R}$), ce qui conduit à définir les lignes de niveau. On peut aussi regarder l'intersection de Γ_f avec les plans verticaux $x = a$ ou $y = a$, ce qui correspond à regarder la restriction de f aux droites $x = a$ ou $y = b$ contenues sans son domaine $D_f \subset \mathbb{R}^2$. On peut aussi regarder la restriction de f à d'autres courbes de D_f: dans tous ces cas, les restrictions sont des fonctions d'une seule variable dont on peut dessiner le graphe. Toutes ces informations permettent enfin de de se faire une idée du graphe de f. Nous nous limitons ici à reconstruire le graphe d'une fonction à partir de ses lignes de niveau.

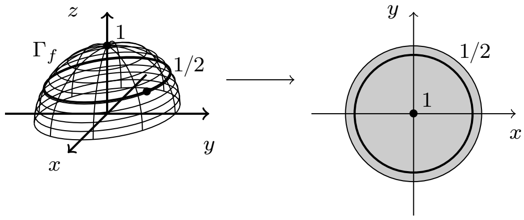
Définition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, de domaine $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et image $I_f \subset \mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la **ligne de niveau** a est la courbe du plan $\mathbb{R}^2$ contenue dans D_f obtenue en projectant la courbe du graphe de f qui se trouve à hauteur $z = a$:

$$L_a(f) := \text{projection sur } D_f \text{ de } \Gamma_f \cap \{z = a\} \quad = \quad \Big\{ (x, y) \in D_f \mid f(x, y) = a \Big\} \subset D_f \subset \mathbb{R}^2.$$

À noter que $L_a(f) = \varnothing$ (ensemble vide) si $a \notin I_f$.



Exemple.



$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \qquad D_f = \overline{B}_O(1)$

pour tout $a \in I_f = [0,1]$ on a

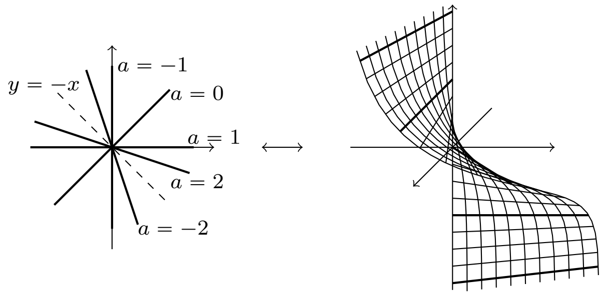
$$\begin{aligned} L_a(f) &= \left\{(x,y) \in \overline{B}_O(1) \mid \sqrt{1-x^2-y^2} = a \right\} \\ &= \text{cercle centré en } (0,0) \text{ de rayon } \sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

Exercice. Trouver le domaine, l'image et les lignes de niveau de la fonction $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$.
Dessiner les lignes de niveau $a = -2, -1, 0, 1, 2$ et reconstruire le graphe de f.

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\} = \mathbb{R}^2 \setminus$ bissectrice du 2^{eme} quadrant

$I_f = \mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} L_a(f) &= \left\{(x,y) \in D_f \mid \frac{x-y}{x+y} = a\right\} \\ &= \text{droite d'éq. } (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{lllllll} a = 0 & \Longrightarrow & y = x & & & & \\ a = 1 & \Longrightarrow & y = 0 & \qquad & a = -1 & \Longrightarrow & x = 0 \\ a = 2 & \Longrightarrow & y = -\frac{1}{3}x & & a = -2 & \Longrightarrow & y = -3x \end{array}$$

$\Gamma_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq -x,\ z = \dfrac{x-y}{x+y}\right\}$ = union de droites tournantes

1.5 Opérations entre fonctions, composition. Changements de coordonnées.

Définition. À partir de deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, de domaine respectivement D_f et D_g, et d'un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions suivantes:

- **somme**: $\big(f+g\big)(x_1,...,x_n) = f(x_1,,...,x_n) + g(x_1,...,x_n)$, de domaine $D_{f+g} = D_f \cap D_g$;
  zéro: $0(x_1,...,x_n) = (0,...,0)$, de domaine $D_0 = \mathbb{R}^n$;
  opposée de f: $\big(-f\big)(x_1,...,x_n) = -f(x_1,...,x_n)$, de domaine $D_{-f} = D_f$;
- **produit de** f **par le scalaire** λ: $\big(\lambda f\big)(x_1,...,x_n) = \lambda f(x_1,...,x_n)$, de domaine $D_{\lambda f} = D_f$.

Si f et g sont des fonctions réelles ($m = 1$), on définit aussi les fonctions suivantes:

- **produit**: $\big(fg\big) : (x_1,...,x_n) = f(x_1,...,x_n)g(x_1,...,x_n)$, de domaine $D_{fg} = D_f \cap D_g$;
  un: $1(x_1,...,x_n) = 1$, de domaine $D_1 = \mathbb{R}^n$;
  inverse de f: $\Big(\dfrac{1}{f}\Big)(x_1,...,x_n) = \dfrac{1}{f(x_1,...,x_n)}$, de domaine $D_{1/f} = \Big\{(x_1,...,x_n) \in D_f \mid f(x_1,...,x_n) \neq 0\Big\}$.

Exemple.

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 - y^2 \\ g(x,y) = x^2 + y^2 \\ \lambda = 3 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} (f+g)(x,y) = 2x^2 \\ (3f)(x,y) = 3f(x,y) \\ (fg)(x,y) = x^4 - y^4 \\ \dfrac{1}{f}(x,y) = \dfrac{1}{x^2-y^2} \quad \text{si } x \neq \pm y. \end{array}\right.$$

Proposition. Les opérations d'addition, produit par scalaire et multiplication entre fonctions à plusieures variables ont les mêmes proprietés que leurs analogues entre fonctions à une variable (elles sont commutatives, associatives et vaut la distributivité). En particulier, avec l'addition et le produit par scalaire, l'ensemble des fonctions à plusieures variables $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (de dimension infinie).

Définition. À partir de deux fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on définit la **composée de** f **et** g comme la fonction $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ obtenue en calculant g sur les valeurs obtenues par f:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p \\ (x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, ..., x_n) & \mapsto & (g \circ f)(x_1, ..., x_n) = g\Big(f(x_1, ..., x_n)\Big). \end{array}$$

Cas particuliers: si on a

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction réelle de deux variables,
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto g(z)$ une fonction reélle d'une variable,
$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto h(u, v) = \big(h_1(u, v), h_2(u, v)\big)$ un changement de variables,
$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ une paramétrisation par une variable,

la composée de f avec g ou h ou γ se calcule comme suit:

$\big(g \circ f\big)(x, y) = g(f(x, y))$ i.e. on pose $z = f(x, y)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\big(f \circ h\big)(u, v) = f(h(u, v))$ i.e. on pose $\begin{cases} x = h_1(u, v) \\ y = h_2(u, v) \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "f \circ h"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$\big(f \circ \gamma\big)(t) = f(\gamma(t))$ i.e. on pose $\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \end{cases}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[rr, bend right, "f \circ \gamma"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Exemple.

$$\left[\begin{array}{l} f(x, y) = x^2 - y \\ g(z) = \ln z \\ h(u, v) = (2u, u + v) \\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \big(g \circ f\big)(x, y) = g(x^2 - y) = \ln(x^2 - y) \\ \big(f \circ h\big)(u, v) = f(2u, u + v) = 4u^2 - (u + v) \\ \big(f \circ \gamma\big)(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin t \end{array}\right.$$

Définition. Si $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(u_1, ..., u_n) \mapsto h(u_1..., u_n) = (x_1, ..., x_n)$ est l'application qui décrit un changement de variables, des $(x_1, ..., x_n)$ vers les $(u_1, ..., u_n)$, la fonction composée $\tilde{f} = f \circ h$ est l'**expression de** f **comme fonction des nouvelles variables** $(u_1, ..., u_n)$. Cas particuliers:

- **Coordonnées polaires**: $h : [0, \infty[\times[0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(\rho, \varphi) \mapsto h(\rho, \varphi) = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi)$

  En posant $x = \rho \cos\varphi$ et $y = \rho \sin\varphi$ on obtient l'expression d'une fonction f des coordonnées cartesiennes (x, y) dans les coordonnées polaires (ρ, φ):
  $$\tilde{f}(\rho, \varphi) = (f \circ h)(\rho, \varphi) = f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi).$$

- **Coordonnées cylindriques**: $h : [0, \infty[\times[0, 2\pi[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(\rho, \varphi, z) \mapsto h(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z)$

  En posant $x = \rho \cos\varphi$ et $y = \rho \sin\varphi$ on obtient l'expression d'une fonction f des coordonnées cartesiennes (x, y, z) dans les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z):
  $$\tilde{f}(\rho, \varphi, z) = (f \circ h)(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z).$$

- **Coordonnées sphériques**: $h : [0, \infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, \theta) \mapsto h(r, \varphi, \theta) = (r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\theta)$

  En posant $x = r \cos\varphi \sin\theta$, $y = r \sin\varphi \sin\theta$ et $z = r \cos\theta$ on obtient l'expression d'une fonction f des coordonnées cartesiennes (x, y, z) dans les coordonnées sphériques (r, φ, θ):
  $$\tilde{f}(r, \varphi, \theta) = (f \circ h)(r, \varphi, \theta) = f(r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\theta).$$

Attention: les changements de coordonnées ne sont pas forcement des applications linéaires. Les changements en coordonnées polaires, cylindriques et sphériques, par exemple, ne le sont pas!

Exemple. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x \quad \Longrightarrow \quad \tilde{f}(\rho, \varphi) = f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi) = (\rho \cos\varphi)^2 + (\rho \sin\varphi)^2 + 2\rho \cos\varphi = \rho^2 + 2\rho \cos\varphi$

Exercice. Exprimer la fonction $f(x, y, z) = \big(\sqrt{x^2 + y^2}, z^2\big)$ en coordonnées cylindriques et sphériques.

$$\tilde{f}(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z) = \big(\rho, z^2\big)$$
$$\tilde{\tilde{f}}(r, \varphi, \theta) = f(r \cos\varphi \sin\theta, r \sin\varphi \sin\theta, r \cos\theta) = \big(r\, \sin\theta, r^2 \cos^2\theta\big).$$

2 Dérivées des fonctions de plusieures variables

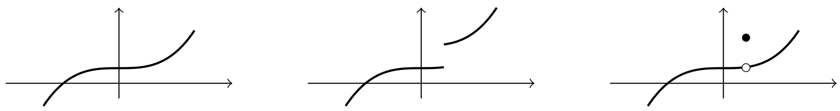
Si f est une fonction d'une variable, les dérivées f' et f'' servent à étudier la fonction et dessiner son graphe: elles déterminent les intervalles où f est croissante, décroissante, convexe ou concave, les points d'inflexion et de minimum / maximum local, et l'approximation locale de f en un polynôme (de Taylor).

Dans ce chapitre nous introduisons l'analogue des dérivées, des extrema locaux et points d'inflexion, et du développement de Taylor, pour les fonctions de plusieures variables. Pour cela, nous avons besoin des limites et de la continuité.

2.1 Limites. Continuité.

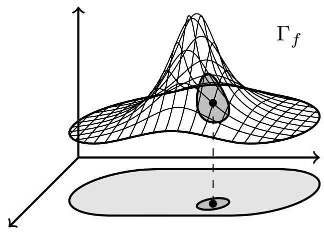
Rappel. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, avec domaine D_f, on dit que:

- la **limite de f en un point** $a \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ à laquelle tend $f(x)$ quand x s'approche de a;
- f **est continue** en un point $a \in D_f$ si on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



continue $\qquad \lim\limits_{gauche} \neq \lim\limits_{droite} \qquad \lim\limits_{gauche} = \lim\limits_{droite} \neq f(a)$

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieures variables, de domaine D_f. On dit que:



- La **limite de f en un point** $(a_1, ..., a_n) \in D_f \cup \partial D$ est la valeur à laquelle tend $f(x_1, ..., x_n)$ quand $(x_1, ..., x_n)$ s'approche de $(a_1, ..., a_n)$ par tous les chemins contenus dans D_f. On la note

$$\lim_{(x_1,...,x_n)\to(a_1,...,a_n)} f(x_1, ..., x_n).$$

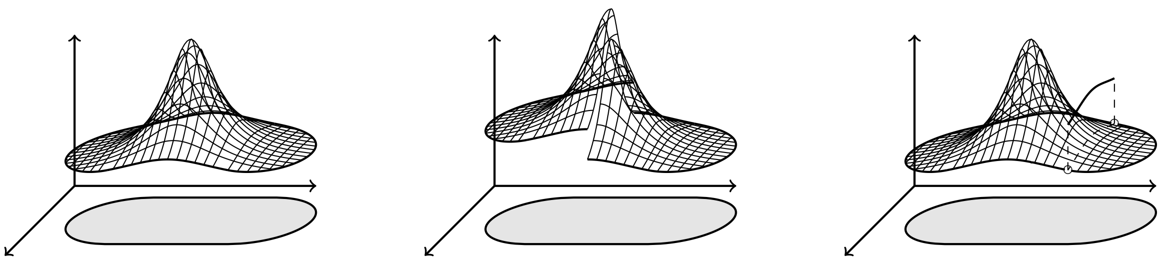
  Attention: la limite peut ne pas exister, mais, si elle existe, elle est unique.

- La fonction f **est continue en** $(a_1, ..., a_n) \in D_f$ si

$$\lim_{(x_1,...,x_n)\to(a_1,...,a_n)} f(x_1, ..., x_n) = f(a_1, ..., a_n).$$

- La fonction f **est continue sur le sous-ensemble** $D \subset D_f$ si f est continue en tout point de D.

  Le graphe d'une fonction continue n'a pas de "sauts"!



continue $\qquad$ non continue $\qquad$ non continue

Théorème. Toutes les fonctions de plusieures variables obtenues comme somme, produit ou composée de fonctions continues sont continues.

Par conséquent, toutes les fonctions polynomiales de plusieures variables sont continues sur $\mathbb{R}^n$, et toutes les fonctions de plusieures variables obtenues par composition ou combinaisons de fonctions à une variable qui sont continues (notamment les fractions rationnelles, les racines, exponentiels et logarythmes, les fonctions circulaires, celles hyperboliques et leur réciproques) sont continues sur leur domaine de définition.

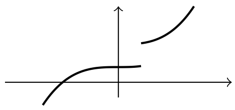
2.2 Dériveées partielles.

Rappel. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, la **dérivée de** f **en** $a \in D_f$ est la limite

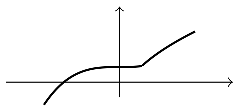
$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si elle existe et c'est un nombre réel (pas $\pm\infty$). Dans ce cas, f est **dérivable en** a. La fonction f est **dérivable sur** $D \subset D_f$ si elle est dérivable en tout point $x \in D$. On appelle alors **dérivée de** f la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ de domaine D.

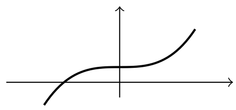
À noter qu'une fonction dérivable est forcement continue, et le contraire n'est pas vrai: "être dérivable" est une condition *plus forte* que "être continue".



non continue



continue, non dérivable



dérivable

Pour une fonction de plusieurs variable, l'analogue de la dérivée est donné par les *dérivées partielles*, qui sont des fonctions. Celles-ci sont regroupées sous forme de vecteur, application linéaire ou matrice, selon l'usage qu'on veut en faire, et donnent lieu à la *dérivée directionnelle*, au *gradient*, à la *différentielle* et à la *matrice Jacobienne*.

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieures variables, avec domaine D_f.

- Les **dérivées partielles de** f **au point** $\vec{a} = (a_1, ..., a_n) \in D_f$ sont les limites

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, ..., a_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f\big(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n\big) - f(a_1, ..., a_n)}{h} \in \mathbb{R}^m, \qquad \text{pour } i = 1, ..., n,$$

  si ces limites existent et donnent des vecteurs de $\mathbb{R}^m$ (sans composantes $\pm\infty$).

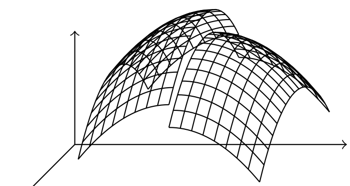
- Les **dérivées partielles de** f sont les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \ \vec{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}), \qquad \text{pour } i = 1, ..., n,$$

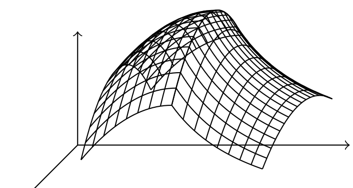
  définies sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ de points $\vec{x}$ où les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ existent.

- La fonction f est **(continûment) différentiable sur l'ensemble** $D \subset D_f$, ou **de classe** C^1 **sur** D, si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont des fonctions continues en tout point $\vec{x} \in D$.

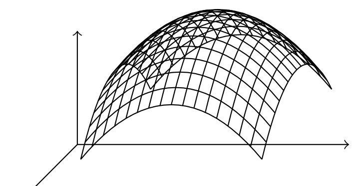
Une fonction différentiable (d'orenavant on sous-entend "continûment") est forcement continue. Le contraire n'est pas vrai: les fonctions continues ne sont pas toutes différentiables. Ceci se voit bien sur le graphe: le graphe d'une fonction différentiable n'a pas de "sauts" (car la fonction est continue) et en plus ne change pas "brusquement" de pente ou d'allure (la pente et l'allure peuvent bien sur changer mais "non brusquement").



non continue



continue
non différentiable



différentiable

Exemples.

1. $f(x,y) = xy^2 + 3x \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy \end{cases}$ bien définies et continues sur $\mathbb{R}^2 \quad \Longrightarrow \quad f$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2+3x \\ yz^2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix} \end{cases}$ bien définies et continues sur $\mathbb{R}^3$ $\implies$ f est C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

3. $f(r,\varphi,\theta) = \varphi^2 + r\sin\theta \implies \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi,\theta) = \varphi^2 + \sin\theta \\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) = 2\varphi \\ \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta \end{cases}$ bien définies et continues sur $\mathbb{R}^3$ $\implies$ f est C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

2.3 Dérivée directionnelle.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieures variables, différentiable sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$.

Définition. Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle **dérivée directionnelle de f dans la direction $\vec{v}$** la fonction

$$\partial_{\vec{v}} f : \vec{x} \longmapsto \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = v_1 \, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + \cdots + v_n \, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}).$$

Les dérivées partielles sont donc les dérivées directionnelles dans la direction des vecteurs $\vec{e}_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, où 1 est en $i$ème position, c'est-à-dire $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{\vec{e}_i} f$.

Exemples.

1. $f(x,y) = xy^2 + 3x, \quad \vec{v} = (u,v) \quad \implies \quad \partial_{(u,v)} f(x,y) = (y^2+3)\, u + 2xy\, v.$

2. $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2+3x \\ yz^2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = (u,v,w)$ $\implies \partial_{(u,v,w)} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} (y^2+3)\, u + 2xy\, v \\ z^2\, v + 2yz\, w \end{pmatrix}.$

3. $f(r,\varphi,\theta) = \varphi^2 + r\sin\theta, \quad \vec{v} = (u,v,w) \quad \implies \quad \partial_{(u,v,w)} f(x,y,z) = (\varphi^2 + \sin\theta)\, u + 2\varphi\, v + r\cos\theta\, w.$

Théorème. [Croissance et decroissance d'une fonction réelle.] Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, différentiable au point $\vec{x}$. Pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a:

- si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) > 0$ alors f est croissante au point $\vec{x}$ dans la direction de $\vec{v}$;
- si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) < 0$ alors f est decroissante au point $\vec{x}$ dans la direction de $\vec{v}$.

De plus, la croissance [resp. decroissance] est d'autant plus rapide que la dérivée directionnelle est grande [resp. petite]. Pour comparer la croissance d'une fonction en différentes directions, il faut que les vecteurs de direction aient la même longueur: par exemple qu'ils soient tous de norme 1.

Attention: on ne peut rien dire sur la croissance de f en $\vec{x}$ dans une direction $\vec{v}$ où $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = 0$!

Exercice. La fonction $f(x,y) = xy^2 + 3x$, au point $(3,1)$, est-elle croissante ou decroissante dans les directions $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,-1)$ $(1,-2)$? Parmis ces quatre directions, quelle est celle de plus forte croissance et celle de plus forte decroissance?

Pour tout vecteur $\vec{v} = (u,v)$, on a $\partial_{\vec{v}} f(x,y) = (y^2+3)\, u + 2xy\, v$. Au point $(3,1)$, on a donc $\partial_{\vec{v}} f(3,1) = 4\,u + 6\,v$. Donc:

$$\begin{aligned} \partial_{(1,1)} f(3,1) &= 10 && \implies && f \text{ est croissante en direction } (1,1), \\ \partial_{(1,2)} f(3,1) &= 16 && \implies && f \text{ est croissante en direction } (1,2), \\ \partial_{(1,-1)} f(3,1) &= -2 && \implies && f \text{ est decroissante en direction } (1,-1), \\ \partial_{(1,-2)} f(3,1) &= -8 && \implies && f \text{ est decroissante en direction } (1,-2). \end{aligned}$$

Pour comparer la croissance, on a besoin des dérivées dans la direction des vecteurs unitaires qui donnent la même direction de ceux indiqués. Cela revient à diviser la dérivée directionnelle déja calculée par la norme de chaque vecteur. Pour trouver la direction dans laquelle f croit plus rapidement, on calcule donc:

$$\begin{aligned} ||(1,1)|| = \sqrt{2} \quad &\implies \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} f(3,1) = \frac{10}{\sqrt{2}}, \\ ||(1,2)|| = \sqrt{3} \quad &\implies \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,2)} f(3,1) = \frac{16}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

On a $\frac{10}{\sqrt{2}} < \frac{16}{\sqrt{3}}$ si $10\sqrt{3} < 16\sqrt{2}$, c'est-à-dire si $(10\sqrt{3})^2 = 300 < (16\sqrt{2})^2 = 512$, ce qui est vrai. Donc f, au point $(3,1)$, croit plus rapidement dans la direction $(1,2)$.

Pour trouver la direction dans laquelle f decroit plus rapidement, on calcule:

$$||(1,-1)|| = \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)} f(3,1) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$||(1,-2)|| = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-2)} f(3,1) = -\frac{8}{\sqrt{3}}$$

On a $-\frac{2}{\sqrt{2}} < -\frac{8}{\sqrt{3}}$ si et seulement si $\frac{2}{\sqrt{2}} > \frac{8}{\sqrt{3}}$, i.e. si $2\sqrt{3} > 8\sqrt{2}$, c'est-à-dire si $(2\sqrt{3})^2 = 12 > (8\sqrt{2})^2 = 128$, ce qui est faux. Donc f, au point $(3,1)$, decroit plus rapidement dans la direction $(1,-2)$.

2.4 Gradient d'une fonction réelle.

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle différentiable sur un ensemble $D \subset D_f$.

- Le **gradient de f en un point** $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in D$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\ \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

  Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$ on a alors

$$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \;=\; \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}),$$

  où $\cdot$ indique le produit scalaire de vecteurs.

- On peut omettre le point $\vec{x}$ et appeller **gradient de** f la fonction vectorielle $\overrightarrow{\text{grad}}\, f \equiv \vec{\nabla} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \longmapsto \vec{\nabla} f(\vec{x})$, qui s'écrit donc comme un vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f \equiv \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\ \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

  dont les composantes sont des fonctions (et non des nombres). Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a alors

$$\partial_{\vec{v}} f \;=\; \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f.$$

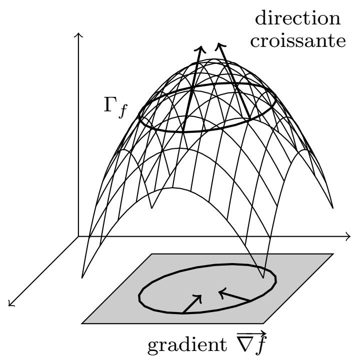
- Le symbol **nabla** $\vec{\nabla}$ indique donc un *opérateur* qui agit sur les fonctions différentiables et donne comme valeur des vecteurs dont les composantes sont des fonctions: $f \longmapsto \vec{\nabla} f = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

Exemples.

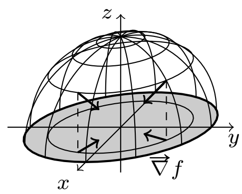
1. $f(x,y) = xy^2 + 3x \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 2xy \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} f(3,2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

2. $f(x,y,z) = \sin(xy) + \ln(x^2+z^2) \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\,\cos(xy) + \dfrac{2x}{x^2+z^2} \\ x\,\cos(xy) \\ \dfrac{2z}{x^2+z^2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(0,\pi,1) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Théorème. **[Interpretation géométrique du gradient.]** Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable en $\vec{x}$, le gradient $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ appliqué au point $\vec{x}$, orthogonal à la ligne de niveau $L_a(f)$ où $a = f(\vec{x})$ (et donc $\vec{x} \in L_a(f)$), et qui indique la direction de plus forte pente croissante du graphe Γ_f en $\vec{x}$.



Exemple.



$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \Longrightarrow \quad L_a(f) = \text{cercle de rayon } \sqrt{1-a^2}, \text{ pour tout } a \in [0,1]$

i.e. pour $(x,y) \in L_a(f)$ on a $\sqrt{1-x^2-y^2} = a$.

Donc, si $a \neq 0$, on a que $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{a}(x,y)$

est un vecteur parallel au vecteur (x,y), donc orthogonal au cercle $L_a(f)$, et pointe vers l'origine, donc dans le sens croissant du graphe.

2.5 Différentielle.

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur un ensemble $D \subset D_f$.

- La **différentielle de f en un point** $\vec{x} \in D$ est l'application $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définie par:

$$\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \longmapsto df_{\vec{x}}(\vec{v}) \; = \; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \; v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \; v_n \; = \; \partial_{\vec{v}}(\vec{x}).$$

  Il est clair que l'application $df_{\vec{x}}$ est linéaire dans sa variable $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, donc $df_{\vec{x}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

  On a deux cas particuliers:

  – Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, la différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est liée au gradient de f en $\vec{x}$ par la relation

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot \vec{v} = \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) \qquad \text{pour tout } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

  – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction d'une seule variable et de m composantes $f = (f_1, \ldots, f_m)$, la différentielle $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est liée à la dérivée des fonctions f_j en x par la relation

$$df_x(v) = \Big(f_1'(x)\, v \;, \ldots, \; f_m'(x)\, v \Big) \qquad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}.$$

- On peut omettre la variable $\vec{v}$ et appeller **différentielle de** f l'application $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\vec{x} \longmapsto df_{\vec{x}}$.

Exemples.

1. $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x - 5x^4$ et $df_x(v) = (2x - 5x^4)\; v$.
2. $f(x,y) = x^2y^3 - 7y \quad \Longrightarrow \quad df_{(x,y)}(u,v) = 2xy^3\; u + (3x^2y^2 - 7)\; v$.

   Par exemple: $df_{(x,y)}(2,1) = 4xy^3 + 3x^2y^2 - 7$, $\quad df_{(1,1)}(u,v) = 2u - 4v$, $\quad df_{(1,1)}(2,1) = 0$
3. $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad df_{(x,y)}(u,v) = u \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2u + 2xyv \\ v \\ 2xu - 2yv \end{pmatrix}$.
4. $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad df_{(x,y,z)}(u,v,w) = u \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2xy \\ z^3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 3yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2u + 2xyv \\ z^3v + 3yz^2w \end{pmatrix}$.

La différentielle contient donc toutes les dérivées partielles et est définie aussi pour les fonctions vectorielles (contrairement au gradient). Mais pour la calculer on a fait appel à sa variable, le vecteur $\vec{v}$. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, il y a une astuce pour écrire la différentielle $df_{\vec{x}}$ sans indiquer son argument $\vec{v}$ explicitement. Par contre pour les fonctions vectorielles cette astuce ne marche pas, il faut representer la différentielle comme une matrice.

Remarque.

- L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n: on indique les n applications linéaires qui forment la **base canonique de** $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ par

$$dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{v} = (v_1, ..., v_n) \longmapsto dx_i(\vec{v}) = v_i, \qquad \text{pour tout } i = 1, ..., n.$$

- Toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'exprime alors comme combinaison des dx_i: $L = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n$, avec $a_i \in \mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\big)$ est un espace vectoriel de dimension $n \times m$, donc ce n'est pas possible d'en décrire une base à l'aide de seulement n applications. Les "dx_i", pour $i = 1, ..., n$, n'existent pas dans ce cas.

Proposition. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle différentiable sur $D \subset D_f$, alors:

- sa différentielle en $\vec{x} \in D$, c'est-à-dire l'application linéaire $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, s'écrit
$$df_{\vec{x}} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x})\; dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; dx_n$$
et est très souvent notée $df(\vec{x})$: attention à l'ambiguité dans la position de $\vec{x}$ par rapport à la notation $df_{\vec{x}}(\vec{v})$;
- sa différentielle $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit
$$df \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\; dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\; dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\; dx_n.$$

Exemples.

1. $f(x) = x^2 - x^5 \quad\Longrightarrow\quad df_x = (2x - 5x^4)\; dx \quad\Longrightarrow\quad df_1 = -3\; dx.$
2. $f(x,y) = x^2y^3 - 7y \quad\Longrightarrow\quad df_{(x,y)} = 2xy^3\; dx + (3x^2y^2 - 7)\; dy \quad\Longrightarrow\quad df_{(1,1)} = 2\; dx - 4\; dy.$
3. $f(x,y,z) = x^2z - 5y^3z^2 \quad\Longrightarrow\quad df_{(x,y,z)} = 2xz\; dx - 15y^2z^2\; dy + (x^2 - 10y^3z)\; dz \quad\Longrightarrow\quad df_{(1,1,1)} = 2\; dx - 15\; dy - 9\; dz.$

Exercice. Pour la fonction $f(x,y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$, trouver le domaine, ensuite calculer la différentielle au point $(x,y) = (2,0)$ et sur le vecteur $\vec{v} = (3,-6)$.

$$\begin{aligned}
D_f &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 + 5y > 0\Big\} = \text{portion du plan au-dessus de la parabole } y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}\\
df_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\; dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{1 - x^2 + 5y}\; dx + \frac{5}{1 - x^2 + 5y}\; dy\\
df_{(2,0)} &= \frac{-4}{1-4}\; dx + \frac{5}{1-4}\; dy = \frac{4}{3}\; dx - \frac{5}{3}\; dy\\
df_{(2,0)}(3,-6) &= \frac{4}{3}\, 3 - \frac{5}{3}(-6) = 4 + 10 = 14
\end{aligned}$$

Exercice. Soient (x,y,z) les coordonnées cartesiennes des points de $\mathbb{R}^3$, (ρ, φ, z) les coordonnées cylindriques et (r, φ, θ) les coordonnées sphériques, définies par

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0,\infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array} \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} r \in [0,\infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in [0,\pi] \end{array}$$

Montrer que, par changement de coordonnées, les différentielles $\{dx, dy, dz\}$, $\{d\rho, d\varphi, dz\}$ et $\{dr, d\varphi, d\theta\}$ se transforment comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} dx = \cos\varphi\; d\rho - \rho\sin\varphi\; d\varphi \\ dy = \sin\varphi\; d\rho + \rho\cos\varphi\; d\varphi \\ dz = dz \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} d\rho = \cos\varphi\; dx + \sin\varphi\; dy \\ \rho d\varphi = -\sin\varphi\; dx + \cos\varphi\; dy \\ dz = dz \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{l} dx = \cos\varphi\;\sin\theta\; dr - r\sin\varphi\;\sin\theta\; d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\; d\theta \\ dy = \sin\varphi\;\sin\theta\; dr + r\cos\varphi\;\sin\theta\; d\varphi + r\sin\varphi\;\cos\theta\; d\theta \\ dz = \cos\theta\; dr - r\sin\theta\; d\theta \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} dr = \cos\varphi\;\sin\theta\; dx + \sin\varphi\;\sin\theta\; dy + \cos\theta\; dz \\ r\sin\theta\; d\varphi = -\sin\varphi\; dx + \cos\varphi\; dy \\ rd\theta = \cos\varphi\;\cos\theta\; dx + \sin\varphi\;\cos\theta\; dy + \sin\theta\; dz \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} dr = \sin\theta\; d\rho + \cos\theta\; dz \\ d\varphi = d\varphi \\ rd\theta = \cos\theta\; d\rho - \sin\theta\; dz \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} d\rho = \sin\theta\; dr + \cos\theta\; d\theta \\ d\varphi = d\varphi \\ dz = r\cos\theta\; dr - r\sin\theta\; d\theta \end{array}\right. \tag{3}$$

Pour montrer les formules (1), on dérive x, y et z considerées comme fonctions de ρ, φ et z:

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,d\varphi + \frac{\partial x}{\partial z}\,dz = \cos\varphi\;d\rho - \rho\sin\varphi\;d\varphi \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\,d\varphi + \frac{\partial y}{\partial z}\,dz = \sin\varphi\;d\rho + \cos\varphi\;d\varphi \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\,d\varphi + \frac{\partial z}{\partial z}\,dz = dz
\end{aligned}$$

On en déduit la première formule. La seconde s'obtient en inversant le système donné par la première. Pour montrer les formules (2), on dérive x, y et z considerées comme fonctions de r, φ et θ:

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial r}\,dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \theta}\,d\theta = \cos\varphi\;\sin\theta\;dr - r\sin\varphi\;\sin\theta\;d\varphi + r\cos\varphi\;\cos\theta\;d\theta \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial r}\,dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\,d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \theta}\,d\theta = \sin\varphi\;\sin\theta\;dr + \cos\varphi\;\sin\theta\;d\varphi + r\sin\varphi\;\cos\theta\;d\theta \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial r}\,dr + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\,d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \theta}\,d\theta = \cos\theta\;dr - r\sin\theta\;d\theta
\end{aligned}$$

Pour les formules (3), on compose les (1) et les (2) de façon opportunée.

2.6 Matrice Jacobienne, Jacobien des changements de coordonnées

Rappel. Toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se represente come une matrice $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ (avec m lignes et n colonnes) telle que, pour tout $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$L(\vec{v}) = A\;\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}\;v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{(produit de matrices).}$$

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur $D \subset D_f$, avec différentielle $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

- La **matrice Jacobienne de** f est la matrice $J_f \in \mathcal{M}_{mn}$ associée à df, c'est à dire telle que $df_{\vec{x}}(\vec{v}) = J_f(\vec{x})\;\vec{v}$, pour tout $\vec{x} \in D$ et pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

  Si on indique les m composantes de f par $(f_1, ..., f_m)$, la **matrice Jacobienne de** f **en** $\vec{x} \in D$ est

$$J_f(\vec{x}) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}).$$

- Si la matrice Jacobienne est carrée ($n = m$), son détérminant $\operatorname{Jac} f = \det J_f$ s'appelle **Jacobien de** f.

Cas particuliers:

- si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, on a $\quad J_f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$ **(matrice ligne)**

- si $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\; (u, v) \mapsto h(u, v) = \big(h_1(u, v), h_2(u, v)\big)$, on a

$$J_h(u,v) \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Jac} h(u,v) = \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v}$$

- si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\; t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, on a $\quad J_g(t) \;=\; \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t) \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ **(matrice colonne = vecteur)**

- si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto g(z)$, on a $\quad J_g(z) = \big(g'(z)\big) \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R}) \quad$ et $\quad \operatorname{Jac} g(z) \;=\; g'(z) \in \mathbb{R}$.

Exemples.

1. $f(x,y) = x^2 y \quad \Longrightarrow \quad J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}$

2. $h(u,v) = (u^2 v, 3u) \quad \Longrightarrow \quad J_h(u,v) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22} \qquad \mathrm{Jac}\, h(u,v) = -3u^2$

3. $\gamma(t) = (2t, t^3+1) \quad \Longrightarrow \quad J_\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}$

4. **Jacobien du changement en coordonnées polaires:**

   $h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \quad \Longrightarrow \quad J_h(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Jac}\, h(\rho,\varphi) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$

5. **Jacobien du changement en coordonnées cylindriques:**

   $h(\rho,\varphi,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \quad \Longrightarrow \quad J_h(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Jac}\, h(\rho,\varphi,z) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$

6. **Jacobien du changement en coordonnées spériques:**

   $h(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \quad \Longrightarrow \quad J_h(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$

   $$\begin{aligned} \mathrm{Jac}\, h(r,\varphi,\theta) &= \cos\theta\Big(-r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\Big) - r\sin\theta\Big(r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\Big) \\ &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta = -r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Exercices.

1. Calculer le gradient, la différentielle et la matrice Jacobienne de la fonction $\quad f(x,y,z) = z\ \sin(xy)$.

   $\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\ \cos(xy) \\ xz\ \cos(xy) \\ \sin(xy) \end{pmatrix} \qquad df_{(x,y,z)} = yz\ \cos(xy)\ dx + xz\ \cos(xy)\ dy + \sin(xy)\ dz$

   $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\ \cos(xy) & xz\ \cos(xy) & \sin(xy) \end{pmatrix}$ $\qquad$ (<u>pas de virgules, c'est une matrice !</u>)

2. Calculer la différentielle et la matrice Jacobienne de la fonction $\quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\ \sin x \\ z\ \sin y \end{pmatrix}$. Pour tout $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ on a

   $df_{(x,y,z)}(u,v,w) = \begin{pmatrix} z\ \cos x \\ 0 \end{pmatrix}\ u + \begin{pmatrix} 0 \\ z\ \cos y \end{pmatrix}\ v + \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \end{pmatrix}\ w \qquad J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\ \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & z\ \cos y & \sin y \end{pmatrix}$

2.7 Conclusion: presentation des "dérivées" d'une fonction de plusieurs variables

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle différentiable sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$:

- les **dérivées partielles** sont des fonctions réelles $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}}$
- la **dérivée directionnelle** en direction de $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^N$ est une fonction réelle $\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}}$

  donnée par $\partial_{\vec{v}} f = v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$
- le **gradient** est une fonction vectorielle $\boxed{\vec{\nabla} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n}$ donnée par $\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$
- la **différentielle** est une fonction à valeur dans les applications linéaires $\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$

  donnée par $df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$
- la **Jacobienne** est une fonction à valeur dans les matrices à une ligne et n colonnes $\boxed{J_f : D \longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})}$

  donnée par $J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction vectorielle de composantes $f = (f_1, ..., f_m)$, différentiable sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$:

- les **dérivées partielles** sont des fonctions vectorielles $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$ données par $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}, ..., \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} \right)$
- la **dérivée directionnelle** en direction de $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^N$ est une fonction vectorielle $\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$

  donnée par $\partial_{\vec{v}} f = v_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$
- le **gradient** "$\vec{\nabla} f$" n'existe pas;
- la **différentielle** est une fonction à valeur dans les applications linéaires $\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$

  mais les applications linéaires de base "dx_i" $(i = 1, ..., n)$ n'existent pas;
- la **Jacobienne** est une fonction à valeur dans les matrices $\boxed{J_f : D \longrightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})}$

  donnée par $J_f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

2.8 Dérivées, gradient, différentielle et Jacobienne des fonctions composées

Proposition. Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux fonctions différentiables sur $D \subset \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors:

- La somme $f+g$ est différentiable et $\boxed{\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g}{\partial x_i} \quad \text{pour tout } i = 1, ..., n}$

  donc aussi $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$ si $m = 1$, $d(f+g) = df + dg$ et $J_{f+g} = J_f + J_g$.

- Le produit par scalaire $\lambda\ f$ est aussi différentiable et $\boxed{\dfrac{\partial(\lambda\ f)}{\partial x_i} = \lambda\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{pour tout } i = 1, ..., n}$

  donc aussi $\vec{\nabla}(\lambda\ f) = \lambda\ \vec{\nabla} f$ si $m = 1$, $d(\lambda\ f) = \lambda\ df$ et $J_{\lambda\ f} = \lambda\ J_f$.

Si f et g sont deux fonctions réelles ($m = 1$), alors:

- Le produit fg est différentiable et on a la **règle de Leibniz** $\boxed{\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\ g + f\ \dfrac{\partial g}{\partial x_i} \quad \text{pour tout } i = 1, ..., n}$

  donc aussi $\vec{\nabla}(fg) = \big(\vec{\nabla} f\big)\ g + f\ \big(\vec{\nabla} g\big)$, $d(fg) = \big(df\big)\ g + f\ \big(dg\big)$ et $J_{fg} = \big(J_f\big)\ g + f\ \big(J_g\big)$.

Exemple.

$$d\Big(xy^2\ e^{xy}\Big) = d\big(xy^2\big)\ e^{xy} + xy^2\ d\big(e^{xy}\big) = \big(y^2\ dx + 2xy\ dy\big)\ e^{xy} + xy^2\ \big(y\ e^{xy}\ dx + x\ e^{xy}\ dy\big)$$
$$= \big(y^2 + xy^3\big)\ e^{xy}\ dx + \big(2xy + x^2y^2\big)\ e^{xy}\ dy = \frac{\partial\big(xy^2\ e^{xy}\big)}{\partial x}\ dx + \frac{\partial\big(xy^2\ e^{xy}\big)}{\partial y}\ dy.$$

Proposition. Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction différentiable en $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction différentiable en $\vec{y} = (y_1, ..., y_m) = f(\vec{x})$, alors $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $\vec{x}$ et on a:

- $d\big(g \circ f\big)_{\vec{x}} = dg_{f(\vec{x})} \circ df_{\vec{x}}$ (composition d'applications linéaires)
- $J_{g\circ f}(\vec{x}) = J_g(f(\vec{x})) \cdot J_f(\vec{x})$ (produit de matrices)
- si $f = (f_1, ..., f_m)$, $g = (g_1, ..., g_p)$ et $g \circ f = \Big((g \circ f)_1, ..., (g \circ f)_p\Big)$, on a la **règle de la chaine**:

$$\boxed{\frac{\partial (g\circ f)_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\big(f(\vec{x})\big)\ \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}) \ + \ \frac{\partial g_j}{\partial y_2}\big(f(\vec{x})\big)\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\vec{x}) \ + \ \cdots \ + \ \frac{\partial g_j}{\partial y_m}\big(f(\vec{x})\big)\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x}) \qquad \begin{array}{l}\text{pour tout } i = 1, ..., n \\ \text{et pour tout } j = 1, ..., p\end{array}}$$

Cas particuliers:

- si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = z$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z)$:

$$d\big(g \circ f\big)_{(x,y)} = g'\big(f(x, y)\big)\ df_{(x,y)}, \qquad J_{g\circ f}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\ J_f(x, y)$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\[2ex] \dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(x, y) = g'\big(f(x, y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array}\right.}$$

- si $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ (u, v) \mapsto h(u, v) = (x, y)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$:

$$d\big(f \circ h\big)_{(u,v)} = df_{h(u,v)} \circ dh_{(u,v)}, \qquad J_{f\circ h}(u, v) = J_f\big(h(u, v)\big)\ J_h(u, v)$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial u}(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u, v)\big)\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u, v)\big)\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\[2ex] \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial v}(u, v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u, v)\big)\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u, v)\big)\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{array}\right.}$$

- si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ t \mapsto \gamma(t) = (x, y)$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$:

$$d\big(f \circ \gamma\big)_t = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t, \qquad J_{f\circ h}(t) = J_f\big(\gamma(t)\big)\ J_\gamma(t)$$

$$\boxed{\big(f \circ \gamma\big)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\ y'(t)}$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable de coordonnées (x, y).

1. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ pour $F(x, y) = \ln f(x, y)$.

   Si on pose $g(z) = \ln z$, on a $F = g \circ f$ et donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(x,y) = g'(f(x,y))\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{f(x,y)}\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(x,y) = g'(f(x,y))\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{f(x,y)}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

2. Calculer $\frac{\partial G}{\partial u}$ et $\frac{\partial G}{\partial v}$ pour $G(u, v) = f(v, uv^2)$.

   Si on pose $h(u, v) = (v, uv^2) = (x, y)$, c. à d. $\begin{cases} x = v \\ y = uv^2 \end{cases}$, on a $G = f \circ h$ et donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G(u,v)}{\partial u} &= \dfrac{\partial (f\circ h)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= \dfrac{\partial f}{\partial x}(v,uv^2)\cdot 0 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(v,uv^2)\cdot v^2 = v^2\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(v,uv^2) \\[2ex] \dfrac{\partial G(u,v)}{\partial v} &= \dfrac{\partial (f\circ h)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ &= \dfrac{\partial f}{\partial x}(v,uv^2)\cdot 1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(v,uv^2)\cdot 2uv \end{cases}$$

3. Calculer $H'(t)$ pour $H(t) = f(t^2, 3t)$.

   Si on pose $\gamma(t) = (t^2, 3t) = (x, y)$, c. à d. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 3t \end{cases}$, on a $H = f \circ \gamma$ et donc

$$H'(t) = (f\circ\gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)\ y'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^2,3t)\cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial x}(t^2,3t)\cdot 3$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x, y) = x^2y - y^2$.

1. Calculer $\dfrac{\partial g(x^2y - y^2)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g(x^2y - y^2)}{\partial y}$ où $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable.

   On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(x^2y-y^2)}{\partial x} = \dfrac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(x,y) = g'(f(x,y))\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(f(x,y))\ 2xy \\[2ex] \dfrac{\partial g(x^2y-y^2)}{\partial y} = \dfrac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(x,y) = g'(f(x,y))\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g'(f(x,y))\ (x^2-2y) \end{cases}$$

2. Soit $(x, y) = h(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v)\big)$ un changement de variables et $\tilde{f} = f \circ h$, calculer $\dfrac{\partial \tilde{f}(u, v)}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \tilde{f}(u, v)}{\partial v}$.

   On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde f(u,v)}{\partial u} &= \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= 2x(u,v)\ y(u,v)\ \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + (x(u,v)^2 - 2y(u,v))\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde f(u,v)}{\partial v} &= \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ &= 2x(u,v)\ y(u,v)\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + (x(u,v)^2 - 2y(u,v))\ \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

3. Soit $(x(t), y(t)) = \gamma(t)$ une trajectoire dans $\mathbb{R}^2$ dépendante du paramètre t, calculer la dérivée en t de la fonction $f(x(t), y(t))$.

   On a

$$\frac{d\,f(x(t),y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)\ y'(t) = 2x(t)\ y(t)\ \ x'(t) + (x(t)^2 - 2y(t))\ y'(t)$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{2x}{(x^2-y^2)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2y}{(x^2-y^2)^2}.$$

1. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial F(u,v)}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F(u,v)}{\partial v}$ de la fonction $F(u,v) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$.

   La fonction f est différentiable sur le domaine $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq \pm x\big\}$, car pour tout $(x,y) \in D$ les dérivées partielles sont bien définies et continues.

   La fonction F est l'expression de f dans les nouvelles coordonnées (u,v), et le changement de coordonnées est donné par

$$x(u,v) = \frac{u+v}{2} \qquad \text{et} \qquad y(u,v) = \frac{u-v}{2}.$$

   Pour que $y \neq \pm x$, il faut donc que $u \neq 0$ et $v \neq 0$. On a alors $F = f \circ h$, où $h(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)\ \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{u+v}{2}\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)\ \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{u-v}{2}\Big) \\
&= -\frac{2\ \frac{u+v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4} - \frac{(u-v)^2}{4}\right)^2}\ \frac{1}{2} + \frac{2\ \frac{u-v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4} - \frac{(u-v)^2}{4}\right)^2}\ \frac{1}{2} \\
&= -\frac{u+v}{2u^2v^2} + \frac{u-v}{2u^2v^2} \ = \ -\frac{1}{u^2 v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)\ \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{u+v}{2}\Big) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)\ \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{u-v}{2}\Big) \\
&= -\frac{2\ \frac{u+v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4} - \frac{(u-v)^2}{4}\right)^2}\ \frac{1}{2} + \frac{2\ \frac{u-v}{2}}{\left(\frac{(u+v)^2}{4} - \frac{(u-v)^2}{4}\right)^2}\ \Big(-\frac{1}{2}\Big) \\
&= -\frac{u+v}{2u^2v^2} - \frac{u-v}{2u^2v^2} \ = \ -\frac{1}{uv^2}
\end{aligned}$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer la dérivée $G'(t)$ de la fonction $G(t) = f(\cosh t, \sinh t)$, qui peut être interpretée comme la restriction de f à l'hyperbole paramétrée par $x(t) = \cosh t$ et $y(t) = \sinh t$.

   D'abord, on vérifie que $G(t)$ est dérivable pour tout $t \in \mathbb{R}$: puisque f est dérivable pour tout (x,y) tel que $x^2 - y^2 \neq 0$, et puisque $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a bien $x(t)^2 - y(t)^2 = 1 \neq 0$. Alors on a $G = f \circ \gamma$, où $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, et donc

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\cosh t, \sinh t\big)\ \frac{d\cosh t}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\cosh t, \sinh t\big)\ \frac{d\sinh t}{dt} \\
&= -\frac{2\cosh t}{(\cosh^2 t - \sinh^2 t)^2}\ \sinh t + \frac{2\sinh t}{(\cosh^2 t - \sinh^2 t)^2}\ \cosh t \\
&= -2\cosh t \sinh t + 2\cosh t \sinh t \ = \ 0
\end{aligned}$$

Exercice. Soient (x, y, z) les coordonnées cartesiennes des points de $\mathbb{R}^3$, (ρ, φ, z) les coordonnées cylindriques et (r, φ, θ) les coordonnées sphériques, définies par

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi & \\ y = \rho \sin\varphi & \rho \in [0, \infty[\\ z = z & \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi \sin\theta & r \in [0, \infty[\\ y = r \sin\varphi \sin\theta & \varphi \in [0, 2\pi[\\ z = r\cos\theta & \theta \in [0, \pi] \end{cases}$$

Montrer que, par changement de coordonnées, les derivées partielles $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ et $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\}$ se transforment comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \rho} = \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} - \sin\varphi\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\varphi\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \cos\varphi\ \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} = \cos\varphi\ \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} + \cos\varphi\cos\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} + \sin\varphi\cos\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\ \dfrac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} - \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \rho} = \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \tag{6}$$

Pour montrer les formules (4), considerons la fonction composée $\tilde{f} = f \circ h$ où f est une fonction des coordonnées cartesiennes (x, y, z) et $h(\rho, \varphi, z) = (x, y, z)$ est le changement en coordonnées cylindriques. On a alors $\tilde{f}(\rho, \varphi, z) = f(x, y, z)$, où x, y, z sont fonctions de (ρ, φ, z). En utilisant la règle de la chaîne, calculons les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \rho}\tilde{f}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}\tilde{f}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}\tilde{f}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial x}f$, $\frac{\partial}{\partial y}f$ et $\frac{\partial}{\partial z}f$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \rho} = \cos\varphi\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

On en déduit la première formule. La seconde s'obtient en inversant le système donné par la première.

Pour montrer les formules (5), on applique cette méthode à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où, cette fois, $h(r, \varphi, \theta) = (x, y, z)$ est le changement en coordonnées sphériques:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = r\cos\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

Pour les formules (6), on compose les (4) et les (5) de façon opportunée.

2.9 Dériveées partielles d'ordre supérieur, matrice Hessienne

Dans ce cours, les dérivées d'ordre supérieur servent exclusivement à étudier les fonctions (graphe, extrema locaux et dévéloppement de Taylor). Nous nous limitons donc au cas des fonctions réelles, et en particulier celles de deux variables, pour lesquelles on peut tracer un graphe décent.

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de variable $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, différentiable sur l'ensemble $D \subset D_f$. Alors les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, pour $i = 1, ..., n$, sont des fonctions définies sur D. Si elles sont à leur tour différentiables, on peut calculer leurs dérivées partielles. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- Les **dérivées partielles d'ordre** k **de** f sont les fonctions qu'on obtient en dérivant f succéssivement k fois:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_i \cdots \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

  Les dérivées partielles par rapport à des variables différentes s'appellent **dérivées mixtes**. Les dérivées partielles d'ordre 2 s'appellent aussi **dérivées secondes**.

  Cas particulier: si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables (x, y), les dérivées secondes sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

- Une fonction est **de classe** C^k si elle est différentiable jusqu'à l'ordre k, et si en plus les dérivées partielles d'ordre k sont continues. Une fonction est **lisse**, ou **de classe** C^∞, si elle est différentiable à tous les ordres $k \in \mathbb{N}$.

Théorème de Schwarz. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont différentiables en un point $\vec{x}$ et les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont <u>continues en $\vec{x}$</u>, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}), \qquad \text{pour tout } i \neq j.$$

Conséquence: Si f est une fonction de classe C^k (ou lisse), alors toutes ses dérivées mixtes jusqu'à l'ordre k (ou ∞), ayant le même nombre de dérivées en chaque x_i, coincident, indépendement de l'ordre dans lequel elles sont calculées.

Exemple.

$$f(x,y) = x^3 y^2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y^2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2 y \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2 y & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^3 \end{cases}$$

Exercice. Soient F et G deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, et soit $c \in \mathbb{R}^*$. On pose $u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$. Montrer que u est solution de l'**équation d'onde**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \text{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Les fonctions F et G agissent sur une seule variable et sont dérivables deux fois: indiquons par F' et G' leurs dérivées premières, et par F'' et G'' leurs dérivées secondes. En utilisant la règle de la chaine pour calculer la dérivée des fonctions composées, on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= F'(x-ct)\, \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G'(x+ct)\, \frac{\partial(x+ct)}{\partial x} &&= F'(x-ct) + G'(x+ct), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= F'(x-ct)\, \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + G'(x+ct)\, \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} &&= -c\,F'(x-ct) + c\,G'(x+ct). \end{aligned}$$

Dérivons ces fonctions pour obtenir les dérivées secondes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= F''(x-ct)\, \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G''(x+ct)\, \frac{\partial(x+ct)}{\partial x} &&= F''(x-ct) + G''(x+ct), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= -c\,F'(x-ct)\, \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + c\,G'(x+ct)\, \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} &&= (-c)^2\, F''(x-ct) + c^2\, G''(x+ct). \end{aligned}$$

Pour tout (x,t), on a alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = c^2\,F''(x-ct) + c^2\,G''(x+ct) - c^2\Big(F''(x-ct) + G''(x+ct)\Big) = 0.$$

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au moins deux fois en $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$.

- La **matrice Hessienne** de f en $\vec{x}$ est la matrice carrée de taille n contenant toutes les dérivées secondes de f en $\vec{x}$:

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

  Par le Théorème de Schwarz, la matrice Hessienne d'une fonction de classe C^2 est symétrique.

- Son déterminant $\operatorname{Hess} f(x,y) = \det H_f(x,y)$ s'appelle **Hessien** de f.

Exemples.

1. $f(x,y) = \ln(x^2y+1) \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2xy}{x^2y+1} \\[2ex] \dfrac{x^2}{x^2y+1} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y(x^2y+1) - 2xy\ 2xy}{(x^2y+1)^2} & \dfrac{2x(x^2y+1) - 2xy\ x^2}{(x^2y+1)^2} \\[2ex] \dfrac{2x(x^2y+1) - x^2\ 2xy}{(x^2y+1)^2} y & -\dfrac{x^2\ x^2}{(x^2y+1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2y(1-x^2y)}{(x^2y+1)^2} & \dfrac{2x}{(x^2y+1)^2} \\[2ex] \dfrac{2x}{(x^2y+1)^2} y & -\dfrac{x^4}{(x^2y+1)^2} \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(x,y) = -\frac{2y(1-x^2y)}{(x^2y+1)^2}\ \frac{x^4}{(x^2y+1)^2} - \left(\frac{2x}{(x^2y+1)^2}\right)^2 = -\frac{2x^4(y - x^2y^2 + 1)}{(x^2y+1)^4}$$

2. $g(x,y,z) = x\sin y + y \sin z \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x\cos y + \sin z \\ y \cos z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y & 0 \\ \cos y & -x\sin y & \cos z \\ 0 & \cos z & -y\sin z \end{pmatrix}$$

$$\det H_g(x,y,z) = -\cos y\,\Big(-y\cos y \sin z - 0\Big) = y\cos^2 y \sin z$$

Exercice. Montrer que le déterminant Hessien de la fonction $f(x,y) = \sin(x-y)$ est nul en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x-y) \\ -\cos(x-y) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x-y) & \sin(x-y) \\ \sin(x-y) & -\sin(x-y) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \det H_f(x,y) = \big(-\sin(x-y)\big)^2 - \big(\sin(x-y)\big)^2 = 0 \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au moins deux fois en $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$.

- Le **Laplacien** de f en $\vec{x}$ est la trace de la matrice Hessienne de f en $\vec{x}$: $\Delta f(\vec{x}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) + \cdots + \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x})$.
- Une fonction f s'appelle **harmonique** si $\Delta f(\vec{x}) = 0$ en tout point $(\vec{x})$.

Proposition. [Interpretation géométrique du Laplacien.] Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un carré Q de taille $h \times h$ contenant un point (a, b), et soit $\mu(f, Q)$ la moyenne de f sur Q (c'est à dire l'intégrale double $\mu(f, Q) = \dfrac{1}{h^2} \iint_Q f(x, y)\, dx\, dy$, cf. Ch. 4). Alors on a

$$\mu(f, Q) = f(a, b) + \frac{h^2}{24}\, \Delta f(a, b) + O(h^4).$$

Cela signifie que la différence $f(a, b) - \mu(f, Q)$ est proportionnelle à $\Delta f(a, b)$, et la constante de proportionalité ne dépend qua de la taille du carré où on calcule la moyenne $\mu(f, Q)$!

Exemple.

$$f(x,y,z) = \frac{x^2(y+1)}{z-1} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{2x(y+1)}{z-1} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{x^2}{z-1} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\dfrac{x^2(y+1)}{(z-1)^2} \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{2(y+1)}{z-1} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \dfrac{2x^2(y+1)}{(z-1)^3} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \qquad \Delta f(x,y,z) = \frac{2(y+1)}{z-1} + \frac{2x^2(y+1)}{(z-1)^3} = \frac{2(y+1)\big((z-1)^2 + x\big)}{(z-1)^3}$$

Exercice. Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquels la fonction $u(x, t) = x^2 - c^2 t^2$ est harmonique.

$$\vec{\nabla} u(x,t) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2c^2 t \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H_u(x,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2c^2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Delta u(x,t) = 2 - 2c^2 = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad c = \pm 1.$$

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et posons $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

1. Calculer le Laplacien de F en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$.

   On veut calculer $\Delta F(x, y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$. Notons f' et f'' les dérivées de la fonction f (qui a une seule variable). En utilisant la règle de la chaine pour la dérivée des fonctions composées, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} = f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} = f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial y} \\ &= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

   En utilisant aussi la règle de Leibniz pour la dérivée d'un produit de fonctions, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{\partial f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x}\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)^2 + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \end{aligned}$$

et de la même façon

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Delta F(x,y) &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

2. Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, l'équation $\Delta F(x,y) = f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$ ne dépend que d'une seule variable réelle $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$, et devient une équation différentielle du deuxième ordre dans l'indéterminée $f = f(r)$, non homogène et à coéfficients non constants. Pour la résoudre, on la transforme en un système d'équations différentielles du premier ordre (toujours non homogènes et à coéfficients non constants):

$$\text{(E)} \qquad f''(r) + \frac{1}{r}\ f'(r) = r \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} f'(r) = g(r) & \text{(E1)} \\ g'(r) + \frac{1}{r}\ g(r) = r & \text{(E2)} \end{cases}$$

La solution f de (E) se trouve en cherchant d'abord la solution g de (E2) et puis en la mettant dans (E1).
La solution g de (E2) s'obtient comme somme de la solution générale g_0 de l'équation homogène associée, qui est $g'(r) + \frac{1}{r}\ g(r) = 0$, et d'une solution particulière g_p de (E2) obtenue avec la méthode de la variation de la constante à partir de g_0. Explicitement, on a:

$$\text{(E2) homogène} \quad g_0'(r) = -\frac{1}{r}\ g_0(r) \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_0(r) = \lambda\ e^{-\int \frac{1}{r}\,dr} = \lambda\ e^{-\ln r} = \lambda\ e^{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \lambda\ \frac{1}{r}, \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il faut donc chercher une solution particulière de (E2) sous la forme $g_p(r) = \frac{\lambda(r)}{r}$, qui donne $g_p'(r) = \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{\lambda(r)}{r^2}$:

$$\text{(E2)} \quad g_p'(r) + \frac{1}{r}\ g_p(r) = r \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\lambda'(r)}{r} = r \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda'(r) = r^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda(r) = \frac{r^3}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad g_p(r) = \frac{r^2}{3}.$$

La solution de (E2) est donc $g(r) = g_0(r) + g_p(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Enfin, la solution de (E) se trouve à partir de (E1):

$$\text{(E1)} \quad f'(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad f(r) = \lambda\ \ln(r) + \frac{r^2}{9} + \mu, \qquad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2.10 Formule de Taylor

Pour simplifier les notations, dans ce paragraphe on se limite à considerer les fonctions de deux variables.

Théorème. **[Dévéloppement de Taylor.]** Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable dans un voisinage ouvert d'un point (a,b) peut être approximée par un polynôme, appellé **partie principale du dévéloppement de Taylor**, dont les coéfficients dépendent uniquement des dérivées de f en (a,b).

Plus précisement, soit (x,y) un point très proche de (a,b), dans ce voisinage, de telle sorte que $h = x-a$ et $k = y-b$ tendent vers zéro.

- **À l'ordre 1:** Si f est de classe C^1, alors
$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\,(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\,(y-b) + ||(h,k)||\;\varepsilon(h,k)$$
$$= f(a,b) + df_{(a,b)}(x-a, y-b) + o\big(||(h,k)||\big),$$
où $\varepsilon(h,k)$ tend vers zéro pour $(h,k) \to (0,0)$, et donc le terme "**petit o**" $o\big(||(h,k)||\big) = ||(h,k)||\;\varepsilon(h,k)$ tend vers zéro plus vite que $||(h,k)||$, pour $(h,k) \longrightarrow (0,0)$, i.e. $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{o\big(||(h,k)||\big)}{||(h,k)||} = 0$, et par conséquent est négligeable par rapport au terme précédent, qui est de l'ordre de (h,k).
- **À l'ordre 2:** Si f est de classe C^2, alors
$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\,(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\,(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}\,(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}\,(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\,(y-b)^2 + ||(h,k)||^2\;\varepsilon(h,k) \end{aligned}$$
$$= f(a,b) + J_f(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H_f(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + o\big(||(h,k)||^2\big),$$
où la fonction $o\big(||(h,k)||^2\big) = ||(h,k)||^2\;\varepsilon(h,k)$ tend vers zéro plus vite que $||(h,k)||^2$, pour $(h,k) \longrightarrow (0,0)$, donc est négligeable.

Exemples.

1. $f(x,y) = \dfrac{x-1}{y-1}$ et $(a,b) = (0,0) \quad \Longrightarrow \quad f(0,0) = 1$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y-1} & -\dfrac{x-1}{(y-1)^2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(y-1)^2} \\ -\dfrac{1}{(y-1)^2} & \dfrac{2(x-1)}{(y-1)^3} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ pour (x,y) proche de $(0,0)$ on a $\dfrac{x-1}{y-1} = 1 - x + y - xy + y^2 + o\big(||(x,y)||^2\big).$

2. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{xy-1}$ et $(a,b) = (2,-1) \quad \Longrightarrow \quad f(2,-1) = -1$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{(xy-1)-(x-y)y}{(xy-1)^2} \\ \frac{-(xy-1)-(x-y)x}{(xy-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2-1}{(xy-1)^2} \\ \frac{1-x^2}{(xy-1)^2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{(y^2-1)\;2(xy-1)y}{(xy-1)^4} & \frac{2y(xy-1)^2-(y^1-1)\;2(xy-1)x}{(xy-1)^4} \\ \text{idem} & -\frac{(1-x^2)\;2(xy-1)x}{(xy-1)^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2y(y^2-1)}{(xy-1)^3} & \frac{2(x-y)}{(xy-1)^3} \\ \text{idem} & -\frac{2x(1-x^2)}{(xy-1)^3} \end{pmatrix} \Rightarrow H_f(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ pour (x,y) proche de $(2,-1)$ on a $\dfrac{x-y}{xy-1} = -1 - \dfrac{1}{3}\,(y+1) - \dfrac{2}{9}\,(x-2)(y+1) - \dfrac{2}{9}\,(y+1)^2 + o\big(||(x-2,y+1)||^2\big).$

Exercice. Montrer que le graphe de la fonction $f(x,y) = \dfrac{x-y}{xy-1}$, dans un voisinage de l'origine $(0,0)$, peut être approximé par le plan d'équation $x - y + z = 0$.

Comme montre le calcul des dérivées de f de l'exemple précedent, la fonction f est de classe C^2 sur son domaine $D_f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\big\}$, qui est le plan moins les deux branches de parabole d'équation $y = 1/x$. Le point $(0,0)$ est bien contenu *à l'intérieur* de D_f (car D_f est ouvert et n'a pas de bord), donc il existe un voisinage ouvert de $(0,0)$ dedans D_f. Dans ce voisinage, appellons-le U, le graphe de f est l'ensemble

$$\Gamma_f(U) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{x-y}{xy-1} \quad \text{avec } (x,y) \text{ proche de } (0,0)\Big\}.$$

Il faut donc montrer que si (x,y) est proche de $(0,0)$, l'équation $z = \dfrac{x-y}{xy-1}$ peut être approximée par l'équation du plan $z = -x + y$. Pour cela, il suffit d'écrire le développement de Taylor de f au point $(0,0)$. En utilisant le gradient et la matrice Hessienne de f déja calculés, on obtient

$$f(0,0) = 0, \qquad \vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour (x,y) proche de $(0,0)$ on a bien $\quad f(x,y) = -x + y + o\big(||(x,y)||^2\big)$, et finalement

$$\Gamma_f(U) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -x + y + o\big(||(x,y)||^2\big) \quad \text{avec } (x,y) \text{ proche de } (0,0)\Big\}.$$

Exercice. La pression P d'un gaz parfait s'exprime comme fonction de la temperature T (mesurée en dégrés Kelvin K) et du volume V (mesuré en mètres cubes m^3) selon la loi

$$P(T,V) = nR\,\frac{T}{V} \quad (\text{en } K/m^3),$$

où n est la quantité de matière (exprimée en moles) et $R = 8.3144\, J/K \times$ moles est la constante universelle d'un gaz parfait.

1. Supposons que le gaz se trouve à pression $P_0 = P(300\,K, 1\,m^3) = 300\,nR\,K/m^3$. Quelle modification subit la pression si on augmente la temperature de $1\,K$ et au même temps on augmente le volume de $0.1\,m^3$, sans changer le nombre de moles n?

   A priori, une augmentation de la temperature fait augmenter la pression, et une augmentation du volume fait diminuer la pression. Si les deux augmentent au meme temps, que se passe-t-il?

   Pour répondre, il faut évaluer $\Delta P = P(301\,K, 1.1\,m^3) - P_0$. On pourrait calculer $P(301\,K, 1.1\,m^3) = nR\,\frac{301}{1.1}\,K/m^3$, mais sans calculette ce n'est pas amusant. Utilisons plutôt le développement de Taylor à l'ordre 1, autour du point $(T_0, V_0) = (300\,K, 1\,m^3)$:

$$\begin{aligned} P(T,V) &\simeq P(T_0,V_0) + dP_{(T_0,V_0)}(T-T_0, V-V_0) = P_0 + \frac{\partial P}{\partial T}(T_0,V_0)\ (T-T_0) + \frac{\partial P}{\partial V}(T_0,V_0)\ (T-T_0) \\ &= P_0 + nR\,\frac{T-T_0}{V_0} - nR\,\frac{T_0(V-V_0)}{V_0^2} \\ \Longrightarrow \qquad \Delta P &\simeq nR\,\left(\frac{1\,K}{1\,m^3} - \frac{300\,K \times 0.1\,m^3}{(1\,m^3)^2}\right) = nR\,\big(1\,K/m^3 - 30\,K/m^3\big) = -29\ nR\ K/m^3 < 0! \end{aligned}$$

   Au final, l'augmentation du volume de $0.1\,m^3$ l'emporte sur l'augmentation de la temperature de $1\,K$, et la pression diminue.

2. Maintenant on veut connaitre la pression du gaz qui se trouve à l'état (T,V), mais la mesure de cet état nous donne les valeurs (T_0, V_0) avec une erreure relative

$$\left|\frac{T-T_0}{T_0}\right| < 0.005\,\% \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{V-V_0}{V_0}\right| < 0.002\,\%.$$

   Quelle est l'erreure relative induite par cette mesure sur la pression?

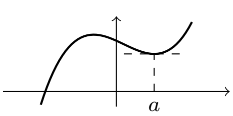
   On utilise à nouveau le développement de Taylor de $P = P(T,V)$ à l'ordre 1, autour de (T_0,V_0), en posant $P_0 = P(T_0,V_0)$:

$$\begin{aligned} P - P_0 &\simeq dP_{(T_0,V_0)}(T-T_0, V-V_0) = nR\,\frac{T-T_0}{V_0} - nR\,\frac{T_0(V-V_0)}{V_0^2} \\ \Longrightarrow \qquad \frac{P-P_0}{P_0} &\simeq nR\,\frac{T-T_0}{V_0\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} - nR\,\frac{T_0(V-V_0)}{V_0^2\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} = \frac{T-T_0}{T_0} - \frac{V-V_0}{V_0} \\ \Longrightarrow \qquad \left|\frac{P-P_0}{P_0}\right| &\leqslant \left|\frac{T-T_0}{T_0}\right| + \left|\frac{V-V_0}{V_0}\right| < 0.005\,\% + 0.002\,\% = 0.007\,\%. \end{aligned}$$

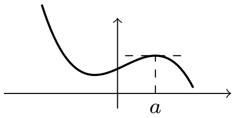
2.11 Points critiques, extrema locaux et points col.

Rappel. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en un point $a \in D_f$, la croissance ou décroissance de f en a est décelée par le signe de $f'(a)$ (positif ou négatif). Que se passe-t-il si $f'(a) = 0$ (*point critique*) ?

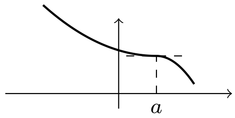
Dans ce cas, la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ est horizontale et tout peut arriver: au point a, la fonction f a soit un *minimum local*, soit un *maximum local*, soit un *point d'inflexion*:



minimum local



maximum local



point d'inflexion

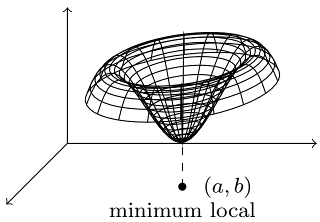
Si $f'(a) = 0$, pour comprendre le comportement de f en a il faut regarder le signe de la deuxième dérivée, qui detecte la convexité ou concavité de la fonction: si $f''(a) > 0$ on a un minimum local, et si $f''(a) < 0$ on a un maximum local. Que se passe-t-il si $f''(a) = 0$ (*point plat*) ?

Si $f''(a) = 0$ on ne sait toujours pas ce que fait f en a, il faut regarder les dérivées d'ordre supérieur: si la première dérivée non nulle est d'ordre pair, on a un minimum ou un maximum local selon le signe de cette dérivée (positive ou négative). Si la première dérivée non nulle est d'ordre impair, par contre, on a un point d'inflexion.

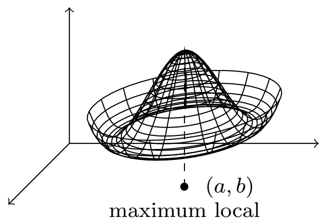
Dans ce paragraphe on introduit l'analogue des points de minimum et maximum locaux et des points d'inflexion pour les fonctions de deux variables, et on donne un critère pour les trouver (incomplet, car s'arrete aux dérivées d'ordre 2).

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'un point $(a, b) \in D_f$ est un **extremum local** de f s'il est

- soit un **minimum local**: $f(a, b) \leqslant f(x, y)$ pour tout les (x, y) dans un voisinage de (a, b),
- soit un **maximum local**: $f(a, b) \geqslant f(x, y)$ pour tout les (x, y) dans un voisinage de (a, b).



minimum local



maximum local

Si f est différentiable au point (a, b), le signe des dérivées de f en (a, b) permet d'établir si le point est un extremum local. À partir de maintenant, soit donc $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$.

Définition. Un point $(a, b) \in D$ s'appelle **point critique** de f si $\overrightarrow{\nabla} f(a, b) = (0, 0)$.

Cette condition signifie que le plan tangent au graphe de f au point $(a, b, f(a, b))$ est horizontal: un extremum local est donc un point critique. Mais tous les points avec tangente horizontale ne sont pas des extrema locaux. Pour détecter la nature d'un point critique, on utilise le critère suivant.

Théorème. Soit $(a, b) \in D$ un point critique de f. Si $\det H_f(a, b) > 0$, alors le point (a, b) est un extremum local.

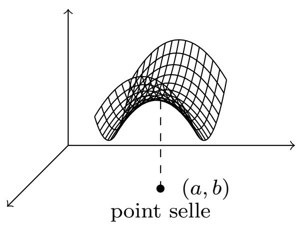
Dans ce cas:

- (a, b) est un minimum local si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$,
- (a, b) est un maximum local si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$.

Définition. Soit $(a, b) \in D$ un point critique de f.

- Si $\det H_f(a, b) < 0$, on dit que (a, b) est un **point col** ou **point selle**.

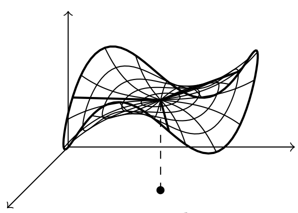
  La forme d'un point col est détérminée: par rapport aux deux courbes qui le traversent et qui ont la plus forte pente (croissante ou décroissante), il est un minimum local de l'une et un maximum local de l'autre. Cela arrive, par exemple, dans l'*hyperboloïde parabolique* $z = x^2 - y^2$ (cf. figure).



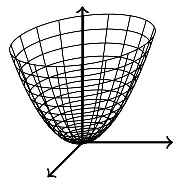
point selle

- Si $\det H_f(a, b) = 0$, on dit que (a, b) est un **point plat**.

  La forme d'un point plat n'est pas détérminée: par rapport aux courbes qui le traversent et qui ont la plus forte pente (croissante ou décroissante), il peut être un point d'inflexion pour les deux, par exemple dans la *selle de singe* $z = x^3 - 3xy^2$ (cf. figure), ou bien il peut être un extremum locale pour l'une alors que l'autre est horizontale. Pour déterminer la forme d'un point plat il faudrait regarder les dérivées de f d'ordre supérieur à 2.


point plat

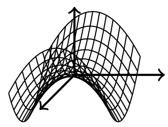
Exercice. Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et, si possible, leur nature.



1. $f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   Points critiques: $\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$

   Nature: $\det H_f(0,0) = 4 > 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,0)$ est un minimum local.



2. $f(x,y) = x^2 - y^2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

   Points critiques: $\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$

   Nature: $\det H_f(0,0) = -4 < 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,0)$ est un point col.

3. $f(x,y) = 4(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4x(x^2+y^2) \\ 8y - 4y(x^2+y^2) \end{pmatrix} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8-12x^2-4y^2 & -8xy \\ -8xy & 8-12y^2-4x^2 \end{pmatrix}$

   Points critiques: $\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0) \iff \left\{ \begin{array}{l} x(2-x^2-y^2) = 0 \\ y(2-x^2-y^2) = 0 \end{array} \right. \iff \left\langle \begin{array}{l} \text{soit } (x,y) = (0,0) \\ \text{soit } x^2+y^2 = 2 \text{ (cercle)} \end{array} \right.$

   Nature:

   $\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 64 > 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,0)$ est un minimum local.

   Si (x,y) est tel que $x^2+y^2 = 2$, alors $\det H_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x,y)$ est un point plat.

4. $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy + 4x \\ 2x^2 + 2y \end{pmatrix} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y+4 & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}$

   Points critiques: $\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0) \iff \left\{ \begin{array}{l} 4x(y+1) = 0 \\ 2(x^2+y) = 0 \end{array} \right. \iff \left\langle \begin{array}{l} \text{soit } (x,y) = (0,0) \\ \text{soit } (x,y) = (\pm 1, -1) \end{array} \right.$

   Nature:

   $\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 > 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4 > 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,0)$ est un minimum local.

   $\det H_f(\pm 1, -1) = \det \begin{pmatrix} 0 & \pm 4 \\ \pm 4 & 2 \end{pmatrix} = -16 < 0 \quad \Longrightarrow \quad (\pm 1, -1)$ sont deux points col.

5. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + y^2 + 10x \\ 2xy + 2y \end{pmatrix} \quad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x + 10 & 2y \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$

   Points critiques: $\vec{\nabla} f(x,y) = (0,0) \iff \left\{ \begin{array}{l} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2(x+1)y = 0 \iff \text{soit } x = -1, \text{ soit } y = 0 \end{array} \right. \iff$

   soit $\left\{ \begin{array}{l} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ x = -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y^2 - 4 = 0 \\ x = -1 \end{array} \right. \iff (x,y) = (-1, \pm 2),$

   soit $\left\{ \begin{array}{l} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x(3x+5) = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \iff \left\langle \begin{array}{l} \text{soit } (x,y) = (0,0) \\ \text{soit } (x,y) = (-5/3, 0) \end{array} \right.$

   Nature:

   $\det H_f(-1, \pm 2) = \det \begin{pmatrix} -2 & \pm 4 \\ \pm 4 & 2 \end{pmatrix} = -20 < 0 \quad \Longrightarrow \quad (-1, \pm 2)$ sont deux points col.

   $\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 20 > 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 10 > 0 \quad \Longrightarrow \quad (0,0)$ est un minimum local.

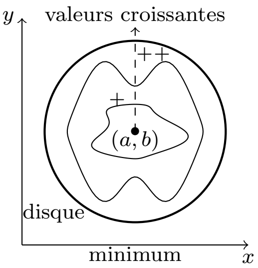
   $\det H_f(-5/3, 0) = \det \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -20 < 0 \quad \Longrightarrow \quad (-5/3, 0)$ est un point col.

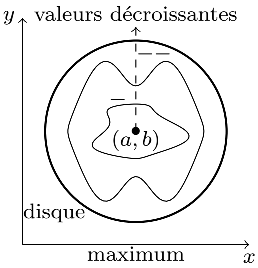
Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1, on peut reconnaitre les points critiques et leur nature en regardant les lignes de niveau de f.

Proposition. Un point $(a, b) \in D_f$ est un point critique de f si on est dans l'une des situations suivantes, pour $c = f(a, b)$:

- $L_c(f)$ ne contient que le point (a, b): dans ce cas (a, b) est un extremum local.

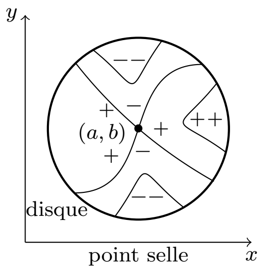
  De plus:
  - (a, b) est un minimum si, dans un petit disque autour de (a, b), on a
    - $L_d(f) = \varnothing$ pour $d < c$
    - $L_d(f)$ est une courbe <u>fermée</u> pour $d > c$ et d proche de c.
  - (a, b) est un maximum si, dans un petit disque autour de (a, b), on a
    - $L_d(f) = \varnothing$ pour $d > c$
    - $L_d(f)$ est une courbe <u>fermée</u> pour $d < c$ et d proche de c.

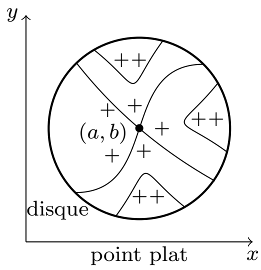


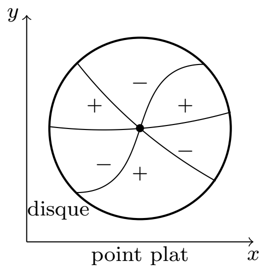


- $L_c(f)$ consiste de plusieurs courbes qui s'intersectent en (a, b): dans ce cas (a, b) est un point selle ou un point plat.

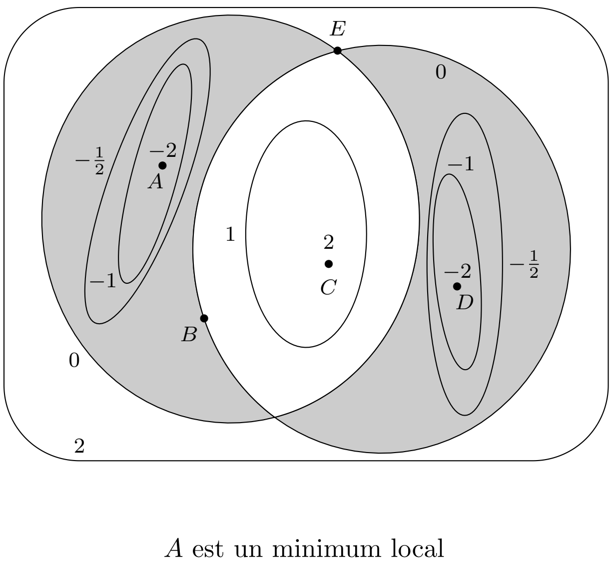
  De plus:
  - (a, b) est un point selle si
    - il est intersection de <u>deux</u> courbes
    - $L_d(f) \neq \varnothing$ pour tout d proche de c.
  - (a, b) est un point plat dans tous les autres cas.

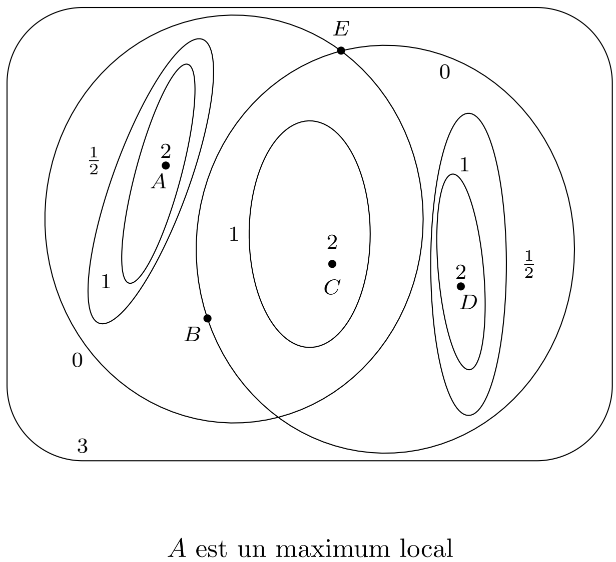






Exercice. À partir des lignes de niveau d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, dire si les points indiqués sont critiques et, si c'est le cas, décrire leur nature.





A est un minimum local
B n'est pas un point critique
C est un maximum local
D est un minimum local
E est un point selle

A est un maximum local
B est un point plat
C est un maximum local
D est un minimum local
E est un point plat

3 Intégrales multiples

3.1 Intégrale simple comme somme de Riemann et aire.

Rappel. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à une variable définie sur un intervalle $[a, b]$, on a défini l'**intégrale de f sur** $[a, b]$ comme le nombre

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b,$$

où F est une **primitive de f sur** $[a, b]$, c'est-à-dire une fonction dérivable et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. La primitive de f est notée $F(x) = \displaystyle\int f(x)\ dx$. Si f admet une primitive F, par exemple quand $\underline{f \text{ est continue}}$, l'intégrale de f sur $[a, b]$ existe dès que l'intervalle $\underline{[a, b] \text{ est borné}}$. (Si l'intervalle n'est pas borné, on parle d'*intégrale impropre*.)

Pour calculer l'intégrale, ou la primitive, on transforme l'intégrand $f(x)$ jusqu'à obtenir <u>la dérivée d'une fonction</u>, qui sera $F(x)$. Pour cela, on emploit les deux techniques suivantes:

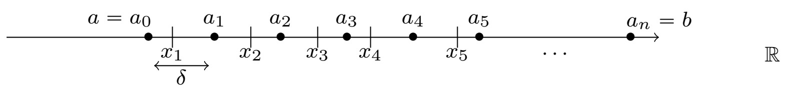
Théorème du changement de variable. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f\big(h(t)\big)\ h'(t)\ dt,$

où $x = h(t)$ et h est un <u>difféomorphisme</u> (bijection dérivable avec réciproque h^{-1} dérivable).

Théorème d'intégration par parties. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ g'(x)\ dx = \Big[f(x)\ g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\ g(x)\ dx.$

Définir l'intégrale comme valeur d'une primitive ne permet pas d'en comprendre la signification géométrique (c'est une *aire*), ni d'en éteindre la définition aux fonctions de plusieures variables. Pour cela, il faut interpreter les intégrales comme *sommes de Riemann.* Cette méthode ne réquiert pas de connaitre à priori une primitive.

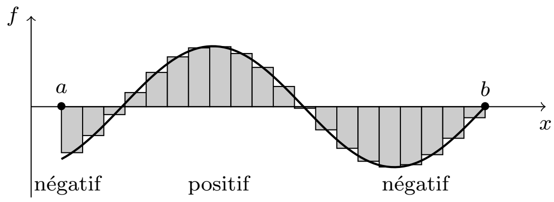
Définition. Une **subdivision** $\mathcal{S}_\delta$ de $[a, b]$ est une partition de l'intervalle $I = [a, b]$ en n intervalles $I_i = [a_{i-1}, a_i]$ (pour $i = 1, ..., n$) de longueur $\delta = \dfrac{b-a}{n}$, en partant de $a_0 = a$ et en finissant en $a_n = b$.



Pour tout choix de n points $x_i \in I_i$ $(i = 1, ..., n)$, on appelle **somme de Riemann de f** associée à la subdivision $\mathcal{S}_\delta$ et aux points $\{x_i\}$ la somme

$$R_\delta(f; \{x_i\}) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \delta$$

où chaque terme $f(x_i)\ \delta$ représente l'**aire algébrique** du rectangle de base I_i et hauteur $f(x_i)$.
Ici, "algébrique" signifie avec un signe $\pm$ qui dépend du signe de la fonction f au point choisi x_i.



Définition. Si la limite $\lim\limits_{\delta \to 0} R_\delta(f; \{x_i\})$ existe, elle est indépendante du choix des points $x_i \in I_i$. Dans ce cas, on appelle **intégrale de Riemann de f sur** $[a, b]$ cette limite:

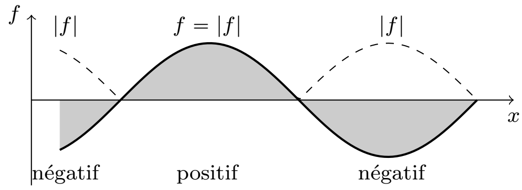
$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\delta \to 0} R_\delta(f; \{x_i\}).$$

On dit que f est **intégrable sur** $[a, b]$ **selon Riemann** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ est finie (un nombre réel, pas $\pm\infty$).

Théorème fondamental du calcul intégral. Si la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ selon Riemann, alors elle admet une primitive F sur $[a, b]$, et on a:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt + c \qquad \text{pour tout } x \in [a, b] \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

Corollaire. [Signification géométrique de l'intégrale simple.]

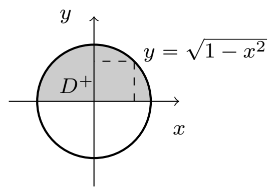


1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx =$ aire "algébrique" de la portion du plan comprise entre le graphe de f et l'axe $\vec{Ox}$.

2. $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\ dx =$ aire de la portion du plan comprise entre le graphe de f et l'axe $\vec{Ox}$.

Exemple. Aire du disque. Par symétrie, on voit que l'aire du disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est deux fois l'aire du demi-disque

$$D^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\},$$



qui est la portion de plan comprise entre l'axe $\vec{Ox}$ et le graphe de la fonction $y = \sqrt{1-x^2}$. On a alors

$$\text{Aire}\,(D) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx.$$

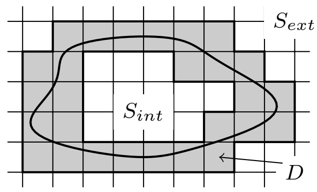
On calcule cette intégrale par changement de variable, en posant $x = \sin t$ pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, car $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Puisque $dx = \cos t\ dt$, on a

$$\text{Aire}\,(D) = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\ dt = \Big[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \big(0 + \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2}\big) = \pi.$$

3.2 Intégrale double et volume. Théorème de Fubini. Changement de variables.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble borné $D \subset \mathbb{R}^2$.

Définition. Pour tout $\delta > 0$, on appelle **subdivision de** D l'ensemble $\mathcal{S}_\delta$ des carrés K_i de coté δ qui recouvrent D dans n'importe quel grillage de pas δ. On considère deux telles subdivisions:

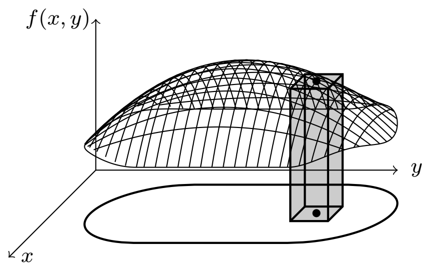


- $\mathcal{S}_\delta^{ext}$ indique le **recouvrement large** (à l'extérieur),
- $\mathcal{S}_\delta^{int}$ indique le **recouvrement strict** (à l'intérieur).

Puisque D est borné, les subdivisions contiennent un nombre fini de carrés, et on a $\mathcal{S}_\delta^{int} \subset \mathcal{S}_\delta^{ext}$. En fait, les carrés contenus dans l'ensemble $\mathcal{S}_\delta^{ext} \backslash \mathcal{S}_\delta^{int}$ couvrent exactement le bord ∂D de D.

Pour tout choix de points $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$, on appelle **sommes de Riemann de** f associées aux subdivisions $\mathcal{S}_\delta^{ext/int}$ et aux points $\{(x_i, y_i)\}$ les sommes

$$R_\delta^{ext/int}(f, \{(x_i,y_i)\}) = \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta^{ext/int}} f(x_i, y_i)\ \delta^2,$$



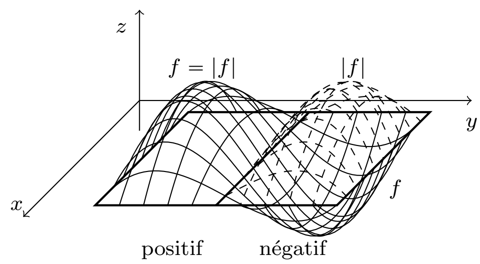
où chaque terme $f(x_i, y_i)\ \delta^2$ représente le **volume algébrique** du parallélepipède de base K_i et hauteur $f(x_i, y_i)$, avec signe $\pm$ qui dépend du signe de f en (x_i, y_i).

Définition. Si les limites $\lim\limits_{\delta\to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i,y_i)\})$ existent, elles sont indépendantes du choix des points $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$ et elles coincident. Dans ce cas, on appelle **intégrale double de** f **sur** D cette limite:

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \lim_{\delta\to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i,y_i)\}).$$

On dit que f **est intégrable sur** D **selon Riemann** si l'intégrale $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$ est finie (un nombre réel, pas $\pm\infty$). En particulier, c'est le cas si f est continue et D est borné.

Corollaire. [Signification géométrique de l'intégrale double.]

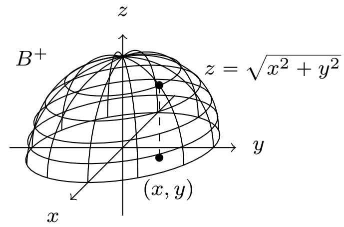


1. $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dx\ dy =$ volume "algébrique" de la portion d'espace comprise entre le graphe de f et le plan xOy.

2. $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\ dx\,dy =$ volume de la portion d'espace comprise entre le graphe de f et le plan xOy.

Exemple. Volume de la boule. Le volume de la boule $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ est deux fois le volume de la demi-boule

$$B^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\},$$



comprise entre le plan xOy et le graphe de la fonction $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$. On a alors

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\ dx\ dy, \qquad \text{où} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}.$$

Pour calculer les intégrales doubles, on utilise les proprietés suivantes, et deux techniques spécifiques.

Proposition.

1. $\displaystyle\iint_D \big(\lambda\ f(x,y) + \mu\ g(x,y)\big)\ dx\ dy = \lambda\iint_D f(x,y)\ dx\ dy + \mu\iint_D g(x,y)\ dx\ dy,$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

2. Si $D = D_1 \cup D_2$ et $D_1 \cap D_2 =$ courbe ou $\varnothing$, alors $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \iint_{D_1} f(x,y)\ dx\ dy + \iint_{D_2} f(x,y)\ dx\ dy$;

3. $\displaystyle\Big|\iint_D f(x,y)\ dx\ dy\Big| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\ dx\ dy$;

4. Si $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ pour tout $(x,y) \in D$, alors $\displaystyle\iint_D f(x,y)\ dx\ dy \leqslant \iint_D g(x,y)\ dx\ dy$.

Calcul des intégrales doubles: théorème de Fubini.

Premier cas. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un rectangle $D = [a,b] \times [c,d]$.

Théorème. [Fubini, 1er cas.]

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy\right)\ dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx\right)\ dy}$$

Corollaire.

$$\boxed{\iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\,f_2(y)\ dx\ dy = \int_a^b f_1(x)\ dx\ \int_c^d f_2(y)\ dy}$$

Notation: $\displaystyle\int_a^b dx \int_c^d dy\ f(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy\right)\ dx.$

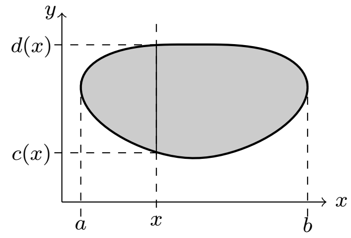
Exemples.

1. $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\ dx\ dy = \int_0^1 x\ dx\ \int_0^{\pi/2} \cos y\ dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$

2. $$\iint\limits_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_0^1 (x^2y-1)\ dy = \int_{-1}^{1} dx\ \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1} = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)\ dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{5}{3}$$

Deuxième cas. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un ensemble borné D quelconque. Alors:

- pour tout $(x, y) \in D$, il existe surement des valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$,
- pour tout $x \in [a, b]$, il existe surement des valeurs $c(x), d(x) \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$,

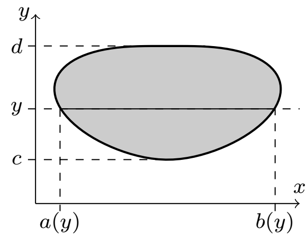


de telle sorte que $\boxed{D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ y \in [c(x), d(x)] \right\}}$.

À noter que les deux courbes $\partial D^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ y = c(x) \right\}$ et $\partial D^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ y = d(x) \right\}$ decrivent le bord de D.

En alternative:

- pour tout $(x, y) \in D$, il existe surment des valeurs $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c \leqslant y \leqslant d$,
- pour tout $y \in [c, d]$, il existe surment des valeurs $a(y), b(y) \in \mathbb{R}$ tels que $a(y) \leqslant x \leqslant b(y)$,



de telle sorte que $\boxed{D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ x \in [a(y), b(y)] \right\}}$.

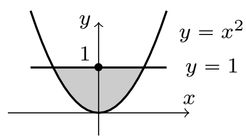
Dans ce cas, ce sont les deux courbes $\partial D^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ x = a(y) \right\}$ et $\partial D^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ x = b(y) \right\}$ qu decrivent le bord de D.

Selon le choix qu'on adopte pour décrire D, on a alors:

Théorème. [Fubini, 2ème cas.]
$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)\ dx\ dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\ dy \right)\ dx = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\ dx \right)\ dy.}$$

Exemples.

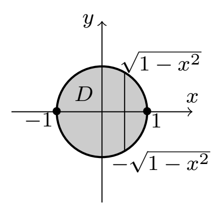
1. Soit D la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut. On peut alors décrire D comme l'ensemble
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in [x^2, 1]\right\}.$$



Par conséquent, on a:
$$\iint\limits_D x^2y\ dx\ dy = \int_{-1}^{1} x^2\ dx\ \int_{x^2}^{1} y\ dy = \int_{-1}^{1} x^2\ \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{1}\ dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x^4)\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}.$$

2. **Volume de la boule en coordonnées cartesiennes.** Pour $B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\right\}$, on sait que
$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ dx\ dy, \qquad \text{où} \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

On peut décrire D comme l'ensemble
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in \left[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}\right] \right\},$$
donc on a



$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\int_{-1}^{1} dx\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ dy = 2\int_{-1}^{1} dx\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - \frac{y^2}{1 - x^2}}\ dy.$$

Avec le changement de variable $\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$, on a

$$\begin{aligned}
&-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \quad \Longrightarrow \quad -1 \leqslant \sin t \leqslant 1 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},\\
&\frac{y^2}{1-x^2} = \sin^2 t \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t \quad \text{pour } t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\\
&y = \sqrt{1-x^2}\,\sin t \quad \Longrightarrow \quad dy = \sqrt{1-x^2}\,\cos t\; dt.
\end{aligned}$$

En sachant que $2\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\; dt = \pi$ (voir exemple précédent), on a alors:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)\; dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\; dt = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\; dx = \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

Calcul des intégrales doubles: changement de variables.

Considerons l'intégrale $\displaystyle\iint_D f(x,y)\; dx\; dy$ et un changement de variables $(x,y) = h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$. Pour exprimer l'intégrale en termes de la fonction $\tilde{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$, il faut exprimer D et le "produit" $dx\; dy$ en termes de (u,v):

- Le domaine D se transforme en le domaine $\tilde{D} = h^{-1}(D) = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = h(u,v) \in D\big\}$.
- Les éléments dx et dy se transforment comme $\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}\; du + \dfrac{\partial x}{\partial v}\; dv \\[2ex] dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}\; du + \dfrac{\partial y}{\partial v}\; dv \end{cases}$ i.e. comme $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = J_h(u,v) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$

  où $J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ est la matrice Jacobienne du changement de coordonnées.
- Pour le "produit" $dx\; dy$ il faut faire attention: il s'agit d'un *produit wedge* entre *formes différentielles* (hors programme Math2), normalement noté $dx \wedge dy$. Sans rentrer dans les détails, il suffit de dire qu'il est linéaire dans les coefficients de dx et dy (qui sont des fonctions) et antisymétrique:

  $$dx \wedge dy = -dy \wedge dx \qquad \text{et donc aussi} \quad dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0.$$

  Par conséquent, on a

  $$\begin{aligned}
  dx \wedge dy &= \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\; du + \frac{\partial x}{\partial v}\; dv\Big) \wedge \Big(\frac{\partial y}{\partial u}\; du + \frac{\partial y}{\partial v}\; dv\Big)\\
  &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\; du \wedge du + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\; du \wedge dv + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\; dv \wedge du + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\; dv \wedge dv\\
  &= \Big(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\Big)\; du \wedge dv = \det J_h(u,v)\; du \wedge dv.
  \end{aligned}$$

  Quand on identifie $dx\; dy$ à $dx \wedge dy$ en réalité on ne fait pas attention à l'ordre, on suppose que $dx\; dy = dy\; dx$. Pour éviter le changement de signe "$-$" qui viendrait de l'égalité $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$, il suffit d'adopter la formule suivante, avec la valeur absolue du détérminant Jacobien:

  $$dx\; dy = \Big|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\Big|\; du\; dv = \Big|\det J_h(u,v)\Big|\; du\; dv.$$

  En particulier, pour le changement en **coordonnées polaires**, on a: $\boxed{dx\; dy = \rho\; d\rho\; d\varphi}$.

On arrive finalement au théorème suivant:

Théorème. [Changement de variables.]

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\; dx\; dy = \iint_{h^{-1}(D)} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\; \Big|\det J_h(u,v)\Big|\; du\; dv}$$

Exemple. Volume de la boule en coordonnées polaires. Pour $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$, calculons

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\; dx\; dy, \qquad \text{où} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$$

avec le changement de variables en coordonnées polaires, $(x,y) = h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Puisque $x^2+y^2=\rho^2$, on a:

$$\begin{aligned} &\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\rho^2} \\ &h^{-1}(B) = \{(\rho,\varphi) \in [0,\infty[\times[0,2\pi[\mid \rho \leqslant 1\} = [0,1]\times[0,2\pi[\end{aligned}$$

et donc, en sachant que $dx\; dy = \rho\, d\rho\; d\varphi$ et en utilisant Fubini pour separer les variables, on a

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_{[0,1]\times[0,2\pi[} \sqrt{1-\rho^2}\; \rho\, d\rho\; d\varphi = 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\; \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

L'intégrale en φ est simple: $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi = \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = 2\pi$. Pour l'autre, si on pose $t = 1-\rho^2$ on a $\sqrt{1-\rho^2} = \sqrt{t} = t^{1/2}$ et

$$\begin{aligned} &\rho = 0 \quad\Longrightarrow\quad t=1 \qquad \text{et} \qquad \rho = 1 \quad\Longrightarrow\quad t = 0, \\ &dt = -2\rho\, d\rho \quad\Longrightarrow\quad \rho\, d\rho = -\frac{1}{2}\; dt, \end{aligned}$$

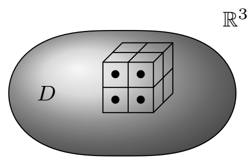
et on obtient enfin

$$\mathrm{Vol}\,(B) = -\frac{2}{2}\; 2\pi \int_1^0 t^{1/2}\; dt = 2\pi \int_0^1 t^{1/2}\; dt = 2\pi \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\; t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = 2\pi\; \frac{2}{3}\Big[t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

3.3 Intégrale triple. Théorème de Fubini. Changement de variables.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de trois variables (x,y,z), et soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble borné sur lequel f est définie.

Définition. On définit l'**intégrale triple de f sur Ω** comme la limite de la **somme de Riemann** associée à une **subdivision $\mathcal{S}_\delta$** de Ω en petits cubes K_i de taille δ^3, avec δ qui tend vers zéro:



$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\; dx\; dy\; dz = \lim_{\delta\to 0} \sum_{K_i\in\mathcal{S}_\delta} f(x_i,y_i,z_i)\,\delta^3,$$

quelconque soit le choix des points $(x_i,y_i,z_i) \in K_i$.

Cette définition est l'analogue en dimension 3 de celle donnée en dimension 2 pour les intégrales doubles. Les intégrales triples ont donc les mêmes proprietés des intégrales doubles, et les mêmes théorèmes d'existance (f continue sur Ω borné).

La signification géométrique de l'intégrale triple est plus abstraite: par analogie, le *volume (algébrique) de la portion d'espace comprise entre le graphe de f et le plan xOy* devient le **quadri-volume** *(algébrique) de la portion de* **quadri-espace** *comprise entre le graphe de f et l'espace $Oxyz$.*

Calcul des intégrales triples.

Théorème. [Fubini.]

1. Si $\Omega = [a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ est un parallélepipède, alors:

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\; dx\; dy\; dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz\; f(x,y,z)} \qquad \text{(dans l'ordre qu'on veut).}$$

2. Si $\Omega = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; x \in [a,b],\; y \in [c(x),d(x)],\; z \in [e(x,y),g(x,y)] \Big\}$ est un ensemble borné quelconque, alors:

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\; dx\; dy\; dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\; f(x,y,z)} \qquad \text{(ordre forcé).}$$

Exemples.

1.

$$\iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[2,3]} (x^2-2yz)\;dx\;dy\;dz = \int_2^3 dz \int_1^2 dy \int_0^1 dx\;(x^2-2yz) = \int_2^3 dz \int_1^2 dy\;\Big[\,\frac{1}{3}x^3 - 2xyz\,\Big]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \int_2^3 dz \int_1^2 dy\;\Big(\frac{1}{3}-2yz\Big) = \int_2^3 \Big[\,\frac{1}{3}y - y^2z\,\Big]_{y=1}^{y=2} dz = \int_2^3 \Big(\frac{2}{3}-4z-\frac{1}{3}+z\Big)\;dz$$
$$= \int_2^3 \Big(\frac{1}{3}-3z\Big)\;dz = \Big[\,\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2\,\Big]_2^3 = \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} = \frac{1}{3} - \frac{15}{2} = -\frac{43}{6}$$

2. Si Ω est le cylindre plein, de base le disque $D = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant 1,\; z=0\Big\}$ et de hauteur 3, on peut écrire

$$\Omega = \Big\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant 1,\; 0\leqslant z\leqslant 3\,\Big\}$$
$$= \Big\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in[-1,1],\; y\in\big[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\big],\; z\in[0,3]\,\Big\}$$

et donc

$$\iiint_\Omega (1-2yz)\;dx\;dy\;dz = \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\;dx\;dy = \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\;dy$$
$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big[y-y^2z\Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big(\sqrt{1-x^2}-(1-x^2)z+\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)z\Big)\;dx$$
$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\;dx = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\;dt = 3\pi$$

Théorème. [Changement de variables.] Si $(x,y,z)=h(u,v,w)$ est un changement de variables, alors:

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\;dx\;dy\;dz = \iiint_{h^{-1}(\Omega)} f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\;\Big|\det J_h(u,v,w)\Big|\;du\;dv\;dw}$$

En particulier, pour les changements on **coordonnées cylindriques** et **sphériques**, on a:

$$\boxed{dx\;dy\;dz \quad=\quad \rho\;d\rho\;d\varphi\;dz \quad=\quad r^2\sin\theta\;dr\;d\varphi\;d\theta}$$

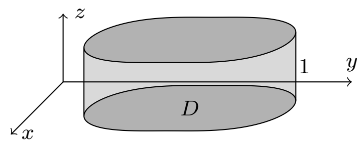
Exemple. Considerons à nouveau l'intégrale de la fonction $f(x,y,z)=1-2yz$ sur le cylindre plein Ω, de base le disque $D=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant 1,\; z=0\Big\}$ et de hauteur 3. En coordonnées cylindriques, on a

$$\Omega = \Big\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant 1,\; 0\leqslant z\leqslant 3\,\Big\}$$
$$= \Big\{\,(\rho,\varphi,z) \mid \rho\in[0,1],\; \varphi\in[0,2\pi[,\; z\in[0,3]\,\Big\}$$

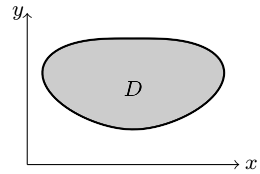
et donc, puisque $dx\;dy\;dz=\rho\,d\rho\;d\varphi\;dz$, on a

$$\iiint_\Omega (1-2yz)\;dx\;dy\;dz = \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\;dx\;dy = \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} (1-2\rho\sin\varphi z)\;d\varphi$$
$$= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho\;\Big[\,\varphi+2\rho\cos\varphi z\,\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \int_0^3 dz \int_0^1 \Big(2\pi+2\rho z-2\rho z\Big)\;\rho\,d\rho$$
$$= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\;\rho\,d\rho = 3\;\pi\;\Big[\,\rho^2\,\Big]_0^1 = 3\pi$$

3.4 Applications: aire, volume, moyenne, baricentre

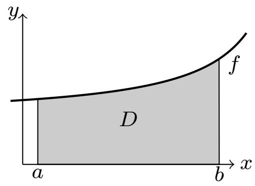


Si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, l'intégrale $\displaystyle\iint_D dx\ dy$ represente le volume de la portion d'espace comprise entre le graphe de la fonction constante $f(x,y) = 1$ et le plan xOy: ce solide est un cylindre de hauteur 1 et de base D, son volume est donc égal à l'aire de D multipliée par la hauteur, qui vaut 1.



Définition. Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. L'**aire** de D est l'intégrale double

$$\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \iint_D dx\ dy}$$



Proposition. Si D est la portion du plan sous le graphe d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, c'est-à-dire si

$$D = \big\{\ (x,y) \mid x \in [a,b],\ \ y \in [0, f(x)]\ \big\},$$

alors on a: $\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx}$

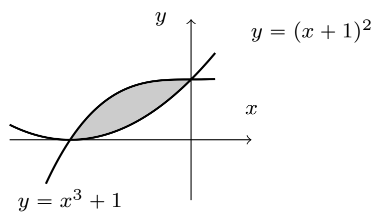
En effet, si $D = \big\{\ (x,y) \mid x \in [a,b],\ \ y \in [0, f(x)]\ \big\}$, on a

$$\mathrm{Aire}\,(D) = \iint_D dx\ dy = \int_a^b dx\ \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b [\,y\,]_0^{f(x)}\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Exercices.

1. Calculer l'aire du domaine D de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

   D'abord on dessine le domaine D: la courbe $y = x^3 + 1$ n'est rien d'autre que $y = x^3$ translaté vers le haut de 1, et la courbe $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ est une parabole orientée vers le haut et centrée au point $x+1 = 0$ et $y = 0$, c'est-à-dire au point $(-1,0)$. Les deux courbes se rencontrent aux points $(-1,0)$ et $(0,1)$. On a donc

   $$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ -1 \leqslant x \leqslant 0,\ \ x^2 + 2x + 1 \leqslant y \leqslant x^3 + 1\Big\}.$$

   Donc

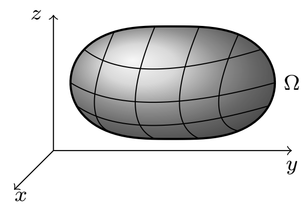
   $$\mathrm{Aire}\,(D) = \iint_D dx\ dy = \int_{-1}^0 dx\ \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy = \int_{-1}^0 [\ y\ ]_{x^2+2x+1}^{x^3+1}\ dx = \int_{-1}^0 \big(x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1\big)\ dx$$
   $$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^0 = -\frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12}.$$

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_D (x^2 - 2y)\ dx\ dy$, où D est le domaine de l'exercice précédent.

$$\iint_D (x^2 - 2y)\ dx\ dy = \int_{-1}^0 dx\ \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} (x^2 - 2y)\ dy = \int_{-1}^0 [\ x^2y - y^2\ ]_{x^2+2x+1}^{x^3+1}\ dx$$
$$= \int_{-1}^0 \Big(x^2(x^3+1) - (x^3+1)^2 - x^2(x^2+2x+1) + (x^2+2x+1)^2\Big)\ dx$$
$$= \int_{-1}^0 \big(-x^6 + x^5 + 6x^2 + 4x\big)\ dx = \Big[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + 2x^3 + 2x^2\ \Big]_{-1}^0 = \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - 2 + 2 = \frac{13}{42}$$

Définition. Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$. Le **volume** de Ω est l'intégrale triple

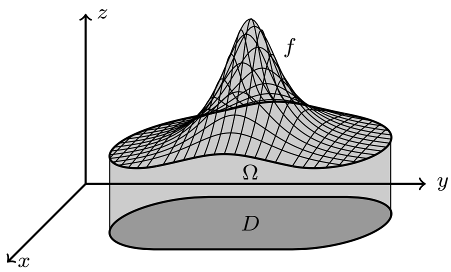
$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\ dy\ dz}$$



Proposition. Si Ω est la portion d'espace sous le graphe d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, c'est-à-dire si

$$\Omega = \big\{ \ (x,y,z) \mid (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \ z \in [0, f(x,y)] \ \big\},$$

alors on a: $\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iint_{D} f(x,y)\ dx\ dy}$



En effet, si $\Omega = \big\{ \ (x,y,z) \mid (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \ z \in [0, f(x,y)] \ \big\}$, on a

$$\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\ dy\ dz = \iint_{D} dx\ dy\ \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_{D} [\,z\,]_0^{f(x,y)}\ dx\ dy = \iint_{D} f(x,y)\ dx\ dy.$$

Exemple. Volume de la boule en coordonnées sphériques. En coordonnées sphériques, la boule $B = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \big\}$ devient

$$h^{-1}(B) = \big\{ (r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,1], \ \varphi \in [0,2\pi[, \ \theta \in [0,\pi] \big\},$$

et, puisque $dx\ dy\ dz = r^2 \sin\theta\ dr\ d\varphi\ d\theta$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(B) &= \iiint_{B} dx\ dy\ dz = \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi[\times[0,\pi]} r^2 \sin\theta\ dr\ d\varphi\ d\theta = \int_0^1 r^2\ dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta \\ &= \frac{1}{3}\ 2\pi \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}\ (1+1) = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

Définition. Si $f \geqslant 0$ denote la *concentration* d'une matière (*densité volumique*) dans un volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ou la *densité* d'un courant ou d'une énergie, on appelle:

- **Quantité totale** de matière / courant présente en $\Omega = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dx\ dy\ dz$
- **Quantité moyenne** de matière / courant présente en $\Omega = \dfrac{1}{\mathrm{Vol}\,(\Omega)} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dx\ dy\ dz$

Exemple. Un matériau est distribué dans le cube $\Omega = [0,R]^3$ selon la densité volumique $f(x,y,z) = \dfrac{x+y}{(z+1)^2}$. La quantité totale du matériau est alors

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz &= \int_0^R dx \int_0^R (x+y)dy \int_0^R \frac{1}{(z+1)^2}\ dz = \int_0^R \Big[xy + \frac{1}{2}y^2 \Big]_0^R dx \Big[-\frac{1}{z+1} \Big]_0^R \\ &= \int_0^R \Big(Rx + \frac{1}{2}R^2 \Big) dx \ \Big(1 - \frac{1}{R+1} \Big) = \Big[\frac{1}{2}Rx^2 + \frac{1}{2}R^2 x \Big]_0^R \ \frac{R}{R+1} \\ &= \Big(\frac{1}{2}R^3 + \frac{1}{2}R^3 \Big) \ \frac{R}{R+1} = \frac{R^4}{R+1},\end{aligned}$$

et, puisque $\mathrm{Vol}\,(\Omega) = R^3$, le volume moyen du matériau dans le cube est

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(\Omega)} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \frac{1}{R^3}\ \frac{R^4}{R+1} = \frac{R}{R+1}.$$

Définition. Si $\mu \geqslant 0$ denote la *densité de masse*, on appelle:

- **Masse totale** présente en Ω: $M = \iiint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$
- **Centre de masse** (ou **centre d'inértie**, ou encore **baricentre**) le point G de coordonnées (x_G, y_G, z_G) telles que

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\ \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz, \qquad y_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\ \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz, \qquad z_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\ \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$$

Un matériau est **homogène** si sa densité de masse est constante. Si cette constante n'est pas spécifiée, on peut supposer que $\mu(x,y,z) = 1$ pour tout (x,y,z).

Si $r(x,y,z)$ denote la distance d'un point (x,y,z) depuis un point fixe P ou une droite fixe Δ, on appelle aussi:

- **Moment d'inértie** par rapport à P ou à $\Delta = \dfrac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} r^2(x,y,z)\ \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$

Exemple. Trouvons le centre de masse du demi-cylindre homogène

$$\Omega = \big\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2,\ z \in [0,H], y \geqslant 0\,\big\}.$$

Il convient de travailler en coordonnées cylindriques:

$$h^{-1}(\Omega) = \big\{\,(\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,\pi],\ z \in [0,H]\big\}.$$

La masse totale est alors

$$M = \iiint\limits_{\Omega} dx\ dy\ dz = \iiint\limits_{h^{-1}(\Omega)} \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz = \int_0^R \rho\ d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^H dz = \frac{\pi R^2 H}{2}.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^\pi \cos\varphi\ d\varphi = \Big[\sin\varphi\Big]_0^\pi = 0$, et $\displaystyle\int_0^\pi \sin\varphi\ d\varphi = \Big[-\cos\varphi\Big]_0^\pi = 2$, le centre de masse G a coordonnées cartesiennes

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\ dx\ dy\ dz = \frac{1}{M}\iiint\limits_{h^{-1}(\Omega)} \rho\cos\varphi\ \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz = \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\ d\rho \int_0^\pi \cos\varphi\ d\varphi \int_0^H dz = 0$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\ dx\ dy\ dz = \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\ d\rho \int_0^\pi \sin\varphi\ d\varphi \int_0^H dz = \frac{2}{\pi R^2 H}\ \frac{R^3}{3}\ 2\ H = \frac{4R}{3\pi}$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{D} z\ dx\ dy\ dz = \frac{1}{M}\int_0^R \rho\ d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^H z\ dz = \frac{2}{\pi R^2 H}\ \frac{R^2}{2}\ \pi\ \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}$$

donc $G = \Big(0, \dfrac{4R}{3\pi}, \dfrac{H}{2}\Big)$.

Exercices.

1. Un sac de farine tombe par terre et la farine s'éparpille au sol avec une concentration non homogène

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2}, \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Calculer la quantité totale et celle moyenne de farine éparpillée dans le disque de rayon $R > 0$ autour du sac.

   La fonction f se simplifie en coordonnées polaires, car on a $\tilde{f}(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{(\rho+1)^2}$, et le disque en coordonnées polaires est $\quad D_R = \{ (\rho,\varphi) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi[\}$. On a alors:

$$\text{Quantité totale} = \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2}\ \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R \Big(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \Big)\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R \Big(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \Big)\, d\rho$$

$$= 2\pi \Big[\ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1} \Big]_0^R = 2\pi\ \Big(\ln(R+1) + \frac{1}{R+1} - \ln 0 - 1 \Big) = 2\pi\ \Big(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \Big)$$

$$\text{Aire}\,(D_R) = \iint_{D_R} \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}\ 2\pi = \pi R^2$$

$$\text{Quantité moyenne} = \frac{1}{\text{Aire}\,(D_R)} \iint_{D_R} \frac{1}{(\rho+1)^2}\ \rho\, d\rho\, d\varphi = \frac{2}{R^2}\ \Big(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \Big)$$

2. Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B_R^- et du cylindre C_R suivants:

$$B_R^- = \Big\{ (r,\varphi,\theta)\ \big|\ r \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [\pi/2,\pi] \Big\}$$
$$C_R = \Big\{ (\rho,\varphi,z)\ \big|\ \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [0,R] \Big\},$$

ayant densité de masse $\quad \mu(x,y,z) = z^2$.

Puisque $\Omega = B \cup C$, et $B \cap C =$ courbe, le centre de masse G a coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \quad \text{(idem pour } y_G \text{ et } z_G\text{)},$$

où $\quad M_\Omega = M_{B_R^-} + M_{C_R} \quad$ et $\quad \displaystyle\iiint_\Omega = \iiint_{B_R^-} + \iiint_{C_R}.$

Les intégrales se calculent:

- en coordonnées sphériques sur B, où $\mu(r,\varphi,\theta) = r^2 \cos^2\theta$,
- en coordonnées cylindriques sur C, où $\mu(\rho,\varphi,z) = z^2$.

On a donc

$$M_{B_R^-} = \iiint_{B_R^-} r^2 \cos^2\theta\ r^2 \sin\theta\ dr\ d\varphi\ d\theta = \int_0^R r^4\ dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\ d\theta = \frac{R^5}{5}\ 2\pi\ \Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \Big]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2\pi R^5}{15}$$

$$M_{C_R} = \iiint_{C_R} z^2\ \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz = \int_0^R \rho\ d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z^2\ dz = \frac{R^2}{2}\ 2\pi\ \frac{R^3}{3} = \frac{\pi R^5}{3}$$

$$M_\Omega = M_{B_R^-} + M_{C_R} = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3} \right)\ \pi R^5 = \frac{7\pi R^5}{15}.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi = 0$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\varphi\ d\varphi = 0$, les coordonnées cartesiennes du baricentre G de Ω sont:

$$x_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x\ \mu(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$$
$$= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\ dr \int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\ d\theta + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\ d\rho \int_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi \int_0^R z^2\ dz = 0$$

$$y_G = \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\ dr \int_0^{2\pi} \sin\varphi\ d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\ d\theta + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\ d\rho \int_0^{2\pi} \sin\varphi\ d\varphi \int_0^R z^2\ dz = 0$$

$$z_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega z^3\ dx\ dy\ dz = \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\ dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\theta \sin\theta\ d\theta + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho\ d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z^3\ dz$$
$$= \frac{15}{7\pi R^3} \left(\frac{R^6}{6}\ 2\pi\ \Big[-\frac{1}{4}\cos^4\theta \Big]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{R^2}{2}\ 2\pi\ \frac{R^4}{4} \right) = \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3} \left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{15R^3}{7}\ \frac{-1+3}{12} = \frac{5R^3}{14}.$$

En conclusion, le baricentre a coordonnées $\quad G = (0, 0, 5R^3/14)$ et se trouve dans la partie cylindrique, car $5R^3/14 > 0$.
À noter que le baricentre se trouve <u>à l'intérieur de Ω</u> seulement si $5R^3/14 \leqslant R$, ce qui se vérifie si $\quad R \leqslant \sqrt{14/5}$.