Université Claude Bernard Lyon 1
Année 2014-2015
Printemps 2015

PCSI L1 UE Math2
Responsable: Alessandra Frabetti
http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/

PRÉREQUIS DU COURS DE MATH 2: ESPACES VECTORIELS, APPLICATIONS LINÉAIRES ET GÉOMÉTRIE CARTESIENNE

Plan

1 Espaces vectoriels et vecteurs **2**
1.1 Espaces vectoriels . . . 2
1.2 Norme, produit scalaire et produit vectoriel . . . 4

2 Applications linéaires et matrices **6**
2.1 Applications linéaires . . . 6
2.2 Matrices . . . 8

3 Géométrie cartesienne dans le plan et dans l'espace **10**
3.1 Géométrie cartesienne dans le plan . . . 10
3.2 Géométrie cartesienne dans l'espace . . . 12

Introduction

Qand on considère un type d'ensembles ayant des proprietés caractéristiques, on doit dire aussi comment on peut identifier un tel ensemble à un autre: cela est possible s'il existe une application bijective entre ces deux ensembles qui preserve leurs caractéristiques.

Ainsi, les *types d'ensembles* sont toujours corrélés à des *types d'applications* qui permettent de les identifier. Les corrélations 'ensembles' + 'applications' plus connues sont les suivantes:

- Ensembles + Bijections (applications inversibles, dans le sens qu'il en existe la réciproque)
- Espaces vectoriels + Isomorphismes (bijections qui sont aussi des applications linéaires)
- Espaces métriques (espaces vectoriels avec produit scalaire ou norme) + Isométries (isomorphismes qui preservent le produit scalaire ou la norme)
- Espaces topologiques (où l'on sait dire quelles parties sont ouvertes ou fermées) + Homéomorphismes (bijections continues avec réciproque continue)
- Variétés différentiables (espaces topologiques localement homéomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$) + Difféomorphismes (bijections différentiables avec réciproque différentiable)

En physique, tous ces couples sont largement utilisés. Dans ce manuel nous rappellons le couple **espaces vectoriels** + **applications linéaires**, qui permet de distinguer les deux types suivants de grandeurs:

masse, charge, temperature	= nombre (à part l'unité de mesure)	$\longrightarrow$	**scalaire**
force, vitesse, accéleration	= point d'application + direction + sense + longueur	$\longrightarrow$	**vecteur**

Nous rappellons en particulier la définition et les propriétés principales des deux espaces vectoriels indispensables au cours de Math2 ($\mathbb{R}^3$ et les vecteurs de l'espace), l'isomorphisme entre eux qui définit les coordonnées cartesiennes des points, le calcul vectoriel en coordonnées cartesiennes (produit scalaire, vectoriel et mixte) et l'équation cartesienne des principales courbes et surfaces utilisées en cours et aux examens (droites, coniques, plans et quadriques).

1 Espaces vectoriels et vecteurs

1.1 Espaces vectoriels

Espaces vectoriels

Espace vectoriel = ensemble V muni

- d'une **addition** $+$, avec un zéro $\vec{0}$,
- d'un **produit par scalaire** $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$: $(t, \vec{v}) \mapsto t\ \vec{v}$ t.q. $t\ (\vec{u} + \vec{v}) = t\ \vec{u} + t\ \vec{v}$.

On appelle **vecteurs** les éléments $\vec{v}$ de V et **scalaires** les nombres réels t.

Exemples.

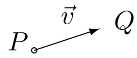
(a) **Espaces de coordonnées.**
Les ensembles $\mathbb{R}^n := \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{C}^n := \{(z_1, ..., z_n) \mid z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}\}$ sont des espaces vectoriels avec

- **addition**: $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$,
- **produit par scalaire**: $t\ (x_1, ..., x_n) := (t\ x_1, ..., t\ x_n)$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) **Fonctions.**
L'ensemble des fonctions d'une variable réelle $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \mid \text{fonction avec domaine } D_f \subset \mathbb{R}\ \}$ est un espace vectoriel avec

- **addition**: $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$,
- **produit par scalaire**: $(t\ f)(x) := t\ f(x)$, $t \in \mathbb{R}$.

(c) **Vecteurs du plan et de l'espace.**

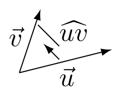
Rappellons qu'un **vecteur** du plan ou de l'espace est une flèche 

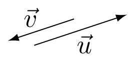
, notée $\vec{v} \equiv \overrightarrow{PQ}$, caracterisée par

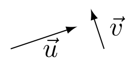
- le **point d'application** P;
- la **direction** et le **sens**, donnés par la flèche;
- la **longueur** $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \text{dist}\,(P, Q) \in \mathbb{R}$.

Souvent on identifie les vecteurs qu'on obtient par **translation**, ainsi P change mais le vecteur ne change pas.

Rappellons aussi les notions de bases des vecteurs:

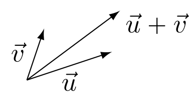
- **Angle** entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ = angle $\widehat{uv}$ orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ comme dans 

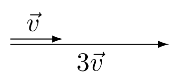
.
- **Vecteurs parallèles** ou **colinéaires** $\vec{u} \parallel \vec{v}$ si 

, i.e. ssi $\sin(\widehat{uv}) = 0$.
- **Vecteurs perpendiculaires** ou **orthogonaux** $\vec{u} \perp \vec{v}$ si 

, i.e. ssi $\cos(\widehat{uv}) = 0$.

Finalement, l'ensemble Vect des vecteurs appliqués en un point fixé O est un espace vectoriel, avec

- **addition**: $\vec{u} + \vec{v}$:= vecteur diagonale du parallèlogramme de cotés $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par ex. 

- **produit par scalaire**: si $t \in \mathbb{R}$, $t\,\vec{v}$:= vecteur avec meme direction que $\vec{v}$ et longueur $\|\,t\,\vec{v}\| = t\,\|\vec{v}\|$, par ex. 

Attention: l'ensemble des vecteurs appliqués en tous les points n'est pas un espace vectoriel (il s'appelle **espace affine**).

Le produit par scalaire **caracterise les vecteurs parallèles**: $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} = t\vec{v}$ pour un $t \neq 0$.

Bases et dimension des espaces vectoriels

Combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,... = vecteur $r\vec{u}+s\vec{v}+t\vec{w}+\cdots$, où $r,s,t,... \in \mathbb{R}$ sont les **coéfficients scalaires**.

Exemple dans $\mathbb{R}^3$: $(5,4,9)$ est une combinaison linéaire de $(1,2,3)$ et $(1,-1,0)$ car $3\,(1,2,3)+2\,(1,-1,0)=(5,4,9)$.

Espace vectoriel **engendré** par $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ... = ensemble de leur combinaisons linéaires $\Big\{r\vec{u}+s\vec{v}+t\vec{w}+\cdots \mid r,s,t,... \in \mathbb{R}\Big\}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ... sont **linéairement dépendants** si chacun d'eux est combinaison linéaire des autres:

- il existe une combinaison linéaire nulle ($r\vec{u}+s\vec{v}+t\vec{w}+\cdots=0$) avec des coéfficients scalaires pas tous nuls.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ... sont **linéairement indépendants** si aucun d'eux n'est combinaison linéaire des autres:

- $r\vec{u}+s\vec{v}+t\vec{w}+\cdots=0 \quad\Longleftrightarrow\quad r=s=t=\cdots=0.$

Base de V := ensemble $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...\}$ de vecteurs t.q.

- ils engendrent V, i.e. tout autre vecteur $\vec{v}$ s'écrit comme leur combinaison linéaire: $\vec{v}=t_1\vec{e}_1+t_2\vec{e}_2+\cdots$,
- ils sont linéairement indépendants.

La base n'est pas unique, mais **toutes les bases ont le même nombre d'éléments**.

Dimension de V, $\dim V$:= nombre de vecteurs d'une base. La dimension peut être **finie** (un nombre) ou **infinie**.

Exemples.

(a) **Dans $\mathbb{R}^2$** (valables aussi dans $\mathbb{C}$):

- $(1,2)$ et $(3,6)$ sont linéairement dépendants car $(3,6)=3\,(1,2)$.
- $(1,2)$ et $(2,1)$ sont linéairement indépendants car $a\,(1,2)+b\,(2,1)=(0,0) \quad\Longleftrightarrow\quad a=0$ et $b=0$.
- Trois vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ sont toujours linéairement dépendants, ex. $(1,2)$, $(2,1)$ et $(1,1)$.
- Les vecteurs $\vec{e_1}=(1,0)$ et $\vec{e_2}=(0,1)$ sont linéairement indépendants et forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^2$.
- En conclusion, $\dim\mathbb{R}^2=2$.

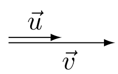
(b) **Dans $\mathbb{R}^3$:**

- $(1,2,3)$ et $(2,4,6)$ sont linéairement dépendants car $(2,4,6)=2\,(1,2,3)$.
- $(1,2,3)$ et $(2,1,3)$ sont linéairement indépendants car $a\,(1,2,3)+b\,(2,1,3)=(0,0,0) \quad\Longleftrightarrow\quad a=0$ et $b=0$.
- $(1,2,3)$, $(2,1,3)$ et $(4,5,9)$ sont linéairement dépendants car $(4,5,9)=2\,(1,2,3)+(2,1,3)$.
- Quatre vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ sont toujours linéairement dépendants;
- Les vecteurs $\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$ et $\vec{e_3}=(0,0,1)$ sont linéairement indépendants et forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.
- En conclusion, $\dim\mathbb{R}^3=3$.

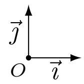
(c) **Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:** Pour les fonctions, on sait que $\dim\mathcal{F}(\mathbb{R})=\infty$, mais on ne connait pas de bases.

(d) **Dans Vect :**

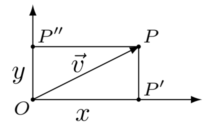
- Un vecteur $\vec{v}$ engendre une droite, $\Delta=\Big\{t\vec{v} \mid t\in\mathbb{R}\Big\}$.
- Deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$ engendrent un plan, $\pi=\Big\{s\vec{u}+t\vec{v} \mid s,t\in\mathbb{R}\Big\}$.

  Attention: deux vecteurs linéairement dépendants n'engendrent pas un plan mais une droite. 
.

- Les deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de la figure, avec $\quad \vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \quad$ et $\quad \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$, sont linéairement indépendants et forment une base de Vect dans le plan: le **repère cartesien** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\ )$.



  Coordonnées cartesiennes d'un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ du plan (ou du point P) = couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\quad \vec{v} = \overrightarrow{OP} \ = \ x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \ \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

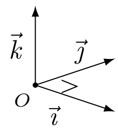


  où $\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \end{cases}$ = longueur des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

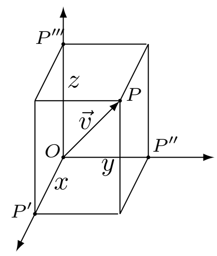
  Donc les vecteurs du plan appliqués en un point O forment un espace vectoriel de dimension 2: on le note Vect $(\mathbb{R}^2)$.

- Trois vecteurs linéairement indépendants engendrent tout l'espace.
  Attention: trois vecteurs linéairement dépendants peuvent engendrer une droite ou un plan.

- Les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ de la figure, avec $\quad \vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k} \perp \vec{\imath} \quad$ et $\quad \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$, sont linéairement indépendants et forment une base de Vect dans l'espace: le **repère cartesien** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\ )$.



  Coordonnées cartesiennes d'un vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ de l'espace (ou du point P) = triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\quad \vec{v} = \overrightarrow{OP} \ = \ x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \ \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,



  où $\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \\ z = \|\overrightarrow{OP'''}\| \end{cases}$ = longueur des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$

  Donc les vecteurs de l'espace appliqués en un point O forment un espace vectoriel de dimension 3: on le note Vect $(\mathbb{R}^3)$.

1.2 Norme, produit scalaire et produit vectoriel

Norme

Norme sur un espace vectoriel V = application $\quad V \longrightarrow \mathbb{R} : \ \vec{v} \mapsto ||\vec{v}|| \quad$ t.q.

- $||\vec{v}|| \geqslant 0, \quad$ et $\quad ||\vec{v}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$,
- $||t\vec{v}|| = |t| \ ||\vec{v}||, \quad$ où $\quad |t|$ = valeur absolue,
- $||\vec{u} + \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \qquad$ (**inegalité triangulaire**).

Attention: les espaces vectoriels n'ont pas tous une norme.

Exemples.

(a) <u>**Dans** $\mathbb{R}^3$</u> (valable aussi dans $\mathbb{R}^2$ et dans tout $\mathbb{R}^n$):

- **norme euclidienne**: $\quad ||(x, y, z)|| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- norme L^1: $\quad ||(x, y, z)||_1 := |x| + |y| + |z|$;
- norme L^p, avec $p \in \mathbb{N}$: $\quad ||(x, y, z)||_p := \Big(|x|^p + |y|^p + |z|^p\Big)^{1/p}$ $\quad$ (la norme L^2 est la norme euclidienne);
- norme L^∞: $\quad ||(x, y, z)||_\infty := \max\{\ |x|, |y|, |z|\ \}$;

(b) <u>Dans des **sous-ensembles** opportunés de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:</u>

- norme L^1: $\quad ||f||_1 := \int |f(x)| \ dx$;
- norme L^p, avec $p \in \mathbb{N}$: $\quad ||f||_p := \Big(\int |f(x)|^p \ dx\Big)^{1/p}$ $\quad$ (la norme L^2 donne lieu à l'espace de Hilbert);

- norme L^∞: $\quad ||f||_\infty := \sup\{\ f(x),\ x \in D_f\ \}$.

(c) <u>**Dans** Vect</u>:

- norme = longueur: $\quad ||\vec{v}|| = |\vec{v}|$.

Produit scalaire

Produit scalaire sur un espace vectoriel V = opération $\quad V \times V \longrightarrow \mathbb{R} :\ (\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u}\cdot\vec{v}$ qui soit

- **défini positif**: $\vec{v}\cdot\vec{v} \geqslant 0$ et $\vec{v}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$;
- **bilinéaire**: $(t\vec{u})\cdot\vec{v} = t(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(t\vec{v})$
  $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$, et $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- **symmetrique**: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.

Autre notations: $\vec{v}\cdot\vec{u} \equiv \big(\vec{v},\vec{u}\big) \equiv \langle\vec{v},\vec{u}\rangle \equiv \langle\vec{v}|\vec{u}\rangle$ (où $\langle\ |$ = **bra** et $|\ \rangle$ = **ket**).

Attention: les espaces vectoriels n'ont pas tous un produit scalaire.

Tout produit scalaire definit une norme: $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$. (Le contraire n'est pas vrai.)

Exemples.

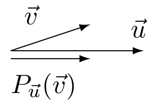
(a) <u>**Dans** $\mathbb{R}^3$</u> (valable aussi dans $\mathbb{R}^2$ et dans tout $\mathbb{R}^n$):

- **Produit scalaire euclidien**: $(x,y,z)\cdot(x',y',z') := x\,x' + y\,y' + z\,z'$.

(b) <u>Dans le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des **fonctions continues sur un interval**</u>:

- **Produit scalaire de Hilbert**: $f\cdot g := \int f(x)\ g(x)\ dx$.

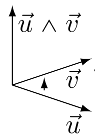
(c) <u>**Dans** Vect</u>:

- **Produit scalaire**: $\vec{v}\cdot\vec{u} := |\vec{v}|\ |\vec{u}|\ \cos(\widehat{\vec{v}\vec{u}}) \in \mathbb{R}$.
  La norme induite est la longueur des vecteurs: $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = |\vec{v}|$.
  Le produit scalaire **caracterise les vecteurs orthogonaux**: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}$.
  Le produit scalaire **donne l'aire**: $|\vec{u}\cdot\vec{v}^\perp|$ = aire du parallelogramme de cotés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
  Le produit scalaire donne la **projection orthogonale de $\vec{u}$ sur la droite de direction $\vec{v}$**: $\quad \mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u}) := \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\ \vec{v}$, ex. 

.

  <u>Dans l'espace</u>: le produit scalaire donne la **projection orthogonale de $\vec{u}$ sur le plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$**: $\quad \mathrm{Pr}_{\vec{v},\vec{w}}(\vec{u}) := \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\ \vec{v} + \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\ \vec{w}$.

(d) <u>**Pour** Vect **dans l'espace**</u>:

- **Produit vectoriel**: $\vec{u}\wedge\vec{v} :=$ <u>vecteur</u> avec longueur $|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\sin(\widehat{uv})$ et direction **orthogonale directe** 

.
  Le produit vectoriel est **bilinéaire**:
  $(t\vec{u})\wedge\vec{v} = t(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{u}\wedge(t\vec{v})$,
  $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w} + \vec{v}\wedge\vec{w}$, et $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{w}$.
  Le produit vectoriel est **anti-symmetrique**: $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$.
  Le produit vectoriel **caracterise les vecteurs parallèles**: $\vec{u}\wedge\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\parallel\vec{v}$ (i.e. $\vec{u} = t\,\vec{v}$ avec $t \neq 0$).

- **Produit mixte**: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] := \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$ (<u>scalaire</u>!).
  Le produit mixte est **trilinéaire**:
  $[t\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},t\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},t\vec{w}] = t[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$,
  $[\vec{u}+\vec{u'},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] + [\vec{u'},\vec{v},\vec{w}]$, etc.
  Le produit mixte a une **symmetrie mixte**:
  $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}] = -[\vec{u},\vec{w},\vec{v}] = -[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]$.
  Le produit mixte **donne le volume**: $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$ = volume du parallelepipède de cotés $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

2 Applications linéaires et matrices

2.1 Applications linéaires

Application linéaire

Soient V et V' des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
Application linéaire entre V et V' = application $L : V \longrightarrow V'$, $\vec{v} \mapsto \vec{v}' = L(\vec{v})$ t.q.

- $L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$,
- $L(t\ \vec{v}) = t\ L(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in V$ et $\forall s, t \in \mathbb{R}$. [En particulier: $L(\vec{0}) = L(0\ \vec{v}) = 0\ L(\vec{v}) = \vec{0}$.]

Autrement dit: $L : V \longrightarrow V'$ est **linéaire** $\iff$ $L(s\ \vec{u} + t\ \vec{v}) = s\ L(\vec{u}) + t\ L(\vec{v})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ et $\forall s, t \in \mathbb{R}$.
En coordonnées, une application linéaire est donnée par des **polynômes de degré 1 sans termes constants**.

Exemples.

(a) **Applications linéaires sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:**

- $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y) = (3x + y, -y, y - 2x)$
- $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (z, x - y + z)$
- $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z) = (0, 0, z)$

Applications NON linéaires sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

- $L(x, y, z) = (x + 1, yz)$: le terme $x + 1$ contient une constante, le terme yz est un polynôme de degré 2.
- $L(x, y) = (x^3 + \sin y, xy)$: les termes x^3 et xy sont des polynômes de degré supérieur à 1, le terme $\sin y$ n'est pas un polynôme.

(b) **Applications linéaires sur l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions différentiables:**

- La **dérivation** $d : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $(df)(x) := f'(x)$ est linéaire, car
$d(3\,f + 2\,g) = 3\,df + 2\,dg$. $\Big[$En effet, cela signifie que $\Big(3\,f(x) + 2\,g(x)\Big)' = 3\,f'(x) + 2\,g'(x).\Big]$
- La **multiplication par** x: $M_x : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $M_x(f)(x) = (x\ f)(x) := x\ f(x)$ est linéaire, car
$M_x(3\ f + 2\ g)(x) = x\ \Big(3\ f(x) + 2\ g(x)\Big) = 3\ \Big(x\ f(x)\Big) + 2\ \Big(x\ g(x)\Big) = \Big(3\ M_x(f) + 2\ M_x(g)\Big)(x)$.

Applications NON linéaires sur l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$:

- La **puissance carrée** $p : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $(pf)(x) := f(x)^2$ n'est pas linéaire, car
$p(3\,f + 2\,g)(x) = (3\,f(x) + 2\,g(x))^2 = 9\,f(x)^2 + 12\,f(x)\,g(x) + 4\,g(x)^2$,
alors que $\big(3\,p(f) + 2\,p(g)\big)(x) = 3\,f(x)^2 + 2\,g(x)^2$.

(c) **Applications linéaires sur $\mathrm{Vect}\,(\mathbb{R}^2)$ et $\mathrm{Vect}\,(\mathbb{R}^3)$:**

- **Rotation d'angle** θ dans le plan: $R_\theta : \mathrm{Vect}\,(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathrm{Vect}\,(\mathbb{R}^2)$, $R_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\theta\ x + \sin\theta\ y \\ -\sin\theta\ x + \cos\theta\ y \end{pmatrix}$.
- **Projections** sur les droites de direction $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$:
$P_{\vec{\imath}}, P_{\vec{\jmath}}, P_{\vec{k}} : \mathrm{Vect}\,(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathrm{Vect}\,(\mathbb{R}^3)$, $P_{\vec{\imath}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_{\vec{\imath}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_{\vec{\imath}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.

Applications NON linéaires sur $\mathrm{Vect}\,(\mathbb{R}^2)$ et $\mathrm{Vect}\,(\mathbb{R}^3)$:

- **Translation** par un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (dans le plan): $T_{\vec{v}} : \mathrm{Vect}\,(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathrm{Vect}\,(\mathbb{R}^2)$, $T_{\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$.
- **Application affine** = application linéaire plus translation: $L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 1 \\ 2y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Espace vectoriel des applications linéaires

L'ensemble $\mathcal{L}(V,V')$ des applications linéaires $L : V \longrightarrow V'$ **est un espace vectoriel**, avec

- **addition**: $(L+L')(\vec{v}) := L(\vec{v}) + L'(\vec{v})$ pour tout $v \in V$, avec **zéro** = application nulle $0(\vec{v}) = \vec{0}$;
- **produit par scalaire**: si $t \in \mathbb{R}$, $(t\ L)(\vec{v}) := t\ L(\vec{v})$ pour tout $v \in V$.

Exemple. Si $L, L' : \text{Vect}\,(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \text{Vect}\,(\mathbb{R}^2)$ sont données par $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+z \\ -y \end{pmatrix}$ et $L'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ x+z \end{pmatrix}$,

alors $(L+L')\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+z \\ x-y+z \end{pmatrix}$ et $(3\ L)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+3z \\ -3y \end{pmatrix}$.

Composition d'applications linéaires

Composition de $L : U \longrightarrow V$ et $L' : V \longrightarrow W$ = application $L' \circ L : U \longrightarrow W$ déf. par $(L' \circ L)(\vec{u}) := L'\Big(L(\vec{u})\Big)$.

Exemple. Si $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ -y \\ x+2y \end{pmatrix}$ et $L' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+w \\ v-w \end{pmatrix}$,

alors $(L' \circ L)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x+y)+(x+2y) \\ -y-(x+2y) \end{pmatrix}$ et $(L \circ L')\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(u+w)+(v-w) \\ -(v-w) \\ (u+w)+2(v-w) \end{pmatrix}$.

Isomorphismes et isométries

Isomorphisme entre V et V' = application linéaire $L : V \longrightarrow V'$ qui soit bijective (i.e. inversible, $\exists\ L^{-1} : V' \longrightarrow V$). On dit alors que les espaces vectoriels V et V' sont **isomorphes**, et on note $V \cong V'$.

Un isomorphisme transforme une base de V en une base de V'. Donc V et V' ont la même dimension.

Si V et V' ont un produit scalaire: **isométrie** entre V et V' = isomorphisme $L : V \longrightarrow V'$ qui conserve les produits scalaires: $L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Une isométrie conserve aussi les longueurs (norme) et les angles.

Exemples.

(a) **Identification du plan avec $\mathbb{R}^2$:**

- En fixant sur le plan un point O, on peut identifier tout point P avec le vecteur $\overrightarrow{OP} \in \text{Vect}\,(\mathbb{R}^2)$ appliqué en O.
- En fixant ensuite un repère cartesien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on définie l'application $\text{Vect}\,(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe à tout vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ ses coordonnées cartesiennes (x,y), définies, on le rappelle, par l'identité $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

  Cette application est linéaire et bijective, donc c'est un isomorphisme d'espaces vectoriel: $\text{Vect}\,(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2$.

  De plus, cette application preserve les produits scalaires, c'est donc une isométrie.
- En conclusion, les points P du plan, avec leurs coordonnées cartesiennes, sont vus comme éléments de $\mathbb{R}^2$.

(b) **Identification de l'espace avec $\mathbb{R}^3$:**

- En fixant dans l'espace un point O, on peut identifier tout point P avec le vecteur $\overrightarrow{OP} \in \text{Vect}\,(\mathbb{R}^3)$ appliqué en O.
- En fixant ensuite un repère cartesien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on définie l'application $\text{Vect}\,(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe à tout vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ ses coordonnées cartesiennes (x,y,z), définies, on le rappelle, par l'identité $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

  Cette application est linéaire et bijective, donc c'est un isomorphisme d'espaces vectoriel: $\text{Vect}\,(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^3$.

  De plus, cette application preserve les produits scalaires, c'est donc une isométrie.
- En conclusion, les points P de l'espace, avec leurs coordonnées cartesiennes, sont vus comme éléments de $\mathbb{R}^3$.

2.2 Matrices

Matrices

Matrice $m \times n$ à coéfficients réels $\quad (a_{ij}) :=$ tableau $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ où $\quad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad$ pour $\begin{cases} i = 1, ..., m \\ j = 1, ..., n \end{cases}$.

Matrice carrée de taille $n =$ matrice $n \times n$.

Matrice colonne de taille $n =$ matrice $n \times 1 =$ vecteur à n composantes.

Matrice ligne de taille $n =$ matrice $1 \times n$.

Exemples.

- $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix}$ sont des matrices carrées de taille 2.
- $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{5} & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×5, et $\begin{pmatrix} \ln(5) & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 5 \\ \pi & 0 \\ 7 & \sin(\pi/6) \end{pmatrix}$ est une matrice 5×2.
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice colonne, et $\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

Espace vectoriel des matrices

L'ensemble $\mathcal{M}_{mn} \equiv \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ **des matrices** $m \times n$ **à coéfficients réels est un espace vectoriel**, avec

- **addition**: $\quad (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$, avec **zéro**= matrice nulle.
- **produit par scalaire**: si $t \in \mathbb{R}, \quad t\ (a_{ij}) := (t\ a_{ij}) = \begin{pmatrix} t\ a_{11} & \cdots & t\ a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t\ a_{m1} & \cdots & t\ a_{mn} \end{pmatrix}$.

Exemples. $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $2 \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Produit de matrices

Produit $\quad \mathcal{M}_{mn} \times \mathcal{M}_{np} \longrightarrow \mathcal{M}_{mp}, \quad (a_{ij})\ (b_{jk}) = (c_{ik}) \quad$ avec $\quad c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ b_{jk} \quad$ (**règle "ligne** $\times$ **colonne"**)

Par ex. $\quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

Exemples.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$

Rélation entre matrices et applications linéaires

Les ensembles $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ sont en bijection:
à une application linéaire $L:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ correspond la matrice $A\in\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ telle que

$$L(\vec{x})=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=A\,\vec{x}.$$

De plus, **les espaces vectoriels $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ sont isomorphes**:

$$\text{si}\quad \begin{cases} L(\vec{x})=A\,\vec{x} \\ L'(\vec{x})=A'\,\vec{x}\end{cases}\qquad \text{alors}\quad (L+L')(\vec{x})=(A+A')\,\vec{x}\quad \text{et}\quad (t\,L)(\vec{x})=(t\,A)\,\vec{x}\ \text{pour tout } t\in\mathbb{R}.$$

Enfin, la **composition d'applications linéaires corresponds au produit de matrices**:

$$\text{si}\quad \begin{cases} \vec{y}=L(\vec{x})=A\,\vec{x} \\ \vec{z}=L'(\vec{y})=A'\,\vec{y}\end{cases}\qquad \text{alors}\quad \vec{z}=(L'\circ L)(\vec{x})=(A'A)\,\vec{x}.$$

Exemples.

- Si $L(x,y)=(3x+y,-y,y-2x)$, on écrit $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y\\-y\\y-2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,
  donc la matrice associée à L est $A=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\\-2&1\end{pmatrix}$.
- Si $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $L'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors
  $L'\circ L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y-y\\-3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $A'A=\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+0&1-1\\0+0&0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\end{pmatrix}$.

Détérminant, matrices inversibles

Détérminant $\det:\mathcal{M}_{nn}\longrightarrow\mathbb{R}$ défini, pour $n=2,3$, par: $\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\equiv\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}:=ad-bc$ et

$$\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\equiv\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}:=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

Attention: det **n'est pas une application linéaire**, car $\det(A+B)\neq\det(A)+\det(B)$ et $\det(t\,A)\neq t\,\det(A)$.

Par contre, si A est une matrice carrée de taille n, on a: $\det(t\,A)=t^n\,\det(A)$.

De plus: $\det(A\,B)=\det(A)\,\det(B)$.

Une matrice $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ est **inversible** si $\det A\neq 0$ et sa **matrice inverse** est $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

Si $L(\vec{x})=A\,\vec{x}$: L est un isomorphisme $\iff$ $\det A\neq 0$. Dans ce cas $L^{-1}(\vec{y})=A^{-1}\,\vec{y}$.

Exemple. $\det\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 1=7$, donc $\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}5&-1\\-3&2\end{pmatrix}$.

Matrices orthogonales

Transposé ${}^T:\mathcal{M}_{mn}\longrightarrow\mathcal{M}_{nm}$, $(a_{ij})^T:=(a_{ji})$.
Une matrice A est **orthogonale** si $A^{-1}=A^T$. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien:
Si $L(\vec{x})=A\,\vec{x}$: L est un isométrie $\iff$ $\det A=\pm 1$ et A est une matrice orthogonale.

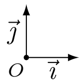
Exemples.

- La transposée de la matrice $\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix}2&1\\3&5\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}$.
- Une rotation $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

3 Géométrie cartesienne dans le plan et dans l'espace

3.1 Géométrie cartesienne dans le plan

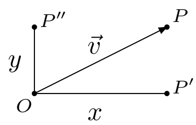
<u>**Coordonnées cartesiennes des points et des vecteurs du plan**</u>:

- **Repère cartesien** ou **orthonormal direct (o.n.d.)**: $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,) =$ 

, avec $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.

- L'ensemble $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\,\}$ forme une **base** de l'espace vectoriel des vecteurs du plan appliqués en O, donc tout vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

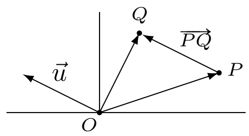
- **Coordonnées cartesiennes:** $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \iff \vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,



où $\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \end{cases}$ = longueur des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$:

- **Plan + repère cartesien** $\equiv \mathbb{R}^2$, car tout point $P \equiv$ vecteur $\overrightarrow{OP}$ = deux coordonnées x et y.

- <u>Attention</u>: **Vecteur affine:** $\overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = P + \vec{u}$,
où $\vec{u} = (x_Q - x_P)\,\vec{\imath} + (y_Q - y_P)\,\vec{\jmath}$



<u>Calcul vectoriel en coordonnées cartesiennes</u>: si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

- **addition**: $\vec{v} + \vec{v}' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

- **produit par scalaire**: $t\vec{v} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$, ex. $3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

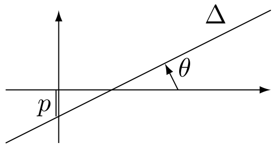
- **produit scalaire**: $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy'$, ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 + 6 = 4$

- **longueur**: $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ex. $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$

- **vecteurs orthogonaux**: $\vec{v} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **vecteurs parallèles**: $\vec{v} \parallel \vec{v}' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = tx \\ y' = ty \end{cases} \quad t \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

- **projection orthogonale**: $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{v}') = \dfrac{x'x + y'y}{x^2 + y^2}\,\vec{v}$, ex. $\mathrm{Pr}_{\vec{\imath}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{5 \times 1 - 1 \times 0}{1^2 + 0^2}\,\vec{\imath} = 5\,\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Droite (affine): $\Delta = \Big\{P = (x, y) \mid ax + by + c = 0\Big\}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

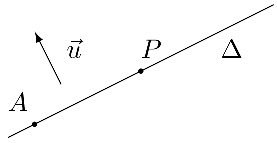
Si $b \neq 0$ alors $y = -\dfrac{a}{b}\,x - \dfrac{c}{b} = m\,x + p$ où $m = \tan\theta$

Si $a \neq 0$ alors $x = -\dfrac{b}{a}\,y - \dfrac{c}{a}$.

Attention: une droite est un espace vectoriel de dimension 1 si et seulement si elle passe par O, i.e. $c = 0$.

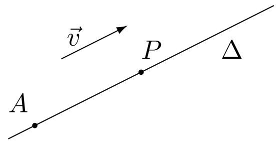
- **Vecteur directeur** de Δ $= \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.

- **Vecteur orthogonal** ou **normal** à Δ $= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



- **Droite passante par** $A = (a_1, a_2)$ **et** $\perp$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$

$$\Delta = \Big\{(x, y) \mid u_1(x - a_1) + u_2(y - a_2) = 0\Big\}$$
$$\iff \quad u_1x + u_2y - (u_1a_1 + u_2a_2) = 0.$$

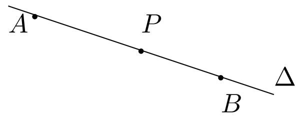


- **Droite passante par** $A = (a_1, a_2)$ **et** $\parallel$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$

$$\Delta = \Big\{P = (x, y) \mid \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}\Big\}$$

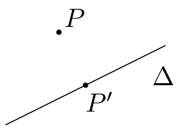
$$\iff \begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$ **éq. parametrique** de paramètre $t \in \mathbb{R}$

$$\iff \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$ **éq. cartesienne**



- **Droite passante par** $A = (a_1, a_2)$ **et** $B = (b_1, b_2)$: $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$

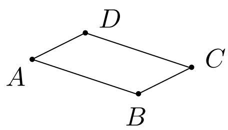
$$\Delta = \Big\{(x, y) \mid \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}\Big\}$$



Distance: $\operatorname{dist}(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \|\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

Si P' est la projection orthogonale de P sur la droite Δ, alors

$$\operatorname{dist}(P, \Delta) = \operatorname{dist}(P, P') = \frac{|\ ax + by + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Aire du parallelogramme de sommets $A, B, C, D = |\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}^{\perp}\ | = \|\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$.

Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AD}^{\perp} = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$ et Aire $= |\ xy' - yx'|$.

Conique = intersection d'un cône de l'espace avec un plan:

$$\mathcal{C} = \Big\{(x, y) \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\Big\} \quad \text{où} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

- **Cercle**: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, centre (a, b), rayon r.

- **Ellipse**: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, centre $(0, 0)$, axes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

- **Hyperbole**: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, centre $(0, 0)$, axes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, droites asymptotes $y = \pm\dfrac{b}{a}x$,

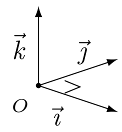
  ou bien: $y = \dfrac{a}{x}$, centre $(0, 0)$, droites asymptotes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, axes = bisectrices des quadrants.

- **Parabole**: $y = ax^2 + bx + c$, axe $\vec{\jmath}$

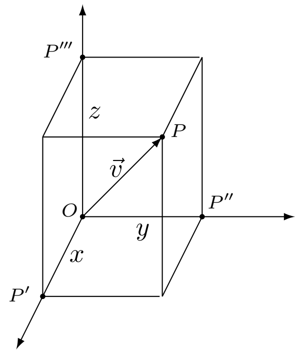
  ou bien: $x = ay^2 + by + c$, axe $\vec{\imath}$.

3.2 Géométrie cartesienne dans l'espace

Coordonnées cartesiennes des points et des vecteurs de l'espace:

- **Repère cartesien** ou **orthonormal direct (o.n.d.)** de l'espace: $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\, \vec{k}) =$  ,
avec $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath} \perp \vec{k} \perp \vec{\imath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

- L'ensemble $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\ \}$ forme une **base** de l'espace vectoriel des vecteurs de l'espace appliqués en O, donc tout vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ est combinaison linéaire de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.



- **Coordonnées cartesiennes**:

$$P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \iff \vec{v} = \overrightarrow{OP} \ = \ x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \ \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

où $\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \\ z = \|\overrightarrow{OP'''}\| \end{cases}$ = longueur des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$:

- **Espace + repère cartesien = $\mathbb{R}^3$**, car tout point $P \equiv$ vecteur $\overrightarrow{OP}$ = trois coordonnées x, y et z.

- Attention: **Vecteur affine:** $\overrightarrow{PQ} \ = P + \ \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \ = P + (x_Q - x_P)\ \vec{\imath} + (y_Q - y_P)\ \vec{\jmath} + (z_Q - z_P)\ \vec{k}$.

Calcul vectoriel en coordonnées cartesiennes: Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

- **addition**: $\vec{v} + \vec{v}' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

- **produit par scalaire**: $t\vec{v} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$, ex. $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

- **produit scalaire**: $\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy' + zz'$, ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 6 + 4 = 8$

- **longueur**: $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- **produit vectoriel**: $\vec{v} \wedge \vec{v}' = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ -xz' + zx' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$, ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 8 \\ -2 - 4 \\ 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

- **produit mixte**: $[\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'''] = x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')$,
ex. $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = (2 - 3) - 2(-3 - 1) + 3(2 - 2) = -1 + 8 = 7$

- **vecteurs orthogonaux**: $\vec{v} \perp \vec{v}' \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' + zz' = 0$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

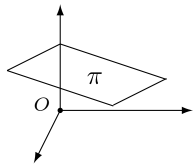
- **vecteurs parallèles**: $\vec{v} \parallel \vec{v}' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}' = t\vec{v} \quad \forall t \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = tx \\ y' = ty \\ z' = tz \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{z'}$,

alternative: $\vec{v} \parallel \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v} \wedge \vec{v}' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy' = yx' \\ yz' = zy' \\ xz' = zx' \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{z}{z'}$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

- **projection orthogonale**:

$$\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{v}') = \frac{x'x + y'y + z'z}{x^2 + y^2 + z^2}\,\vec{v}, \qquad \text{ex. } \mathrm{Pr}_{5\vec{\jmath}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1 \times 0 + 2 \times 5 + 3 \times 0}{0^2 + 5^2 + 0^2}\, 5\,\vec{\jmath} = 2\,\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Plan (affine): $\pi = \Big\{ P = (x,y,z) \mid ax + by + cz + d = 0 \Big\}$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.
Attention: un plan est un espace vectoriel de dimension 2 ssi il passe par O, i.e. $d = 0$.



- **Vecteur orthogonal** ou **normal** à π $= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** $\perp$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$

$$\pi = \Big\{ (x,y,z) \mid u_1(x - a_1) + u_2(y - a_2) + u_3(z - a_3) = 0 \Big\}.$$

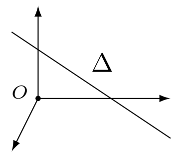
- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** $\parallel$ **à** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$: $[\overrightarrow{AP}, \vec{v}, \vec{v}'] = 0$

$$\pi = \Big\{ P = (x,y,z) \mid \overrightarrow{AP} = t\vec{v} + t'\vec{v}',\ t, t' \in \mathbb{R} \Big\} \iff \begin{cases} x - a_1 = tv_1 + t'v_1' \\ y - a_2 = tv_2 + t'v_2' \\ z - a_3 = tv_3 + t'v_3' \end{cases}$$

$$\iff (x - a_1)(v_2 v_3' - v_3 v_2') - (y - a_2)(v_1 v_3' - v_3 v_1') + (z - a_3)(v_1 v_2' - v_2 v_1') = 0$$ **éq. cartesienne**

- **Plan passant par** $A = (a_1, a_2, a_3)$**,** $B = (b_1, b_2, b_3)$ **et** $C = (c_1, c_2, c_3)$: $[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$

  $\pi =$ comme ci-dessus.



Droite (affine): $\Delta = \pi \cap \pi' = \left\{ P = (x,y,z) \mid \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right\}$
avec $(0,0,0) \neq (a,b,c) \nparallel (a',b',c') \neq (0,0,0)$.

Attention: une droite est un espace vectoriel de dimension 1 ssi elle passe par O, i.e. $d = 0$ et $d' = 0$.

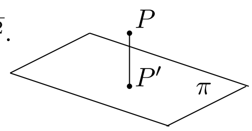
- **Droite passante par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** $\parallel$ **à** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$

$$\Delta = \Big\{ P = (x,y,z) \mid \overrightarrow{AP} = t\vec{v},\ t \in \mathbb{R} \Big\} \iff \begin{cases} x - a_1 = tv_1 \\ y - a_2 = tv_2 \\ z - a_3 = tv_3 \end{cases}$$ **éq. parametrique** de paramètre $t \in \mathbb{R}$

$$\iff \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$ **éq. cartesienne**

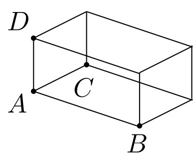
- **Droite passante par** $A = (a_1, a_2, a_3)$ **et** $B = (b_1, b_2, b_3)$: $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$, Δ comme ci-dessus.

Distance: $\mathrm{dist}\,(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.



Si P' est la projection orthogonale de P sur le plan π, alors

$$\mathrm{dist}\,(P, \pi) = \mathrm{dist}\,(P, P') = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



Volume du parallelepipède de sommets A, B, C, D, etc $= \Big| \big[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \big] \Big|$.

Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, alors Volume $= |x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')|$.

Quadrique: $\mathcal{Q} = \Big\{ (x,y,z) \mid P(x,y,z) = 0 \Big\}$, où $P(x,y,z)$ est un polynôme de degré 2.

- **Sphère**: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$
- **Ellipsoïde**: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{c^2} = 1$
- **Hyperboloïde à une nappe**: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
- **Hyperboloïde à deux nappes**: $x^2 - y^2 - z^2 = 1$
- **Cylindre**: $x^2 + y^2 = r^2$
- **Cône**: $x^2 + y^2 = z^2$
- **Paraboloïde**: $z = xy$

  ou bien: $z = x^2 + y^2$