Math2 – Chapitre 2
Dérivées, Taylor, extrema locaux

Dans ce chapitre:

1. Limites et continuité
2. Dérivées partielles
3. Dérivée directionelle
4. Gradient
5. Différentielle
6. Jacobienne
7. Resumé sur les dérivées
8. Règle de la chaîne
9. Hessienne
10. Taylor
11. Extrema locaux

1. Limites et continuité

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Dans cette section:

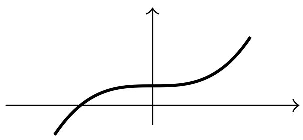
- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Limites de fonctions
- Fonctions continues

Rappels sur les fonctions d'une variable

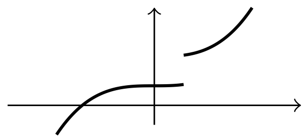
Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, avec domaine D_f, on dit que:

• la **limite de f en un point** $a \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur $\lim_{x \to a} f(x)$ à laquelle tend $f(x)$ quand x s'approche de a;

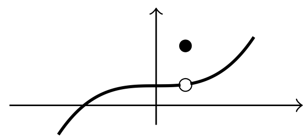
• f **est continue** en un point $a \in D_f$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.



continue



$\lim_{gauche} \neq \lim_{droite}$



$\lim_{gauche} = \lim_{droite} \neq f(a)$

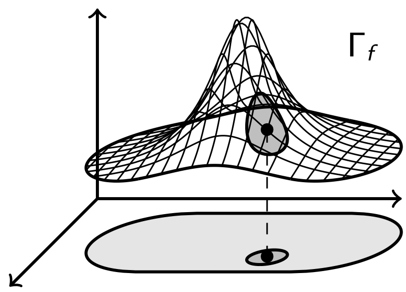
Limites des fonctions

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieurs variables, de domaine D_f.

• La **limite de f en un point** $\vec{a} \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur à laquelle tend $f(\vec{x})$ quand $\vec{x}$ s'approche de $\vec{a}$ par tous les chemins contenus dans D_f. On la note

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}).$$



Attention – La limite peut ne pas exister, mais si elle existe elle est unique.

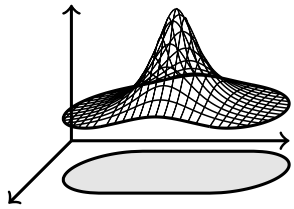
Fonctions continues

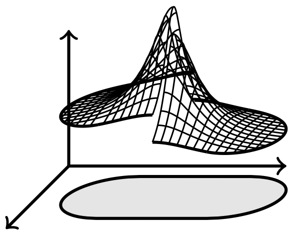
- La fonction f est **continue en** $\vec{a} \in D_f$ si

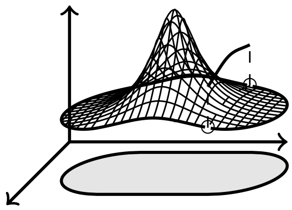
$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}).$$

- La fonction f est **continue sur le sous-ensemble** $D \subset D_f$ si f est continue en tout point de D.

Le graphe d'une fonction continue n'a pas de "sauts" !







Quelles fonctions sont-elles continues ?

Théorèmes – *Toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues comme somme, produit ou composée de fonctions continues sont continues.*

Quelques fonctions continues –

- Les fonctions polynomiales de plusieurs variables sont continues sur $\mathbb{R}^n$.
- Toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues par composition ou combinaisons de fonctions à une variable qui sont continues.
- Ainsi: les fractions rationnelles, les racines, les exponentielles et les logarithmes, les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques sont continues sur leur domaine de définition.

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

2. Dérivées partielles

Dans cette section:

- Rappels sur les fonctions d'une variable
- dérivées partielles
- fonctions (continûment) différentiables

Rappels sur les fonctions d'une variable

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

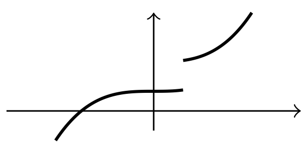
Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, la **dérivée** de f en $x \in D_f$ est la limite

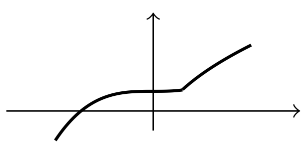
$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

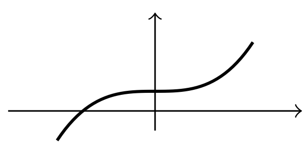
si elle existe et est finie. Dans ce cas, f est **dérivable en** x. La fonction f est **dérivable sur** $D \subset D_f$ si elle est dérivable en tout point $x \in D$.

Propriété – *Une fonction dérivable est continue.*

Le contraire est faux:


non continue


continue, non dérivable


dérivable

Dérivées partielles

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

- Les **dérivées partielles de** f **en** $\vec{x} \in D_f$ sont les limites

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f\big(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n\big) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

pour $i = 1, \dots, n$ (si ces limites existent).

- Les **dérivées partielles de** f sont les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \ \vec{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

définies sur l'ensemble de points $\vec{x}$ oû les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ existent.

Fonctions (continûment) différentiables

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

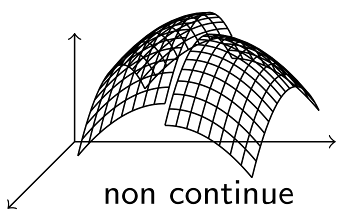
- La fonction f est **(continûment) différentiable sur** $D \subset D_f$, ou **de classe** C^1 **sur** D, si toutes les dérivées partielles

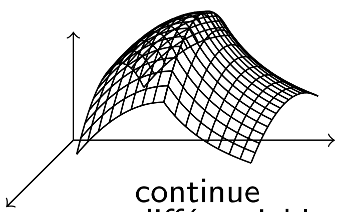
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

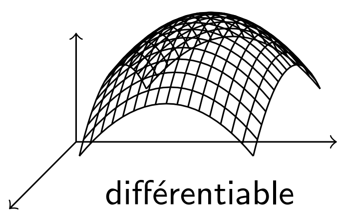
existent et sont des fonctions continues en tout point $\vec{x} \in D$.

Propriété – *Une fonction différentiable est continue.*

Le contraire est faux: le graphe d'une fonction différentiable n'a pas de "sauts" et en plus ne change pas son allure "brusquement"!


non continue


continue
non différentiable


différentiable

Exemples de fonctions différentiables

Exemple 1 – La fonction $f(x,y) = xy^2 + 3x$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 – La fonction $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 + 3x \\ z^2 \end{pmatrix}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

sont continues sur $\mathbb{R}^3$.

Exemples de fonctions différentiables

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Exemple 3 – La fonction $f(r,\varphi,\theta) = \varphi^2 + r\sin\theta$ est C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi,\theta) = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) = 2\varphi$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta$$

sont continues.

3. Dérivées directionnelles

Dans cette section:

- Dérivées directionnelles
- Croissance et décroissance des fonctions réelles

Dérivées directionnelles

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$.

Définition – Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle **dérivée directionnelle de f dans la direction $\vec{v}$** la fonction

$$\begin{array}{rccl} \partial_{\vec{v}} f : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{array}$$

Nota –
Dérivées partielles = dérivées directionnelles dans la direction des vecteurs

$$\vec{e}_i = (0, ..., 1, ..., 0),$$

où 1 est en $i$ème position,

c'est-à-dire $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{\vec{e}_i} f.$

Exemples de dérivées directionnelles

Exemple 1 – La dérivée directionnelle de la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = xy^2 + 3x \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y)$ est la fonction

$$\begin{array}{rccl} \partial_{\vec{v}} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(x,y) = (y^2+3)\,X + 2xy\,Y \end{array}$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Exemples de dérivées directionnelles

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Exemple 2 – La dérivée directionnelle de l'application

$$\begin{array}{rccl} f = (f_1, f_2): & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (xy^2 + 3x, yz^2) = \begin{pmatrix} xy^2 + 3x \\ yz^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y, Z)$ est la fonction

$$\partial_{\vec{v}} f = (\partial_{\vec{v}} f_1, \partial_{\vec{v}} f_2) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

qui vaut, en tout $\vec{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix} Z \\ &= \begin{pmatrix} (y^2+3)\,X + 2xy\,Y \\ z^2\,Y + 2yz\,Z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemples de dérivées directionnelles

Exemple 3 – La dérivée directionnelle de l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\varphi,\theta) & \longmapsto & \varphi^2 + r\sin\theta \end{array}$$

dans la direction $\vec{v} = (X, Y, Z)$, au point $\vec{x} = (r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3$, est donnée par

$$\partial_{(X,Y,Z)} f(r,\varphi,\theta) = \sin\theta\ X + 2\varphi\ Y + r\cos\theta\ Z$$

puisque

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\varphi,\theta) = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r,\varphi,\theta) = 2\varphi$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta$$

Croissance et décroissance des fonctions réelles

Théorème – *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $\vec{x} \in D$ et tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, on a:*

- *Si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) > 0$ alors* *f est croissante au point $\vec{x}$ dans la direction de $\vec{v}$.*
- *Si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) < 0$ alors* *f est décroissante au point $\vec{x}$ dans la direction de $\vec{v}$.*

De plus:

- forte croissance $\Longleftrightarrow$ grande dérivée positive
- forte décroissance $\Longleftrightarrow$ grande dérivée négative

Attention – On ne peut rien dire sur la croissance de f si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = 0$!

Exercice

Énoncé – La fonction $f(x,y) = xy^2 + 3x$ est-elle croissante ou décroissante au point $(3,1)$, dans les directions $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,-1)$ et $(1,-2)$?

Réponse – Pour tout vecteur $\vec{v} = (X, Y)$, on a

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = (y^2+3)\,X + 2xy\,Y$$

et donc

$$\partial_{\vec{v}} f(3,1) = 4\,X + 6\,Y$$

d'où

- $\partial_{(1,1)} f(3,1) = 10 \quad \Rightarrow \quad f$ croissante en direction $(1,1)$
- $\partial_{(1,2)} f(3,1) = 16 \quad \Rightarrow \quad f$ croissante en direction $(1,2)$
- $\partial_{(1,-1)} f(3,1) = -2 \quad \Rightarrow \quad f$ décroissante en dir. $(1,-1)$
- $\partial_{(1,-2)} f(3,1) = -8 \quad \Rightarrow f$ décroissante en dir. $(1,-2)$

Exercice

Énoncé (suite) – Parmi ces quatre directions, quelle est celle de plus forte croissance et celle de plus forte décroissance ?

Réponse – Pour comparer la croissance d'une fonction en différentes directions, il faut calculer les différentes dérivées directionnelles avec des vecteurs ayant tous la même longueur, par exemple 1.

Directions croissantes –

- $\|(1,1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} f(3,1) = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$
- $\|(1,2)\| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,2)} f(3,1) = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$

Or $\quad \frac{10}{\sqrt{2}} < \frac{16}{\sqrt{3}} \quad$ car $\quad (10\sqrt{3})^2 = 300 < (16\sqrt{2})^2 = 512.$

Ainsi, au point $(3,1)$, le fonction f croit plus rapidement dans la direction $(1,2)$.

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Exercice

Directions décroissantes –

- $\|(1,-1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)} f(3,1) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}}$
- $\|(1,-2)\| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-2)} f(3,1) = -\dfrac{8}{\sqrt{3}}$

On a $\quad -\frac{2}{\sqrt{2}} > -\frac{8}{\sqrt{3}} \quad$ car ceci se vérifie ssi $\quad \frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{8}{\sqrt{3}}$,

ce qui est vrai car $\quad (2\sqrt{3})^2 = 12 < (8\sqrt{2})^2 = 128.$

Ainsi, au point $(3,1)$, le fonction f décroit plus rapidement dans la direction $(1,-2)$.

4. Gradient

Dans cette section:

- Gradient des fonctions réelles
- Interpretation géométrique du gradient

Gradient d'une fonction réelle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle différentiable sur $D \subset D_f$.

- Le **gradient de** f **en un point** $\vec{x} \in D$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\, \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

où le symbole $\vec{\nabla}$ se lit *nabla*.

- Le **gradient de** f est la fonction vectorielle

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \equiv \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a alors $\quad \partial_{\vec{v}} f = \langle \vec{\nabla} f, \vec{v} \rangle = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}$.

Exemples de gradient

Exemples –

- $f(x,y) = xy^2 + 3x \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 2xy \end{pmatrix}$

Par exemple: $\quad \vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad \vec{\nabla} f(3,2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- $f(x,y,z) = \sin(xy) + \ln(x^2 + z^2) \quad \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\, \cos(xy) + \frac{2x}{x^2+z^2} \\ x\, \cos(xy) \\ \frac{2z}{x^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

Par exemple: $\quad \vec{\nabla} f(0,\pi,1) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Interprétation géométrique du gradient

Théorème – *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Pour tout $\vec{x} \in D$ on a alors:*

- *Le gradient $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ est orthogonal à la ligne de niveau $L_a(f)$ avec $a = f(\vec{x})$.*

- *Le gradient $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ indique la direction de la pente de plus forte croissante du graphe Γ_f en $\vec{x}$.*

Exemple: interpretation géométrique du gradient

Exemple – $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \Longrightarrow$

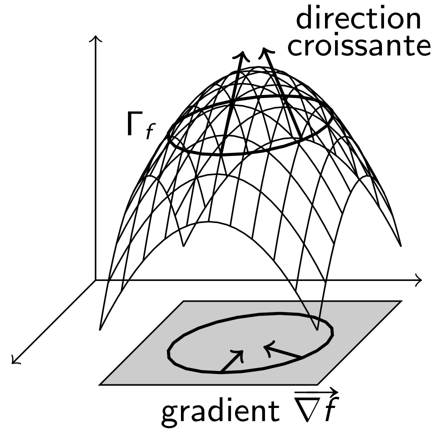
domaine $D_f = \overline{D}_O(1)$ = disque unitaire fermé

ligne de niveau $L_a(f)$ = cercle de rayon $\sqrt{1-a^2}$, où $a \in [0,1]$

f est différentiable sur $D = D_O(1)$ = disque unitaire ouvert, et

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}(x,y).$$

Pour tout $a \in]0,1[$, ce vecteur est orthogonal au cercle $L_a(f)$ au point (x,y) et est dirigé vers le centre du cercle.



5. Différentielle

Dans cette section:

- Différentielle des fonctions
- Différentielle des fonctions réelles: dx, dy et dz
- Différentielle des coordonnées cylindriques et sphériques: $d\rho$, $d\varphi$, dr et $d\theta$

Différentielle d'une fonction en un point

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition, pour tout $\vec{x} \in D$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \partial_\bullet f(x) : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{v} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\, v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\, v_n \end{array}$$

est linéaire dans la variable $\vec{v}$.

Définition – Cette application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ s'appelle **différentielle de f au point** $\vec{x}$.

Il est d'usage de la noter $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

En somme, pour tout $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; v_n \;= \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}).$$

Différentielle en un point: cas particuliers

Cas particuliers –

• Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, la différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit au moyen du gradient de f:

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \quad df_x(\vec{v}) = \langle \vec{\nabla} f(x), \vec{v} \rangle$$

• Si $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction d'une seule variable x, la différentielle $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vaut:

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad df_x(\vec{v}) = \Big(f_1'(x)\, v \;, \ldots ,\; f_m'(x)\, v \Big)$$

Exemples de différentielles

Exemples –

• $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $df_x(X) = (2x - 5x^4)\, X.$

• $f(x, y) = x^2y^3 - 7y \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y)}(X, Y) = 2xy^3\; X + (3x^2y^2 - 7)\; Y.$$

Par exemple:

$$df_{(x,y)}(2, 1) = 4xy^3 + 3x^2y^2 - 7$$
$$df_{(1,1)}(X, Y) = 2X - 4Y$$
$$df_{(1,1)}(2, 1) = 0$$

Exemples de différentielles (suite)

- $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \end{array}$

$$df_{(x,y)}(X,Y) = X \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2\,X + 2xy\,Y \\ Y \\ 2x\,X - 2y\,Y \end{pmatrix}$$

- $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \end{array}$

$$\begin{aligned} df_{(x,y,z)}(X,Y,Z) &= X \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 2xy \\ z^3 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ 3yz^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2\,X + 2xy\,Y \\ z^3\,Y + 3yz^2\,Z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Applications linéaires élementaires

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Remarque –

- Les n applications linéaires (pour $i = 1, \ldots, n$)

$$dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ \vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto dx_i(\vec{v}) = v_i$$

formant une *base* de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- Par conséquent, toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit comme *combinaison linéaire* des dx_i:

$$L = a_1\,dx_1 + \cdots + a_n\,dx_n \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{R}.$$

- Il n'y a pas n applications linéaires

$$''dx_i'' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{pour } i = 1, \ldots, n)$$

qui forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, parce que cet espace a dimension $n \times m$!

Différentielle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^n$. L'application

$$\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \vec{x} & \longmapsto & df_{\vec{x}} \end{array}$$

s'appelle **différentielle** de f et est notée df.

Corollaire – Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction <u>réelle</u>, alors:

- La différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\vec{x} \in D$ s'écrit

$$df_{\vec{x}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; dx_n.$$

- La différentielle $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\; dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\; dx_n.$$

Exemples: écriture usuelle des différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad df_x = (2x - 5x^4)\, dx.$

Par exemple: $df_1 = -3\, dx$.

- $f(x,y) = x^2y^3 - 7y \quad \Rightarrow \quad df_{(x,y)} = 2xy^3\, dx + (3x^2y^2 - 7)\, dy.$

Par exemple: $df_{(1,1)} = 2\, dx - 4\, dy$.

- $f(x,y,z) = x^2y^3z - 7yz^2 \quad \Rightarrow$

$$df_{(x,y,z)} = 2xy^3z\; dx + (3x^2y^2z - 7z^2)\; dy + (x^2y^3 - 14yz)\; dz$$

Par exemple: $df_{(1,1,1)} = 2\; dx - 4\; dy - 13\; dz$

Exercice

Énoncé – *Pour la fonction $f(x, y) = \ln(1 - x^2 + 5y)$:*

1) *Déterminer l'ensemble D où f est différentiable.*
2) *Déterminer la différentielle en tout point $(x, y) \in D$.*
3) *Calculer $df_{(2,0)}$ en les vecteurs $\vec{\imath} = (1, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1)$ et $\vec{u} = (3, -3)$.*

Réponse –

1) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5} \right\}$

portion du plan au-dessus de la parabole d'éq.

$$y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$$

Exercice (suite)

2) Pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned} df_{(x,y)} &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\ dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\ dy \\ &= \frac{-2x}{1 - x^2 + 5y}\ dx + \frac{5}{1 - x^2 + 5y}\ dy \end{aligned}$$

3) Ainsi

$$df_{(2,0)} = \frac{-4}{1-4}\ dx + \frac{5}{1-4}\ dy = \frac{4}{3}\ dx - \frac{5}{3}\ dy$$

et

$$\begin{aligned} df_{(2,0)}(\vec{\imath}) &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = \tfrac{4}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{\jmath}) &= \tfrac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = -\tfrac{5}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{v}) &= df_{(2,0)}(1, 1) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{3} = -\tfrac{1}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{u}) &= df_{(2,0)}(3, -3) = \tfrac{4}{3}\ 3 - \tfrac{5}{3}(-3) = 4 + 5 = 9 \end{aligned}$$

Exercice : dx, dy, dz, $d\rho$, $d\varphi$, dr et $d\theta$

Énoncé – *On note (x, y, z), (ρ, φ, z) et (r, φ, θ) les coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques des points de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que*

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{array}$$

Exercice (suite)

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Montrer que

$$i)\left\{\begin{array}{l} dx = \cos\varphi\ d\rho - \rho\sin\varphi\ d\varphi \\ \\ dy = \sin\varphi\ d\rho + \rho\cos\varphi\ d\varphi \\ \\ dz = dz \end{array}\right.$$

$$i')\left\{\begin{array}{l} d\rho = \cos\varphi\ dx + \sin\varphi\ dy \\ \\ \rho d\varphi = -\sin\varphi\ dx + \cos\varphi\ dy \\ \\ dz = dz \end{array}\right.$$

Formules de passage *cartésiennes* $\longleftrightarrow$ *cylindriques*

Exercice (suite)

$$ii)\begin{cases} dx = \cos\varphi\ \sin\theta\ dr - r\sin\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\ d\theta \\ dy = \sin\varphi\ \sin\theta\ dr + r\cos\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\sin\varphi\ \cos\theta\ d\theta \\ dz = \cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \end{cases}$$

$$ii')\begin{cases} dr = \cos\varphi\ \sin\theta\ dx + \sin\varphi\ \sin\theta\ dy + \cos\theta\ dz \\ r\sin\theta\ d\varphi = -\sin\varphi\ dx + \cos\varphi\ dy \\ rd\theta = \cos\varphi\ \cos\theta\ dx + \sin\varphi\ \cos\theta\ dy + \sin\theta\ dz \end{cases}$$

Formules de passage *cartésiennes* $\longleftrightarrow$ *sphériques*

Exercice (suite)

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

$$(iii)\begin{cases} dr = \sin\theta\ d\rho + \cos\theta\ dz \\ d\varphi = d\varphi \\ rd\theta = \cos\theta\ d\rho - \sin\theta\ dz \end{cases}$$

$$(iii')\begin{cases} d\rho = \sin\theta\ dr + \cos\theta\ d\theta \\ d\varphi = d\varphi \\ dz = r\cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \end{cases}$$

Formules de passage *cylindriques* $\longleftrightarrow$ *sphériques*

Exercice (suite et fin)

Réponse – Il suffit d'écrire les différentielles des applications de changement de variables. Par exemple la différentielle du changement de variables *cylindriques* → *cartésiennes* donne les formules i):

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial x}{\partial z}\, dz \\ &= \cos\varphi\, d\rho - \rho \sin\varphi\, d\varphi \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial y}{\partial z}\, dz \\ &= \sin\varphi\, d\rho + \cos\varphi\, d\varphi \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial z}{\partial z}\, dz \\ &= dz \end{aligned}$$

Les formules i') s'obtiennent en inversant le système. On procède similairement pour les autres formules.

6. Jacobienne

Dans cette section:

- Rappel sur les applications linéaires et les matrices
- Matrice Jacobienne et déterminant Jacobien
- Jacobien des changements de variables

Rappels sur les applications linéaires et les matrices

Rappel – Toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se represente come une matrice $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ (avec m lignes et n colonnes) telle que, pour tout $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} L(\vec{v}) &= A\,\vec{v} \quad \text{(produit matrice par vecteur)} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}\ v_1 + \cdots + a_{1n}\ v_n \\ \vdots \\ a_{m1}\ v_1 + \cdots + a_{mn}\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Matrice jacobienne

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction diff. sur D.

- La **matrice Jacobienne de** f est la matrice $J_f \in \mathcal{M}_{mn}$ associée à df, c'est à dire telle que

$$df_{\vec{x}}(\vec{v}) = J_f(\vec{x})\ \vec{v}, \quad \text{pour tout } \vec{x} \in D \text{ et tout } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $(f_1, \dots, f_m)$ sont les composantes de f, on a alors

$$J_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}).$$

- Si la matrice Jacobienne est carrée ($n = m$), son détérminant $\mathrm{Jac}\, f = \det J_f$ s'appelle **Jacobien de** f.

Matrice jacobienne: cas particuliers

Cas particuliers –

• Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$, on a

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R}) \quad \text{(matrice ligne)}$$

• Si $\quad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ (u,v) \mapsto h(u,v) = \big(h_1(u,v), h_2(u,v)\big)$, on a

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1(u,v)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(u,v) = \frac{\partial h_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_2(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial h_2(u,v)}{\partial u}\frac{\partial h_1(u,v)}{\partial v}$$

Matrice jacobienne: cas particuliers

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Cas particuliers –

• Si $\quad \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, on a

$$J_g(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t) \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) \quad \text{(matrice colonne } = \text{vecteur)}$$

• Si $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z)$, on a

$$J_g(z) = \big(g'(z)\big) \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, g(z) = g'(z) \in \mathbb{R}$$

Exemples : matrices Jacobiennes

Exemples –

- $f(x,y) = x^2 y \quad \Rightarrow \quad J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}$
- $h(u,v) = (u^2 v, 3u) \quad \Rightarrow$

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22} \quad \text{et} \quad \mathrm{Jac}\, h(u,v) = -3u^2$$

- $\gamma(t) = (2t, t^3+1) \quad \Rightarrow \quad J_\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}$

Exemples: Jacobien des changements de variables

- **Polaires :** $h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

$$J_h(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho,\varphi) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

- **Cylindriques :** $h(\rho,\varphi,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$

$$J_h(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho,\varphi,z) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

Exemples: Jacobien des changements de variables

- **Sphériques :** $h(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

$$J_h(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}\, h &= \cos\theta\Big(-r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\Big) \\ &\quad -r\sin\theta\Big(r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\Big) \\ &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta \\ &= -r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – Calculer le gradient, la différentielle et la matrice jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y,z) = z\,\sin(xy).$$

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\,\cos(xy) \\ xz\,\cos(xy) \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$df_{(x,y,z)} = yz\,\cos(xy)\,dx + xz\,\cos(xy)\,dy + \sin(xy)\,dz$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\,\cos(xy) & xz\,\cos(xy) & \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Exercice

Énoncé – Calculer la différentielle et la matrice Jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \sin x \\ z \sin y \end{pmatrix}.$$

Réponse – On a

$$df_{(x,y,z)}(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} z \cos x \\ 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ z \cos y \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \end{pmatrix} Z$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & z \cos y & \sin y \end{pmatrix}$$

7. Resumé sur les dérivées

Dans cette section:

- Resumé sur les dérivées des fonctions réelles
- Resumé sur les dérivées des fonctions vectorielles

Resumé: dérivées des fonctions réelles

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction <u>réelle</u> diff. sur $D \subset \mathbb{R}^n$:

- **dérivées partielles** = fonctions réelles
  $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}}$
- **dérivées directionelles** = fonctions réelles
  $\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}}$
  $\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$
- **gradient** = fonction vectorielle
  $\boxed{\vec{\nabla} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n}$ $\quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$
- **différentielle** = fonction à valeur applications linéaires
  $\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$
  $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$
- **Jacobienne** = fonction à valeur matrices ligne
  $\boxed{J_f : D \longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})}$
  $J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Resumé: dérivées des fonctions vectorielles

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Si $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est fonction <u>vectorielle</u> diff. sur D:

- **dérivées partielles** = fonctions vectorielles
  $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$
  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \right)$
- **dérivées directionelles** = fonctions vectorielles
  $\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$
  $\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$
- **gradient** "$\vec{\nabla} f$" n'est pas défini
- **différentielle** = fonction à valeur applications linéaires
  $\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$
  mais les "dx_i" n'existent pas
- **Jacobienne** = fonction à valeur dans les matrices
  $\boxed{J_f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})}$
  $$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

8. Règle de la chaîne

Dans cette section:

- Dérivées de la somme et du produit de fonctions
- Dérivées de la composée de fonctions
- Transformation des dérivées partielles: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \rho}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$

Dérivées de la somme de fonctions et du produit par scalaire

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Proposition – *Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont différentiables, on a :*

- $\boxed{\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \dfrac{\partial g}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \dots, n}$

Par conséquent $\quad \vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$ *(si $m=1$),*

$$d(f+g) = df + dg, \quad J_{f+g} = J_f + J_g$$

- $\boxed{\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \dots, n} \qquad$ *où $\lambda \in \mathbb{R}$*

Par conséquent $\quad \vec{\nabla}(\lambda f) = \lambda \vec{\nabla} f$ *(si $m=1$),*

$$d(\lambda f) = \lambda\, df, \quad J_{\lambda f} = \lambda J_f$$

Dérivées du produit de fonctions

Proposition – *Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles différentiables, on a la* **règle de Leibniz***:*

- $$\boxed{\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\, g + f\, \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n}$$

Par conséquent

$$\vec{\nabla}(fg) = \big(\vec{\nabla} f\big) g + f\big(\vec{\nabla} g\big),$$

$$d(fg) = \big(df\big) g + f\big(dg\big),$$

$$J_{fg} = \big(J_f\big) g + f\big(J_g\big)$$

Exemple : règle de Leibniz

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Exemple – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy^2\ e^{xy}$. Le calcul de la différentielle de f peut se faire directement au moyen de la formule

$$d\Big(xy^2\ e^{xy}\Big) = \frac{\partial\big(xy^2\ e^{xy}\big)}{\partial x}\ dx + \frac{\partial\big(xy^2\ e^{xy}\big)}{\partial y}\ dy$$

ou en passant par la règle de Leibniz

$$\begin{aligned} d\Big(xy^2\ e^{xy}\Big) &= d\big(xy^2\big)\ e^{xy} + xy^2\ d\big(e^{xy}\big) \\ &= \big(y^2\ dx + 2xy\ dy\big)\ e^{xy} \\ &\quad + xy^2\ \big(y\ e^{xy}\ dx + x\ e^{xy}\ dy\big) \\ &= \big(y^2 + xy^3\big)\ e^{xy}\ dx + \big(2xy + x^2y^2\big)\ e^{xy}\ dy \end{aligned}$$

Dérivées des fonctions composées

Proposition – *Pour deux fonctions*

$$f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \textit{différentiable en } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$
$$g = (g_1, \dots, g_p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \quad \textit{différentiable en } \vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$$

la composée $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $\vec{x}$ et on a la **règle de la chaîne** *:*

- $$\boxed{\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\big(f(\vec{x})\big)\, \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}\big(f(\vec{x})\big)\, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x})}$$

pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $j = 1, \dots, p$,.

Par conséquent, on a aussi :

$d\big(g \circ f\big)_{\vec{x}} = dg_{f(\vec{x})} \circ df_x$ *(composition d'applications linéaires)*

$J_{g \circ f}(\vec{x}) = J_g(f(\vec{x})) \cdot J_f(\vec{x})$ *(produit de matrices)*

Cas particuliers de fonctions composées

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Règle de la chaîne : cas particuliers –

- Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto z = f(x, y)$

  $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z)$

on a

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(x,y) = g'\big(f(x,y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial y}(x,y) = g'\big(f(x,y)\big)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases}}$$

$$d\big(g \circ f\big)_{(x,y)} = g'\big(f(x,y)\big)\ df_{(x,y)}$$

$$J_{g \circ f}(x,y) = g'\big(f(x,y)\big)\ J_f(x,y)$$

Cas particuliers de fonctions composées

Règle de la chaîne : cas particuliers –

- Si $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto (x,y) = h(u,v)$

  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$

on a

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial(f\circ h)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

$$d\big(f\circ h\big)_{(u,v)} = df_{h(u,v)} \circ dh_{(u,v)}$$

$$J_{f\circ h}(u,v) = J_f\big(h(u,v)\big)\ J_h(u,v)$$

Cas particuliers de fonctions composées

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Règle de la chaîne : cas particuliers –

- Si $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x,y) = \gamma(t)$

  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$

on a

$$\boxed{\big(f\circ\gamma\big)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\ y'(t)}$$

$$d\big(f\circ\gamma\big)_t = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t$$

$$J_{f\circ\gamma}(t) = J_f\big(\gamma(t)\big)\ J_\gamma(t)$$

Exercice

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad et \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

1) Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *pour* $F(x,y) = \ln f(x,y)$.

Réponse – Si on pose $g(z) = \ln z$, on a $F = g \circ f$ et donc

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = g'(f(x,y))\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{f(x,y)}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = g'(f(x,y))\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-2y}{f(x,y)}$$

Exercice (suite)

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

2) Calculer $\frac{\partial G}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial G}{\partial v}$ *pour* $G(u,v) = f(v, uv^2)$.

Réponse – Si on pose $h(u,v) = (v, uv^2) = (x,y)$, c. à d. $x = v$ et $y = uv^2$, on a $G = f \circ h$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v,uv^2)\,\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v,uv^2)\,\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ &= 2v\,uv^2 \cdot 0 + (v^2 - 2uv^2)\cdot v^2\\ &= (1-2u)v^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v,uv^2)\,\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v,uv^2)\,\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\ &= 2v\,uv^2 \cdot 1 + (v^2 - 2uv^2)\cdot 2uv\\ &= 4uv^2(v-u)\end{aligned}$$

Exercice (suite)

3) Calculer $H'(t)$ pour $H(t) = f(t^2, 3t)$.

Réponse – Si on pose $\gamma(t) = (t^2, 3t) = (x, y)$,
c. à d. $x = t^2$ et $y = 3t$, on a $H = f \circ \gamma$ et donc

$$\begin{aligned} H'(t) &= (f \circ \gamma)'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t)\ x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t)\ y'(t) \\ &= 2t^2\, 3t \cdot 2t + (t^4 - 6t) \cdot 3 \\ &= 24t^4 - 18t \end{aligned}$$

Exercice

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Énoncé – *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x, y) = xy^2$.*

1) Calculer $\dfrac{\partial g(xy^2)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g(xy^2)}{\partial y}$, où
$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $g'(z) = \sqrt{z}$.

Réponse – On veut calculer les dérivées de $g \circ f$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(xy^2)}{\partial x} &= g'(xy^2)\ \frac{\partial (xy^2)}{\partial x} \\ &= \sqrt{xy^2}\ y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(xy^2)}{\partial y} &= g'(xy^2)\ \frac{\partial (xy^2)}{\partial y} \\ &= \sqrt{xy^2}\ (x^2 - 2xy) \end{aligned}$$

Exercice (suite)

2) Soit $(x, y) = h(u, v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ *un changement de variables dont on connait la matrice Jacobienne*

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix},$$

et soit $\tilde{f} = f \circ h$. *Calculer* $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v)$ *et* $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v)$.

Réponse – On applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\,\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u,v))\,\frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= y(u,v)^2 \cdot 0 + 2x(u,v)y(u,v)\,v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\,\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u,v))\,\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ &= y(u,v)^2 \cdot 1 + 2x(u,v)y(u,v)\,2uv \end{aligned}$$

Exercice (suite)

Réponse (suite)–

En alternative, on peut passer par les matrices Jacobiennes. Puisque

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} J_{\tilde{f}}(u,v) &= J_f(h(u,v)) \cdot J_h(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} y(u,v)^2 & 2x(u,v)y(u,v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2 \cdot 0 + 2xy \cdot v^2 & y^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 2uv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2v^2\,x(u,v)y(u,v) & y(u,v)^2 + 4uv\,x(u,v)y(u,v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice (suite)

3) Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *une trajectoire dans* $\mathbb{R}^2$ *dépendante du paramètre* t*. Calculer la dérivée en* t *de la fonction* $t \mapsto f(x(t), y(t))$.

Réponse – On veut calculer la dérivée de la fonction $f \circ \gamma$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{d\, f(x(t), y(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, y'(t) \\ &= y(t)^2 \;\; x'(t) + 2\, x(t) y(t))\;\; y'(t) \end{aligned}$$

Exercice : transformation des dérivées partielles

Énoncé – *Soient* (x, y, z) *les coordonnées cartesiennes des points de* $\mathbb{R}^3$, (ρ, φ, z) *les coordonnées cylindriques et* (r, φ, θ) *les coordonnées sphériques. On rappelle que*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos\varphi \sin\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\theta \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array} \right. \quad \textit{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{array} \right.$$

Montrer que les derivées partielles $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ *et* $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$ *satisfont aux formules suivantes :*

Exercice (suite)

$$(i)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \rho} = \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$(i')\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} - \sin\varphi\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\varphi\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Exercice (suite)

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

$$(i)\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \cos\varphi\ \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} = \cos\varphi\ \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$(ii')\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\varphi\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} + \cos\varphi\cos\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\sin\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\varphi\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} + \sin\varphi\cos\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\ \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$

Exercice (suite)

$$(iii) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \sin\theta \, \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \cos\theta \, \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r}\, \dfrac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta \, \dfrac{\partial}{\partial \rho} - \sin\theta \, \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

$$(iii') \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \rho} = \sin\theta \, \dfrac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \, \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\theta \, \dfrac{\partial}{\partial r} - \sin\theta \, \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{cases}$$

Exercice (suite)

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Réponse – Montrons (i). Pour cela on applique la règle de la chaîne à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(\rho, \varphi, z)$ est le changement de variables des coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \rho} \\ &= \cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ &= -r\sin\varphi\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\,\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

d'où suivent les formules (i). Les formules (i') en découlent par inversion du système.

Exercice (suite)

- Pour montrer les formules (ii), on applique cette méthode à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(r, \varphi, \theta)$ est le changement de variables des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial r} \\
&= \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial z} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -\rho \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= r\cos\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

- On inverse le système (ii) pour obtenir (ii').
- On combine les (i) à (ii') pour obtenir (iii) et (iii').

9. Hessienne

Dans cette section:

- Dérivées d'ordre supérieur
- Théorème de Schwarz
- Matrice Hessienne
- Laplacien, fonctions harmoniques

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont à leur tour différentiables, on peut calculer leurs dérivées partielles.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les **dérivées partielles d'ordre** k **de** f sont les fonctions qu'on obtient en dérivant f succéssivement k fois:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}.$$

• La fonction f est **de classe** C^k si ses dérivées d'ordre k existent et sont des fonctions continues. La fonction f est **lisse** ou **de classe** C^∞ si elle est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est fonction de (x, y), on a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Théorème de Schwarz

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Théorème – *Si les dérivées secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *existent et sont continue en un point* $\vec{x}$, *pour tout* $i, j = 1, ..., n$, *alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) \quad \textit{pour tout } i \neq j.$$

Corollaire – *Si* f *est une fonction de classe* C^k *(ou lisse), alors toutes ses dérivées mixtes jusqu'à l'ordre k (ou* ∞*), ayant le même nombre de dérivées en chaque* x_i*, coincident indépendement de l'ordre dans lequel elles sont calculées.*

Exemple : dérivées secondes

Exemple – $f(x,y) = x^3y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2y \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2y & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^3 \end{cases}$$

l'on constate que les dérivées partielles sont continues (donc f est de classe C^2) et que les dérivées mixtes sont identiques.

Exercice

Énoncé – *Soient $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et soit $c \in \mathbb{R}^*$. Montrer que le fonction $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$ est solution de l'***équation des ondes**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \textit{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Réponse – La fonction u est de classe C^2 car composée de fonctions C^2. On a

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= F'(x-ct)\, \tfrac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G'(x+ct)\, \tfrac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\ &= F'(x-ct) + G'(x+ct) \\ \tfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= F'(x-ct)\, \tfrac{\partial(x-ct)}{\partial t} + G'(x+ct)\, \tfrac{\partial(x+ct)}{\partial t} \\ &= -c\,F'(x-ct) + c\,G'(x+ct) \end{aligned}$$

Exercice (suite)

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= F''(x-ct)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G''(x+ct)\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial x}\\
&= F''(x-ct) + G''(x+ct),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= -c\,F'(x-ct)\,\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + c\,G'(x+ct)\,\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\
&= (-c)^2\,F''(x-ct) + c^2\,G''(x+ct).
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

Matrice Hessienne

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 en $\vec{x}$.

• La **matrice Hessienne** de f en $\vec{x}$ est la matrice carrée de taille n contenant toutes les dérivées secondes de f en $\vec{x}$:

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x})\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x})\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x})
\end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique par le théorème de Schwarz.

• Son déterminant $\mathrm{Hess}\, f(\vec{x}) = \det H_f(\vec{x})$ s'appelle le **Hessien** de f.

Exemple: matrice Hessienne

Exemple –

Pour $g(x,y,z) = x \sin y + y \sin z,$ on a

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x \cos y + \sin z \\ y \cos z \end{pmatrix}$$

puis

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y & 0 \\ \cos y & -x \sin y & \cos z \\ 0 & \cos z & -y \sin z \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det H_g(x,y,z) &= -\cos y \Big(-y \cos y \sin z - 0 \Big) \\ &= y \cos^2 y \sin z \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Montrer que le Hessien de la fonction* $f(x,y) = \sin(x-y)$ *est nul en tout point* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x-y) \\ -\cos(x-y) \end{pmatrix}$$

puis

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x-y) & \sin(x-y) \\ \sin(x-y) & -\sin(x-y) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det H_f(x,y) = \big(-\sin(x-y)\big)^2 - \big(\sin(x-y)\big)^2 = 0$$

Laplacien

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 au point $\vec{x} \in D$.

- Le **Laplacien** de f en $\vec{x}$ est la trace de la matrice Hessienne $H_f(\vec{x})$:

$$\Delta f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x}).$$

- La fonction f est dite **harmonique** si $\Delta f(\vec{x}) = 0$ en tout point $\vec{x} \in D$.

Interprétation géométrique du Laplacien

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Proposition – *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2. Si*

- *C est un carré de taille $h \times h$ contenu dans D, et*
- *$\mu(f, C)$ est la valeur moyenne de f sur C,*

alors, pour tout point $(a, b) \in C$, on a

$$\mu(f, C) = f(a, b) + \frac{h^2}{24}\,\Delta f(a, b) + O(h^4)$$

N.B. Moyenne au Ch.3: $\quad \mu(f, C) = \dfrac{1}{h^2} \iint_C f(x, y)\, dx\, dy.$

Remarque – Cela signifie que la différence $f(a, b) - \mu(f, C)$ est proportionnelle à $\Delta f(a, b)$, et que la constante de proportionalité ne dépend que de la taille du carré où on calcule la moyenne $\mu(f, C)$.

Exercice

Énoncé – *Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquelles la fonction $u(x,t) = x^2 - c^2t^2$ est harmonique.*

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} u(x,t) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2c^2 t \end{pmatrix}$$

puis

$$H_u(x,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2c^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\Delta u(x,t) = 2 - 2c^2,$$

donc $\Delta u(x,t) = 0$ si et seulement si $c = \pm 1$.

Exercice

Énoncé – *Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$.*

1) Déterminer le Laplacien de F en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.

Réponse – Il s'agit de calculer $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
En utilisant la règle de la chaîne on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} \\ &= f'(\sqrt{x^2+y^2}) \, \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} \\ &= f'(\sqrt{x^2+y^2}) \, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} \\ &= f'(\sqrt{x^2+y^2}) \, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Exercice (suite)

Puis, en utilisant aussi la règle de Leibniz, on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= \frac{\partial f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x}\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + f'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice (suite)

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

On a donc

$$\begin{aligned}
\Delta F(x,y) &= \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Énoncé (suite) –

2) Trouver les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Réponse – En termes de f, l'équation s'écrit

$$f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

et dépend de la seule variable réelle $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$.

Exercice (suite)

- Finalement, on doit résoudre l'équation différentielle du 2ème ordre non homogène et à cœfficients non constants

$$(E) \qquad f''(r) + \frac{1}{r}\, f'(r) = r$$

- Pour cela, on transforme (E) en un système d'équations différentielles du 1er ordre:

$$\begin{cases} f'(r) = g(r) & (E1) \\ g'(r) + \frac{1}{r}\, g(r) = r & (E2) \end{cases}$$

On trouve g avec (E2) puis on reporte dans (E1) et on trouve f.

- Les solutions de (E2) sont de la forme $g = g_0 + g_p$, où g_0 est la solution générale de l'équation homogène associée

$$(E2^*) \qquad g_0'(r) + \frac{1}{r}\, g_0(r) = 0$$

et g_p est une solution particulière de (E2) obtenue par la méthode de la variation de la constante.

Exercice (suite)

- Explicitement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(E2^*) \quad g_0(r) = \lambda\, e^{-\int \frac{1}{r}\, dr} = \lambda\, e^{-\ln r} = \lambda\, e^{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\lambda}{r}$$

- On pose $g_p(r) = \frac{\lambda(r)}{r}$, ce qui donne $g_p'(r) = \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{\lambda(r)}{r^2}$:

$$(E2) \quad g_p'(r) + \frac{1}{r}\, g_p(r) = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'(r)}{r} = r \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(r) = r^2$$

On peut choisir $\lambda(r) = \frac{r^3}{3}$, d'où $\quad g_p(r) = \frac{r^2}{3}$.

- On a donc $\quad g(r) = g_0(r) + g_p(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Enfin, les solutions de (E) sont celles de (E1) :

$$(E1) \quad f'(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad f(r) = \lambda \ln(r) + \frac{r^3}{9} + \mu$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

10. Taylor

Dans cette section:

- Dévéloppement de Taylor
- Approximation et erreur relative

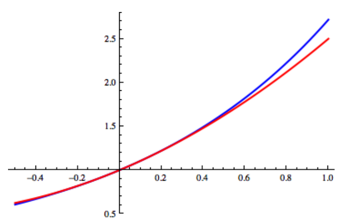
Formule de Taylor

Théorème de Taylor – *Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k autour d'un point $\vec{a}$ peut être approximée en tout point $\vec{x}$ proche de $\vec{a}$ par un polynôme de degré k en $\vec{x} - \vec{a}$, appellé* **polynôme de Taylor**, *dont les cœfficients dépendent uniquement des dérivées de f en $\vec{a}$.*

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ qui contient a, alors pour tout $x \in D$ on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)\,(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big).$$

Par exemple, voici le graphe de $f(x) = e^x$ (en bleu) et son polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 0$, $P(x) = 1 + x + x^2/2$ (en rouge).



Formule de Taylor

Cas particulier – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ qui contient un point (a, b).
Alors, pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2$$
$$+o\big(||(x-a, y-b)||^2\big),$$

où $o(h)$ est une fonction qui tend vers zéro plus vite de $h \to 0$.

Écritures alternatives:

terme à l'ordre 1 $= df_{(a,b)}(x-a, y-b) = J_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$,

terme à l'ordre 2 $= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$.

Exemple

Exemple – Soit $f(x,y) = \dfrac{x-1}{y-1}$ et $(a,b) = (0,0)$.
On a $f(0,0) = 1$, puis

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y-1} & -\dfrac{x-1}{(y-1)^2} \end{pmatrix} \text{ d'o } J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(y-1)^2} \\ -\dfrac{1}{(y-1)^2} & \dfrac{2(x-1)}{(y-1)^3} \end{pmatrix}$$

d'o

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi: $\dfrac{x-1}{y-1} = 1 - x + y - xy + y^2 + o\big(||(x,y)||^2\big)$.

Exercice

Énoncé – *La pression P d'un gaz parfait est fonction de la temperature T et du volume V selon la loi*

$$P(T, V) = nR\,\frac{T}{V},$$

où n est la quantité de matière (moles) et R est la constante universelle d'un gaz parfait.

On voudrait connaitre la pression du gaz qui se trouve à l'état (T, V), mais la mesure de cet état nous donne les valeurs (T_0, V_0) avec une **erreure relative**

$$\left|\frac{T - T_0}{T_0}\right| < 0.005\,\% \qquad \textit{et} \qquad \left|\frac{V - V_0}{V_0}\right| < 0.002\,\%.$$

Quelle est l'erreure relative induite par cette mesure sur la valeur $P(V_0, T_0)$ de la pression?

Exercice (suite)

Réponse – On cherche une borne supérieur pour $\left|\frac{P-P_0}{P_0}\right|$, où $P = P(T, V)$ et $P_0 = P(T_0, V_0)$.

Pour cela, on utilise le dévéloppement de Taylor de $P(T, V)$ à l'ordre 1, autour de (T_0, V_0):

$$\begin{aligned} P - P_0 &\simeq dP_{(T_0,V_0)}(T - T_0, V - V_0) \\ &= \tfrac{\partial P}{\partial T}(T_0, V_0)\ (T - T_0) + \tfrac{\partial P}{\partial V}(T_0, V_0)\ (V - V_0) \\ &= nR\,\tfrac{T - T_0}{V_0} - nR\,\tfrac{T_0(V - V_0)}{V_0^2}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{P - P_0}{P_0} \simeq nR\,\frac{T - T_0}{V_0\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} - nR\,\frac{T_0(V - V_0)}{V_0^2\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} = \frac{T - T_0}{T_0} - \frac{V - V_0}{V_0}$$

d'où suit

$$\left|\frac{P - P_0}{P_0}\right| \leqslant \left|\frac{T - T_0}{T_0}\right| + \left|\frac{V - V_0}{V_0}\right| < 0.005\,\% + 0.002\,\% = 0.007\,\%.$$

11. Extrema locaux

Dans cette section:

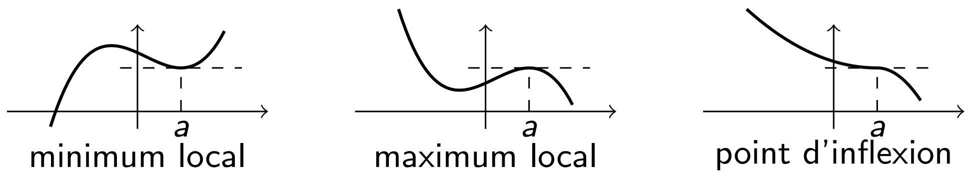
- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Extrema locaux
- Points critiques et critère pour trouver les extrema locaux
- Points cols et points plats

Rappels sur les fonctions d'une variable

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et non constante, la croissance ou décroissance de f en a est décelée par le signe de $f'(a)$ (positif ou négatif).
Que se passe-t-il si $f'(a) = 0$ (*point critique*) ?

Si $f'(a) = 0$, la tangente au graphe de f est horizontale, on est dans l'un des cas suivants:



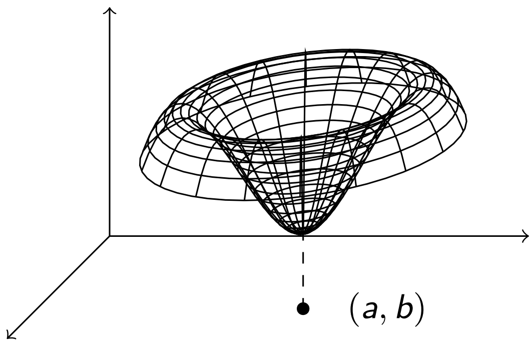
Pour savoir lequel, on regarde la convexité (minimum) ou la concavité (maximum) par le signe de $f''(a)$ (positif ou négatif).
Que se passe-t-il si $f''(a) = 0$ (*point plat*) ?

Si $f''(a) = 0$, on continue à dériver: si la première dérivée non nulle est d'ordre pair, on a un min ou un max local (selon le signe). Si elle est d'ordre impair, on a un point d'inflexion.

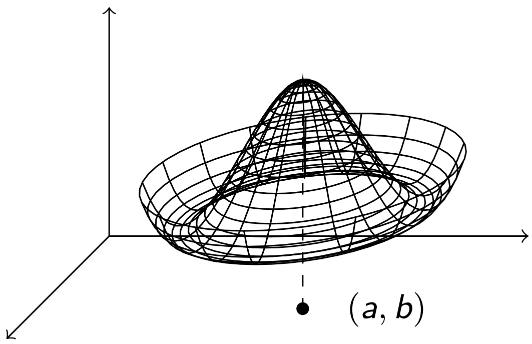
Extrema locaux et points selle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'un point $(a, b) \in D_f$ est un **extremum local** de f s'il est

- soit un **minimum local**: $f(a, b) \leqslant f(x, y)$ pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b),
- soit un **maximum local**: $f(a, b) \geqslant f(x, y)$ pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b).



minimum local



maximum local

Points critiques

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 en (a, b), le signe de ses dérivées en (a, b) permet de trouver les extrema locaux.

Définition – On dit que (a, b) est un **point critique** de f si $\vec{\nabla} f(a, b) = (0, 0)$. Le plan tangent au graphe de f au point $(a, b, f(a, b))$ est alors horizontal.

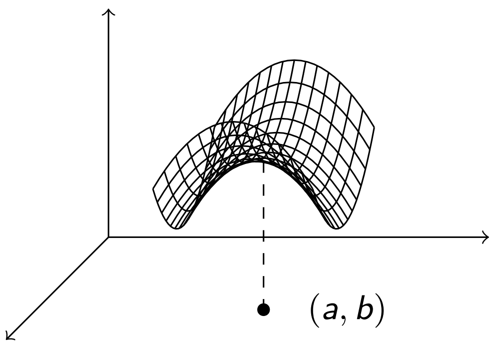
Proposition – *Soit (a, b) un point critique de f.*
Si $\det H_f(a, b) > 0$, *alors (a, b) est un extremum local.*
De plus

- *(a, b) est un minimum local si* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ *ou* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$;
- *(a, b) est un maximum local si* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ *ou* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$.

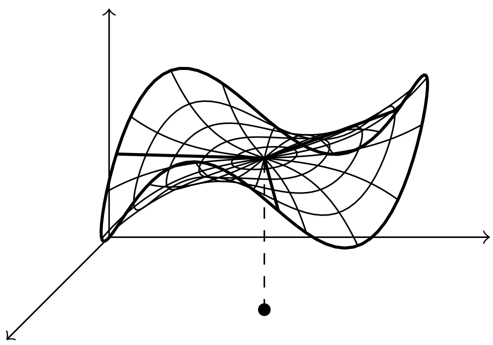
Points selles et points plats

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit (a, b) un point critique de f.

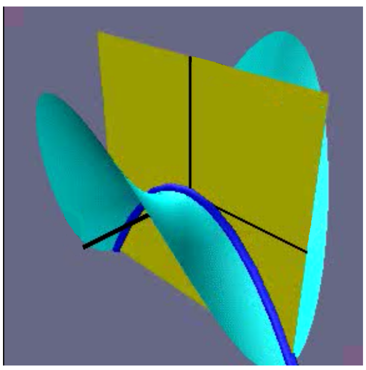
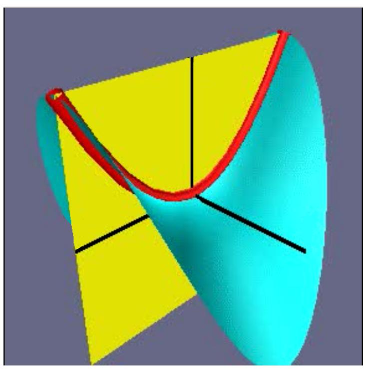
- Si $\det H_f(a, b) < 0$ on dit que (a, b) est un **point col** ou **point selle**
- Si $\det H_f(a, b) = 0$ on dit que (a, b) est un **point plat**.



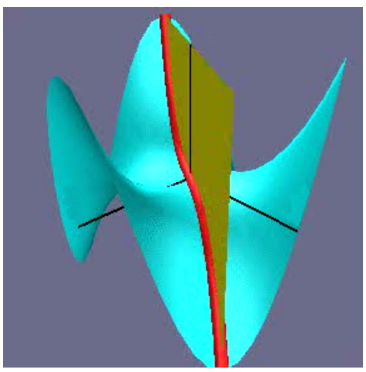
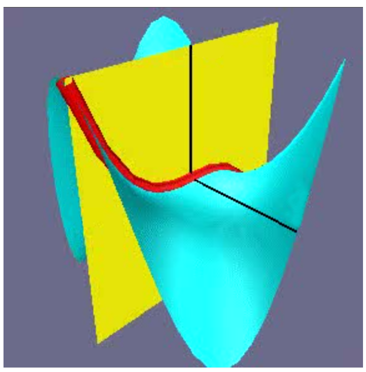
point selle


point plat

Point col et point plat

Un point col : paraboloïde hyperbolique ($z = x^2 - y^2$)

Un exemple de point plat : la selle de singe ($z = x^3 - 3xy^2$)

Exercice

Énoncé – *Déterminer les points critiques des fonctions suivantes et, si possible, leur nature.*

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Réponse – Cherchons d'abord les points critiques:

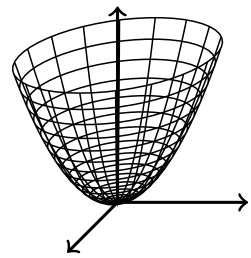
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (0,0)$$

ainsi $(0,0)$ est le seul point critique de f. Cherchons sa nature:

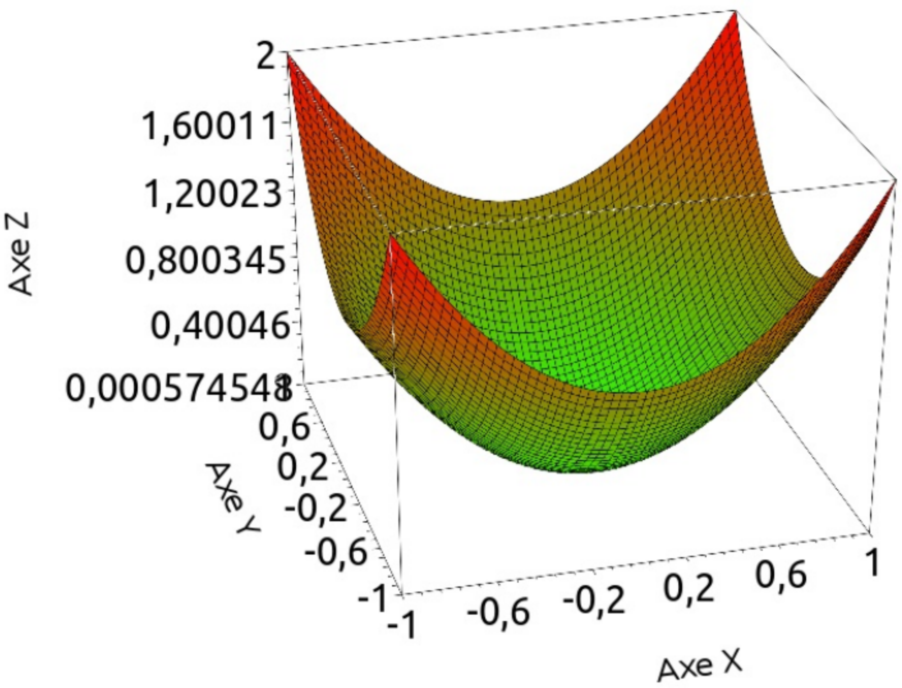
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{array}{l} \det H_f(0,0) = 4 > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \end{array}$$

ainsi $(0,0)$ est un minimum local.

En effet, le graphe de f autour de $(0,0)$ est:



Graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2$



Graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2$

Exercice (suite)

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Réponse – Cherchons d'abord les points critiques:

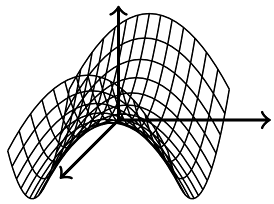
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (0,0)$$

ainsi $(0,0)$ est le seul point critique de f. Cherchons sa nature:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det H_f(0,0) = -4 < 0$$

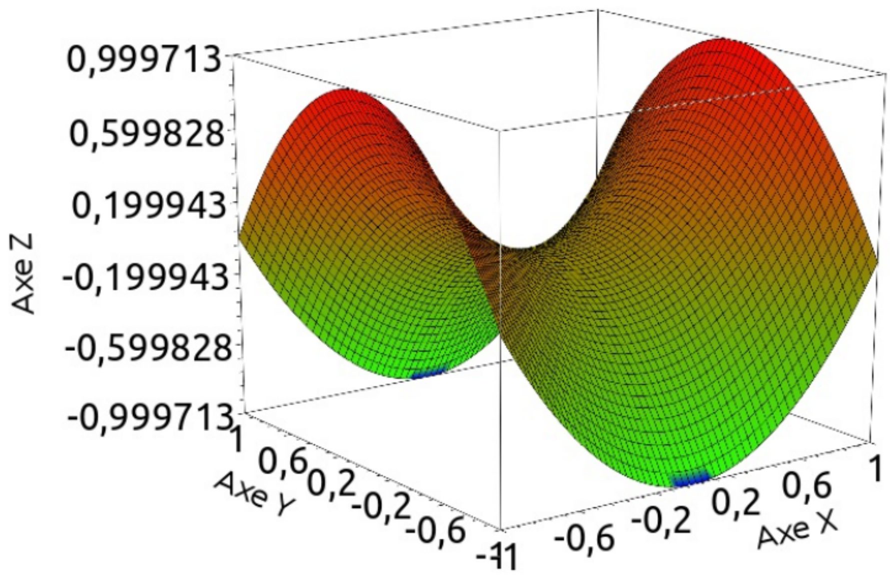
ainsi $(0,0)$ est un point col.

En effet, le graphe de f
autour de $(0,0)$ est:



Graphe de $f(x,y) = x^2 - y^2$

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema



Graphe de $f(x,y) = x^2 - y^2$

Exercice (suite)

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = 4(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$.

Réponse – Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4x(x^2+y^2) \\ 8y - 4y(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} x(2 - x^2 - y^2) = 0 \\ y(2 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \iff \left\langle \begin{array}{l} \text{soit } (x,y) = (0,0) \\ \text{soit } x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Par conséquent, f admet un cercle de points critiques d'équation $x^2 + y^2 = 2$ et un point critique isolé de coordonnées $(0,0)$.

Exercice (suite)

2 Dérivées
Partielles
Directionnelles
Gradient
Différentielle
Jacobienne
Règle de la chaîne
Hessienne
Taylor
Extrema

Cherchons la nature de ces points critiques:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8-12x^2-4y^2 & -8xy \\ -8xy & 8-12y^2-4x^2 \end{pmatrix}$$

- Pour le point $(0,0)$, on a

$$\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 64 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0$$

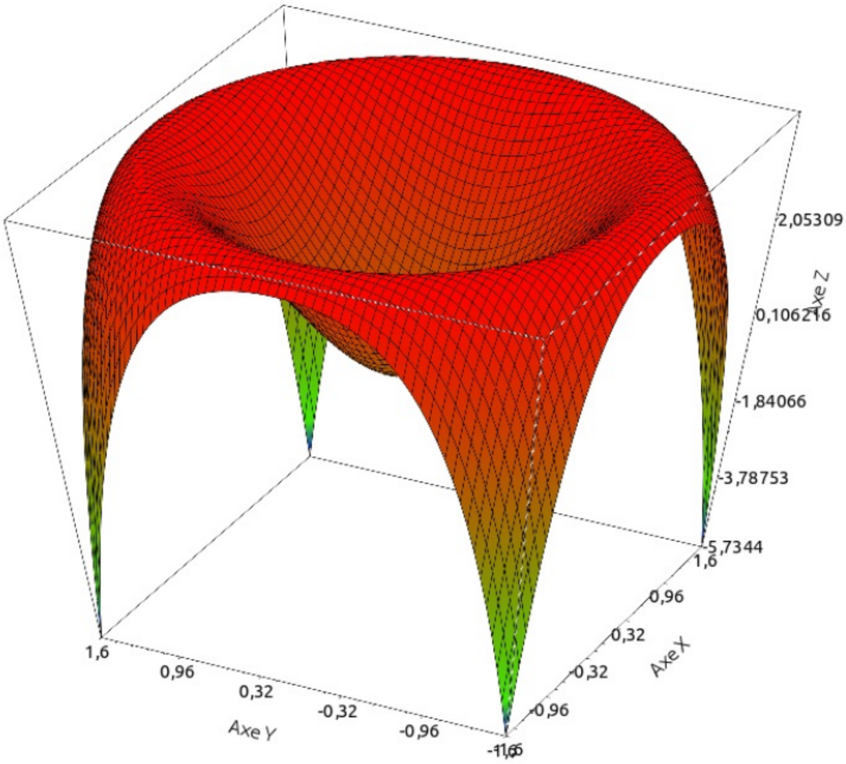
donc $(0,0)$ est un minimum local.

- Pour les points (x,y) tels que $x^2 + y^2 = 2$, on a

$$\det H_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix} = 0$$

donc tous les points du cercle $x^2 + y^2 = 2$ sont plats.

Graphe de $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$



Graphe de $f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$