Math2 – Chapitre 3
Intégrales multiples

1. Intégrales de Riemann (rappels de TMB)
2. Intégrales doubles
3. Intégrales triples
4. Aire, volume, moyenne et centre de masse

1. Intégrales de Riemann (rappels de TMB)

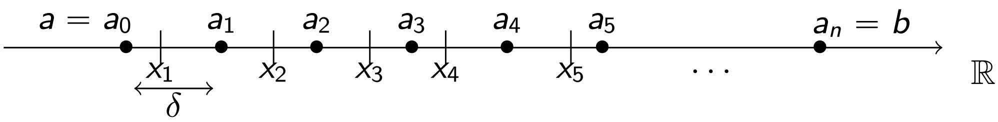
Dans cette section:

- Subdivisions, somme de Riemann et intégrale de Riemann d'une fonction d'une variable
- Aire sous le graphe d'une fonction
- Primitives et techniques d'intégration

Subdivision, somme et intégrale de Riemann

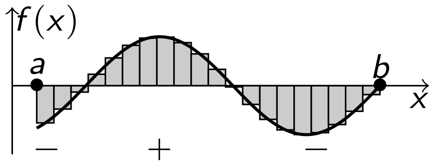
Rappels – Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable:

- **subdivision** de $[a, b]$: $\mathcal{S}_n = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$



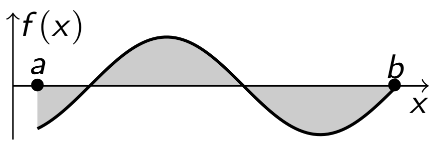
- **somme de Riemann de** f aux points $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$:

$$R_\delta(f; \{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta.$$



- **intégrale de Riemann de** f **sur** $[a, b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{tout } x_i}} R_\delta(f; \{x_i\})}$$



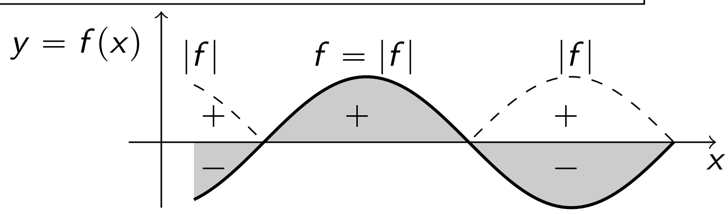
si la limite <u>existe</u>, est <u>finie</u>, et <u>ne dépend pas des x_i</u>.

L'intégrale donne l'aire sous le graphe

3 Intégrales
De Riemann
Doubles
Triples
Aire, volume

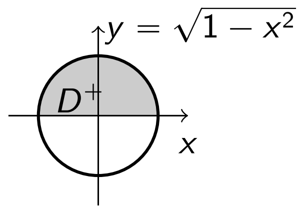
Rappels -

- $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \text{ aire ``algébrique'' sous le graphe de } f}$
- $\boxed{\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{ aire sous le graphe de } f}$ (positive)



Exemple: L'aire du disque

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$



se calcule comme une intégrale:

$$\mathrm{Aire}\,(D) = 2\,\mathrm{Aire}\,(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Primitives et techniques d'intégration

Pour connaitre l'intégral, il suffit de connaitre une primitive:

- Une **primitive de f sur** $[a,b]$ est une fonction F dérivable telle que $F'(x)=f(x)$ pour tout $x\in[a,b]$. On note $F(x)=\int f(x)dx$.
- **Théorème fondamental:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b.$$

- **Intégration par changement de variable:** $x = h(t)$

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(h(t)\big)\;h'(t)\,dt,$$

où h est un <u>difféomorphisme</u> (bijection dérivable avec réciproque h^{-1} dérivable).

- **Intégration par parties:**

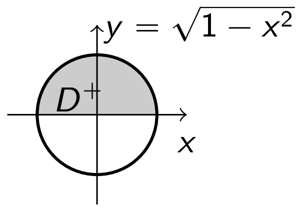
$$\int f(x)\;g'(x)\,dx = f(x)\;g(x) - \int f'(x)\;g(x)\,dx.$$

Problème – Pas d'analogue pour les fonctions de plusieurs variables!

Exemple: aire d'un disque

Aire d'un disque –

$$D = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\big\}$$



$$\mathrm{Aire}\,(D) = 2\mathrm{Aire}\,(D^+) = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\;dx$$

Calcul par changement de variable: $x=\sin t$ pour $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, car $\sqrt{1-x^2}=\cos t$. Alors $dx=\cos t\;dt$ et

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}\,(D) &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\;dt\\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(2t)+1}{2}\;dt\\ &= \Big[\frac{1}{2}\sin(2t)+t\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \big(0+\frac{\pi}{2}-0+\frac{\pi}{2}\big) = \pi.\end{aligned}$$

2. Intégrales doubles

Dans cette section:

- Subdivisions des domaines du plan
- Sommes de Riemann des fonctions de deux variables
- Intégrale double
- Volume sous le graphe d'une fonction
- Théorème de Fubini
- Théorème du changement de variables

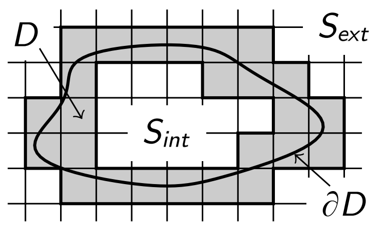
Subdivisions d'un domaine du plan

3 Intégrales
De Riemann
Doubles
Triples
Aire, volume

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné, avec bord ∂D lisse (au moins par morceaux).

Définition – Pour tout $\delta > 0$, on appelle **subdivision de** D l'ensemble $\mathcal{S}_\delta$ des carrés K_i de coté δ du plan qui couvrent D dans n'importe quel grillage de pas δ.
En particulier, on considère deux recouvrements:

- un **à l'extérieur** $\mathcal{S}_\delta^{ext}$,
- un **à l'intérieur** $\mathcal{S}_\delta^{int}$.



Puisque D est borné, les subdivisions contiennent un nombre fini de carrés, et on a $\mathcal{S}_\delta^{int} \subset \mathcal{S}_\delta^{ext}$.

Les carrés dans $\mathcal{S}_\delta^{ext} \backslash \mathcal{S}_\delta^{int}$ couvrent exactement le bord ∂D.

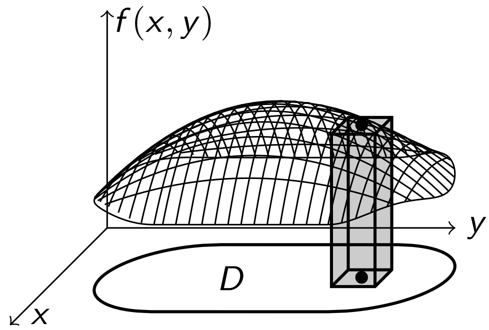
Sommes de Riemann d'une fonction de deux variables

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Définition – Pour tout choix de points $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$, on appelle **sommes de Riemann de** f associées aux subdivisions $\mathcal{S}_\delta^{ext/int}$ et aux points $\{(x_i, y_i)\}$ les sommes

$$R_\delta^{ext/int}(f, \{(x_i, y_i)\}) = \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta^{ext/int}} f(x_i, y_i)\ \delta^2,$$

où chaque terme $f(x_i, y_i)\ \delta^2$ représente le **volume algébrique** ($= \pm$ volume) du parallélepipède de base K_i et hauteur $f(x_i, y_i)$.



Intégrale double

Théorème – *Si les limites* $\lim_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\})$ *existent et elles sont indépendantes du choix des points* $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$*, alors elles coincident.*

Définition – Dans ce cas:
- on appelle **intégrale double de** f **sur** D cette limite:

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \lim_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\}).$$

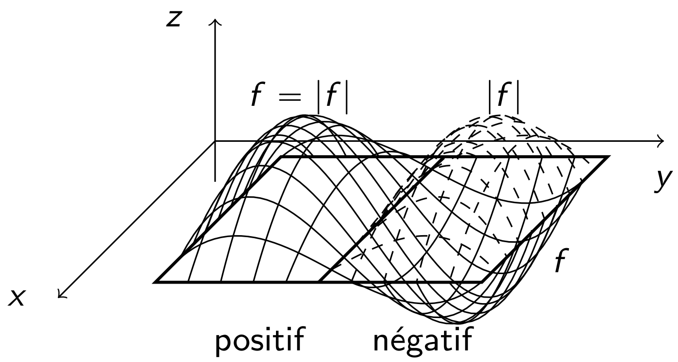
- on dit que f **est intégrable sur** D **selon Riemann** si l'intégrale $\iint_D f(x,y)\ dx\ dy$ est finie ($=$ nombre, pas $\pm\infty$).

Proposition – *Toute fonction f <u>continue</u> est intégrable selon Riemann sur un ensemble D <u>borné</u> à <u>bord lisse</u> (par morceaux).*

Signification géométrique de l'intégrale double

Corollaire –

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy =$ *volume "algébrique" sous le graphe de f.*
- $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy =$ *volume sous le graphe de f.*



Exemple 1: volume d'une boule

3 Intégrales
De Riemann
Doubles
Triples
Aire, volume

Volume d'une boule – Le volume de la boule

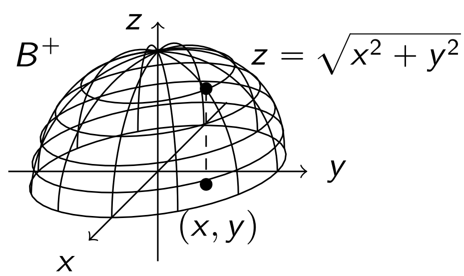
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

est deux fois le volume de la demi-boule

$$B^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\},$$

qui se trouve sous le graphe de la fonction

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$



On a alors

$$\mathrm{Vol}(B) = 2 \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ dx\,dy$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est le disque unitaire.

Propriétés des intégrales doubles

Propriétés – 1) *Pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)\, dx\, dy = \lambda \iint_D f\, dx\, dy + \mu \iint_D g\, dx\, dy.$$

2) *Si* $D = D_1 \cup D_2$ *et* $D_1 \cap D_2 =$ *courbe ou point ou* $\varnothing$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy.$$

3) $$\left| \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

4) *Si* $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in D$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leqslant \iint_D g(x,y)\, dx\, dy.$$

Théorème de Fubini sur un rectangle

Théorème de Fubini sur un rectangle – *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $D = [a,b] \times [c,d]$ *un rectangle. Alors on a*

$$\boxed{\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\, dx\, dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy \end{aligned}}$$

Notation – $\displaystyle \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$

Corollaire – $\displaystyle \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy$

Exemple 2: calcul d'intégrales doubles

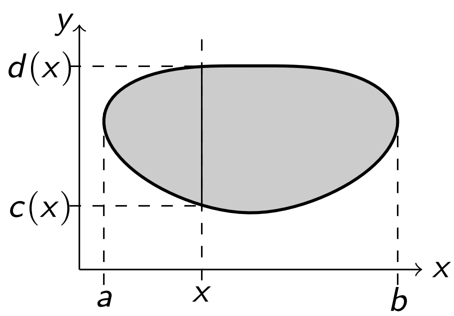
Exemples –

- $$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$
- $$\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2y-1)\,dy = \int_{-1}^1 dx \left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1}$$
$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}$$

Théorème de Fubini

Lemme – *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné quelconque.*

- *Pour tout $(x,y) \in D$ il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$.*
- *Pour tout $x \in [a,b]$ il existe $c(x), d(x) \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$.*



Au final:

$$D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [c(x), d(x)]\,\}$$

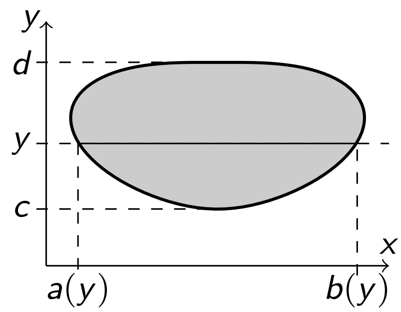
Théorème de Fubini sur D – *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors*

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\right)\,dx}$$

Théorème de Fubini (suite)

Alternative –

L'ensemble D est décrit par



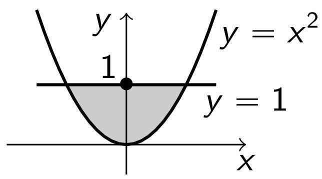
$$D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ x \in [a(y), b(y)] \,\}$$

Théorème de Fubini sur D –

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy}$$

Exemple 3: calcul d'intégrale double

Exemple – Soit D la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut.



On peut décrire D comme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in [x^2,1]\}.$$

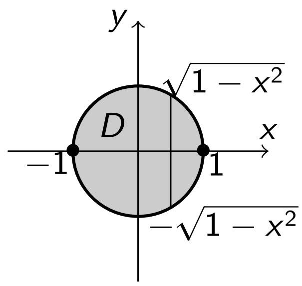
Par conséquent:

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 y\ dx\ dy &= \int_{-1}^1 x^2\ dx \int_{x^2}^1 y\ dy \\
&= \int_{-1}^1 x^2 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^1 dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(x^2 - x^4)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Exemple 4: volume de la boule

Exemple – Rappelons que le volume de la boule unitaire est

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$



où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$.

On peut décrire D comme l'ensemble

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2} \right] \right\}.$$

- Voici donc le calcul du volume de la boule:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy \\ &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy. \end{aligned}$$

- On pose $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$ pour avoir $\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = |\cos t|$.

Exemple 4: volume de la boule (suite)

- $y = \sqrt{1-x^2}\sin t \qquad dy = \sqrt{1-x^2}\cos t\,dt$
- $-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad -1 \leqslant \sin t \leqslant 1$

  $\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad$ et $\qquad \sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = \cos t$

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy \\ &= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-x^2}\cos t\,\sqrt{1-x^2}\cos t\,dt \\ &= 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \end{aligned}$$

- puisque $2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \pi$ (voir ex. précédent)

$$\mathrm{Vol}\,(B) = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \pi\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

Changement de variables

Définition – Un **changement de variables**

$$(x,y) = h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

est un <u>difféomorphisme</u> $h : \tilde{D} \to D : (u,v) \mapsto h(u,v) = (x,y)$, c'est-à-dire une bijection de classe C^1 avec réciproque $h^{-1} : D \to \tilde{D} : \ (x,y) \mapsto h^{-1}(x,y) = (u,v)$ de classe C^1.

Théorème – *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction des variables (x,y) et $(x,y) = h(u,v)$ un changement de variables. Alors*

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v)\,\Big|\det J_h(u,v)\Big|\,du\,dv}$$

où $\tilde{f}(u,v) = f(h(u,v))$, $\quad \tilde{D} = \big\{(u,v) \mid h(u,v) \in D\big\}$
et $\det J_h(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ *est le Jacobien de h.*

Passage en polaire – $\boxed{dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi}$

Exemple 5: volume d'une boule en polaires

Volume de la boule en coordonnées polaires – On calcul

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_{D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

en coordonnées polaires $\quad (x,y) = h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

- Puisque $x^2+y^2=\rho^2$, on a :

$$\tilde{D} = \big\{(\rho,\varphi) \in \,]0,\infty[\times[0,2\pi[\ \big|\ \rho \leqslant 1\big\} = \,]0,1]\times[0,2\pi[$$

- on utilise $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$, $\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\rho^2}$ et Fubini:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\,d\rho$$

- enfin, on pose $\quad t = 1-\rho^2 \quad$ donc $\quad dt = -2\rho\,d\rho$:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = -\frac{4\pi}{2}\int_1^0 t^{1/2}\,dt = 2\pi\int_0^1 t^{1/2}\,dt = 2\pi\frac{2}{3}\Big[t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

3. Intégrales triples

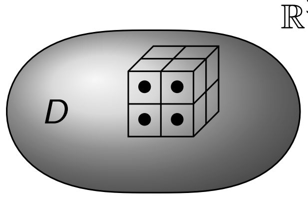
Dans cette section:

- Subdivisions des solides
- Sommes de Riemann des fonctions de trois variables
- Intégrales triples
- Théorème de Fubini
- Théorème du changement de variables

Intégrale triple

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble borné avec bord $\partial\Omega$ lisse (par morceaux), et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de trois variables.

Définition –
• On choisit une **subdivision** $\mathcal{S}_\delta$ de Ω en petits cubes K_i de taille δ^3, avec δ qui tend vers zéro.



• On définit l'**intégrale triple de** f **sur** Ω comme la limite (quand elle existe) de la **somme de Riemann** associée à $\mathcal{S}_\delta$ et à des points $(x_i, y_i, z_i) \in K_i \cap \Omega$ quelconque:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\delta\to 0} \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta} f(x_i,y_i,z_i)\,\delta^3.$$

• On dit que f est **intégrable** si son intégrale est finie.

Proposition – *Toute fonction f continue est intégrable selon Riemann sur un ensemble Ω borné à bord lisse (par morceaux).*

Signification géométrique et propriétés

Signification géométrique – *Le graphe de f est une* *hyper-surface de* $\mathbb{R}^4$ (difficile à dessiner):

- $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$ *quadri-volume "algébrique" sous le graphe de f.*
- $\displaystyle\iiint_\Omega |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz =$ *quadri-volume sous le graphe de f.*

Propriétés – 1) *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\iiint_\Omega (\lambda f + \mu g)\,dx\,dy\,dz = \lambda \iiint_\Omega f\,dx\,dy\,dz + \mu \iiint_\Omega g\,dx\,dy\,dz.$$

2) *Si $\Omega_1 \cap \Omega_2 =$ surface ou courbe ou point ou $\emptyset$, alors*

$$\iiint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_1} f\,dx\,dy\,dz + \iiint_{\Omega_2} f\,dx\,dy\,dz.$$

etc

Théorème de Fubini

3 Intégrales
De Riemann
Doubles
Triples
Aire, volume

Théorème de Fubini – *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.*

- *Si Ω est un parallélépipède, alors*

$$\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$$

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g dz\ f(x,y,z)}$$

(on intègre dans l'ordre qu'on veut)

- *Si Ω est un ensemble borné quelconque, alors:*

$$\Omega = \big\{(x,y,z) \big| x \in [a,b],\ y \in [c(x), d(x)],\ z \in [e(x,y), g(x,y)]\big\}$$

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\ f(x,y,z)}$$

(l'ordre d'intégration est forcé)

Exemple 1: calcul d'intégrales triples

Exemple – $\Omega = [0,1]\times[1,2]\times[2,3] \subset \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (x^2 - 2yz)\, dx\, dy\, dz \quad &= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \int_0^1 dx\ (x^2 - 2yz) \\
&= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left[\frac{1}{3}x^3 - 2xyz \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left(\frac{1}{3} - 2yz \right) \quad = \int_2^3 \left[\frac{1}{3}y - y^2 z \right]_{y=1}^{y=2} dz \\
&= \int_2^3 \left(\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z \right) dz \quad = \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z \right) dz \\
&= \left[\frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2 \right]_2^3 \quad = \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{15}{2} \quad = -\frac{43}{6}
\end{aligned}$$

Exemple 2: calcul d'intégrales triples

Exemple – On veut calculer $\displaystyle\iiint_\Omega (1 - 2yz)\, dx\, dy\, dz$

où Ω est le cylindre plein de hauteur 3 et de base le disque

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0 \right\}.$$

- D'abord, on décrit explicitement Ω :

$$\begin{aligned}
\Omega \quad &= \left\{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 3 \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \mid x \in [-1,1],\ y \in \left[-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}\right],\ z \in [0,3] \right\}
\end{aligned}$$

- Ensuite on applique Fubini:

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega (1 - 2yz)\, dx\, dy\, dz \quad &= \int_0^3 dz \iint_D (1 - 2yz)\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\ (1 - 2yz)
\end{aligned}$$

Exemples 2 (suite)

Exemple (suite) –

$$\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\,dy$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big[y - y^2 z\Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 \Big(\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)z\Big)\,dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\;dt$$

$$= 3\pi$$

Changement de variables

Définition – Un **changement de variables**

$$\vec{x} = (x,y,z) = h(u,v,w) = \big(x(\vec{u}), y(\vec{u}), z(\vec{u})\big)$$

est un <u>difféomorphisme</u> $h : \tilde{\Omega} \to \Omega : \vec{u} \mapsto h(\vec{u}) = \vec{x}$ (bijection C^1 avec réciproque $h^{-1}(\vec{x}) = \vec{u}$ aussi C^1).

Théorème – *Soit* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *une fonction de* $\vec{x}$ *et* $\vec{x} = h(\vec{u})$ *un changement de variables. Alors*

$$\boxed{\iint_D f(\vec{x})\,dx\,dy\,dz = \iint_{\tilde{\Omega}} f\big(h(\vec{u})\big)\,\Big|\det J_h(\vec{u})\Big|\,du\,dv\,dw}$$

où $\tilde{\Omega} = \big\{\vec{u} \mid h(\vec{u}) \in \Omega\big\}$ *et* $\det J_h(\vec{u})$ *est le Jacobien de* h.

Passage en coordonnées cylindriques et sphériques –

$$\boxed{dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = r^2\,\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta}$$

Exemple 3: intégrale par changement de variables

Exemple – Considérons à nouveau $\displaystyle\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz$

où Ω est le cylindre de hauteur 3 et de base le disque D.

- En coordonnées cylindriques, on a

$$\Omega = \Big\{\,(\rho,\varphi,z) \mid \rho \in \,]0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ \ z \in [0,3]\,\Big\}$$

- Puisque $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$, on a

$$\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho \ \int_0^{2\pi} (1-2\rho\sin\varphi z)\ d\varphi$$

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho\ \Big[\varphi + 2\rho\cos\varphi z\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}$$

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 \Big(2\pi + 2\rho z - 2\rho z\Big)\ \rho\,d\rho$$

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\ \rho\,d\rho \quad = 3\ \pi\ \Big[\rho^2\Big]_0^1 \quad = 3\pi$$

4. Aire, volume, moyenne, centre de masse

Dans cette section:

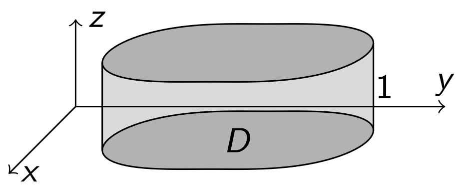
- Aire d'un domaine du plan
- Volume d'un solide
- Quantités totale et moyenne
- Centre de masse et moment d'inértie

Motivation pour la définition générale d'aire

Remarque – Si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, l'intégrale

$$\iint_D dx\ dy$$

représente le volume sous le graphe de la fonction $f(x,y) = 1$.



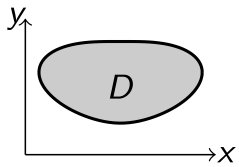
Ce solide Ω est un cylindre de hauteur $H = 1$ et de base D:

$$\iint_D dx\ dy = \mathrm{Vol}(\Omega) = \mathrm{Aire}(D) \times H = \mathrm{Aire}(D).$$

Aire d'un domaine du plan

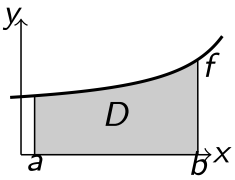
Définition – L'**aire** d'un domaine D borné de $\mathbb{R}^2$ est

$$\boxed{\mathrm{Aire}(D) = \iint_D dx\, dy}$$



Proposition – *Si D est la portion du plan sous le graphe d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ positive, c'est-à-dire si*

$$D = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\},$$



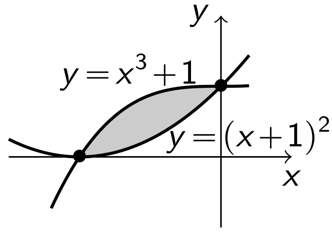
alors: $$\boxed{\mathrm{Aire}(D) = \int_a^b f(x)\, dx}$$

• En effet: $$\iint_D dx\, dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Exercice: aire d'un domaine du plan

Énoncé – Calculer l'aire du domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.

Réponse – D'abord on dessine D et on trouve les deux points d'intersection des courbes: $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.
On a donc



$$D = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ x^2 + 2x + 1 \leqslant y \leqslant x^3 + 1 \Big\}.$$

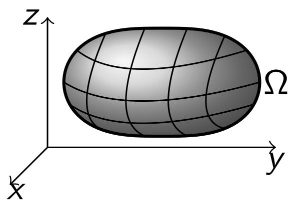
Ensuite on applique Fubini:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}\,(D) &= \iint_D dx\,dy = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy \\ &= \int_{-1}^{0} \big(x^3+1-x^2-2x-1\big)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

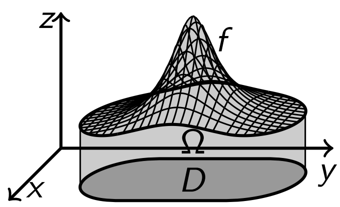
Volume d'un solide

Définition – Le **volume** d'un solide Ω borné de $\mathbb{R}^3$ est

$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz}$$



Proposition – *Si Ω est l'espace sous le graphe d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire si*



$$\Omega = \big\{ (x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z \in [0, f(x,y)] \big\},$$

alors: $$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

- Car $$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Exemple 1: volume d'une boule en sphériques

Volume de la boule en coordonnées sphériques – En coordonnées sphériques, la boule unité B s'écrit

$$B = \big\{ (r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ \theta \in [0,\pi] \big\}.$$

Puisque $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(B) &= \iiint_B dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi[\times[0,\pi]} r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^1 r^2\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\, 2\pi \Big[-\cos\theta \Big]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}\,(1+1) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Quantités totale et moyenne

Définition – En physique, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ représente une *concentration* de matière (une *densité volumique*), ou une *densité* de courant ou d'énergie, alors on appelle

- **quantité totale** de matière / courant / énergie en Ω le nombre

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

- **quantité moyenne** de matière / courant / énergie en Ω le nombre

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\,(\Omega)} \iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$$

Exemple 2: moyenne

Exemple – Un matériau est réparti dans un cube $\Omega = [0, R]^3$ selon la densité volumique $f(x, y, z) = \frac{x+y}{(z+1)^2}$.

- La quantité totale du matériau est alors

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^R dx \int_0^R (x+y)\, dy \int_0^R \frac{1}{(z+1)^2} dz$$
$$= \int_0^R \Big[xy + \frac{1}{2}y^2 \Big]_{y=0}^{y=R} dx \, \Big[-\frac{1}{z+1} \Big]_0^R$$
$$= \int_0^R \Big(Rx + \frac{1}{2}R^2 \Big) dx \, \Big(1 - \frac{1}{R+1} \Big)$$
$$= \Big[\frac{1}{2}Rx^2 + \frac{1}{2}R^2 x \Big]_0^R \frac{R}{R+1} = \frac{R^4}{R+1}.$$

- Puisque $\mathrm{Vol}(\Omega) = R^3$, la quantité moyenne est

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{R^3} \frac{R^4}{R+1} = \frac{R}{R+1}.$$

Barycentre

Définition – Si $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ denote la *densité de masse* d'un matiériau contenu dans Ω, on appelle

- **masse totale** le nombre $M = \iiint_D \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

- **centre de masse** (ou **centre d'inertie**, ou **barycentre**) le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_D x\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_D y\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$
$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_D z\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Moment d'inertie

Définition (suite) – Si $r(x,y,z)$ est la distance d'un point (x,y,z) à un point fixé P ou à une droite Δ:

- le **moment d'inertie** par rapport à P ou à Δ est le nombre

$$\frac{1}{M}\iiint_{\Omega} r^2(x,y,z)\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Nota – Un matériau est dit **homogène** si sa densité de masse μ est constante. Dans ce cas, sa masse dedans Ω est donnée par l'intégrale

$$M = \mu \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \mu\,\mathrm{Vol}\,(\Omega),$$

et les formules du centre de masse et du moment d'inértie se modifient en conséquence.

Exemple 3: centre de masse

Exemple – On cherche à déterminer le centre de masse du demi-cylindre homogène ($\mu = 1$)

$$\Omega = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2,\ z\in[0,H],\ y\geqslant 0\big\}.$$

- Il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le demi-cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \big\{(\rho,\varphi,z) \mid \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,\pi],\ z\in[0,H]\big\}.$$

- Le calcul de la masse totale donne

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz &&= \iiint_{\tilde{\Omega}} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \\ &= \int_0^R \rho\,d\rho \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^H dz &&= \frac{\pi R^2 H}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 3 (suite)

- Le centre de masse G a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz \\ &= \frac{1}{M}\iiint_{\tilde\Omega} (\rho\cos\varphi)\ \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho \int_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi \int_0^H dz = 0 \\ y_G &= \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} y\,dx\,dy\,dz \\ &= \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho \int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi \int_0^H dz = \frac{2}{\pi R^2 H}\,\frac{R^3}{3}\,2\,H = \frac{4R}{3\pi} \\ z_G &= \frac{1}{M}\iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz \\ &= \frac{1}{M}\int_0^R \rho\,d\rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^H z\,dz = \frac{2}{\pi R^2 H}\,\frac{R^2}{2}\,\pi\,\frac{H^2}{2} = \frac{H}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $G = \left(0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2}\right)$.

Exercice 1: quantité totale et moyenne

3 Intégrales
De Riemann
Doubles
Triples
Aire, volume

Énoncé – *De la farine s'éparpille au sol selon la densité*

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2}, \quad \text{où } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Trouver la quantité totale et moyenne de farine éparpillée sur un disque D de rayon $R>0$ centré en l'origine.

Réponse – En coord. polaires, on a $f(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{(\rho+1)^2}$ et $D = \big\{ (\rho,\varphi) \mid \rho\in[0,R],\ \varphi\in[0,2\pi[\big\}$. Ainsi:

$$\begin{aligned} \text{Quantité totale} &= \iint_D \frac{1}{(\rho+1)^2}\ \rho\,d\rho\,d\varphi \\ &= \int_0^R \left(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2}\right) d\rho \\ &= 2\pi\Big[\ \ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1}\Big]_0^R = 2\pi\left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1}\right). \end{aligned}$$

Exercice 1 (suite)

Au final:

$$\text{Quantité totale} = 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right).$$

Puisque

$$\mathrm{Aire}\,(D) = \iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}\, 2\pi = \pi R^2,$$

on a

$$\begin{aligned} \text{Quantité moyenne} \quad &= \frac{1}{\mathrm{Aire}\,(D)} \iint\limits_D \frac{1}{(\rho+1)^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi \\ &= \frac{2}{R^2} \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right). \end{aligned}$$

Exercice 2: centre de masse

3 Intégrales
De Riemann
Doubles
Triples
Aire, volume

Exercice – *Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B et du cylindre C suivants:*

$$\begin{aligned} B &= \Big\{ (r,\varphi,\theta) \mid r \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in [\pi/2,\pi] \Big\} \\ C &= \Big\{ (\rho,\varphi,z) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi],\ z \in [0,R] \Big\}, \end{aligned}$$

et avec la densité de masse $\mu(x,y,z) = z^2$.

Réponse – Puisque $\Omega = B \cup C$, et $B \cap C =$ courbe, le centre de masse G a coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_\Omega x\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \quad (\text{idem pour } y_G \text{ et } z_G),$$

où $\quad M_\Omega = M_B + M_C \quad$ et $\quad \iiint\limits_\Omega = \iiint\limits_B + \iiint\limits_C .$

• Les intégrales se calculent:
en coordonnées sphériques sur B, où $\mu(r,\varphi,\theta) = r^2 \cos^2\theta$,
en coordonnées cylindriques sur C, où $\mu(\rho,\varphi,z) = z^2$.

Exercice 2 (suite)

- Calcul de la masse de Ω:

$$\begin{aligned}
M_B &= \iiint_B r^2 \cos^2\theta \; r^2 \sin\theta \; dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^R r^4\, dr \; \int_0^{2\pi} d\varphi \; \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{R^5}{5} 2\pi \Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \Big]_{\pi/2}^{\pi} \quad = \frac{2\pi R^5}{15} \\
M_C &= \iiint_C z^2\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\
&= \int_0^R \rho\, d\rho \; \int_0^{2\pi} d\varphi \; \int_0^R z^2\, dz \quad = \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, \frac{R^3}{3} \quad = \frac{\pi R^5}{3}
\end{aligned}$$

Au final: $\quad M_\Omega = M_B + M_C = \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{3} \right) \pi R^5 = \frac{7\pi R^5}{15}.$

Exercice 2 (suite)

3 Intégrales
De Riemann
Doubles
Triples
Aire, volume

- Puisque $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$, on a:

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\, dr \; \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \; \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\, d\rho \; \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \; \int_0^R z^2\, dz \quad = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega y\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\, dr \; \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \; \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2\, d\rho \; \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi \; \int_0^R z^2\, dz \quad = 0
\end{aligned}$$

Exercice 2 (suite)

Enfin:

$$\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega z\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\theta \sin\theta\,d\theta \\
&\quad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R z^3\,dz \\
&= \frac{15}{7\pi R^3} \left(\frac{R^6}{6}\, 2\pi \left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, \frac{R^4}{4} \right) \\
&= \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{15R^3}{7}\, \frac{2}{12} \\
&= \frac{5R^3}{14}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (suite)

- En conclusion, le barycentre G de Ω a pour coordonnées

$$G = (0, 0, 5R^3/14)$$

Puisque $5R^3/14 > 0$, il se trouve dans la partie cylindrique.

- Le barycentre se trouve à l'intérieur de Ω si

$$5R^3/14 \leqslant R$$

c'est-à-dire si $R \leqslant \sqrt{14/5}$.