UCBL – L1 PCSI – UE Math 2

Fonctions de plusieures variables et champs de vecteurs

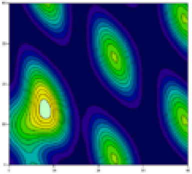
Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard Lyon 1

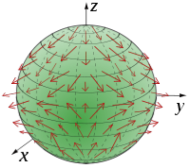
http://math.univ-lyon1.fr/∼frabetti/Math2/

But du cours:

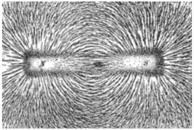
Champs scalaires
(lignes de niveau)



Champs de vecteurs
(ici, sur la sphère)



Lignes de champ
(dipole magnétique)



et aussi potentiels, circulation, flux...

Programme et plan des cours

Partie I : Fonctions de plusieures variables

CM 1 – Coordonnées, ensembles compacts

CM 2 – Fonctions, graphes, opérations

CM 3 – Dérivées partielles, gradient, différentielle

CM 4 – Jacobienne, règle de la chaîne

CM 5 – Dérivées secondes, Hessienne, Laplacien, Taylor, extrema

CM 6 – Intégrales simples et doubles

CM 7 – Intégrales triples. Aire, volume, centre de masse

Partie II : Champs de vecteurs

CM 8 – Champs scalaires et champs de vecteurs

CM 9 – Champs conservatifs

CM 10 – Champs incompressibles

CM 11 – Courbes et circulation

CM 12 – Surfaces et flux

Prérequis

1. **Espaces vectoriels et vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$**
   (produits scalaire, vectoriel et mixte).
2. **Applications linéaires et matrices**
   (produit, détérminant, matrice inverse).
3. **Géométrie cartesienne du plan et de l'espace**
   (droites, coniques, plans, quadriques).
4. **Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable**
   (graphes, dérivées, points critiques, extrema, Taylor, primitives).
5. **Équations différentielles du 1er ordre**.

Math2 – Chapitre 1
Fonctions de plusieures variables

Dans ce chapitre:

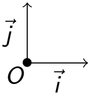
1. Coordonnées cartesiennes, polaires, cylindriques et sphériques
2. Ensembles ouverts, fermés, bornés et compacts
3. Fonctions de deux ou trois variables
4. Graphes et lignes de niveau
5. Opérations, composition et changements de coordonnées

1. Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques

Dans cette section:

- Coordonnées cartesiennes et polaires du plan
- Coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques de l'espace

Coordonnées cartesiennes du plan

On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère 

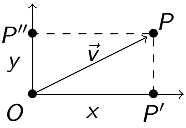
du plan.

Définition – Soit P un point du plan.

• Le **coordonnées cartesiennes** de P sont le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Autrement dit,

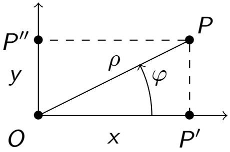
$$x = \|\overrightarrow{OP'}\| \quad \text{et} \quad y = \|\overrightarrow{OP''}\|$$



sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Coordonnées polaires

- Les **coordonnées polaires** de $P \neq O$ sont le couple $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ tel que $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$



On a donc

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi \ \text{ t. q. } \tan \varphi = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ ou } \cot \varphi = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \\ \quad \left(\text{par ex.} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{si } x, y > 0\right) \end{cases}$$

Exercice: coord. polaires $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants du plan, dont on connait les coordonnés polaires, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$A \left\{ \begin{array}{l} \rho = 3 \\ \varphi = 5\pi/4 \end{array} \right. \qquad B \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \end{array} \right. \qquad C \left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \\ \varphi = 3\pi/2 \end{array} \right.$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartésiennes avec les formules:

- $A \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3\cos(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 3\sin(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \qquad A\,(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$

- $B \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\cos(3\pi/4) = \frac{-\sqrt{2}^2}{2} \\ y = \sqrt{2}\sin(3\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}^2}{2} \end{array} \right. \qquad B\,(-1, 1)$

- $C \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0\ \cos(3\pi/2) = 0 \\ y = 0\ \sin(3\pi/2) = 0 \end{array} \right. \qquad C\,(0, 0)$

Exercice: coord. cartesiennes $\longrightarrow$ polaires

Énoncé – *Pour les points suivants du plan en coordonnés cartesiennes, trouver les coordonnées polaires :*

$$A\,(2,3) \qquad B\,(2,0) \qquad C\,(0,3)$$

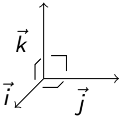
Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartesiennes avec les formules:

- A $\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ \cos\varphi = 2/\sqrt{13} \\ \sin\varphi = 3/\sqrt{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{13} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases}$

- B $\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{4+0} = 2 \\ \cos\varphi = 2/2 = 1 \\ \sin\varphi = 0/2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 2 \\ \varphi = \arctan 0 = 0 \end{cases}$

- C $\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{0+9} = 3 \\ \cos\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\varphi = \frac{3}{3} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$

Coordonnées cartesiennes de l'espace

On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère 

de l'espace.

Définition – Soit P un point de l'espace.

• Les **coordonnées cartesiennes** de P sont le triplet

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad \vec{v} = \overrightarrow{OP} \;=\; x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \;\equiv\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Autrement dit,

$$x = \|\overrightarrow{OP'}\|, \quad y = \|\overrightarrow{OP''}\| \quad \text{et} \quad z = \|\overrightarrow{OP'''}\|$$

sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

Coordonnées cylindriques

• Les **coordonnées cylindriques** de $P \neq O$ sont le triplet $(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi = \dfrac{y}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ z = z \end{cases}$$

Coordonnées sphériques

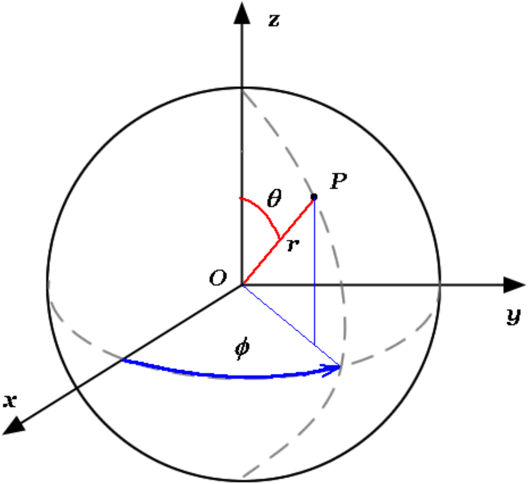
• Les **coordonnées sphériques** de $P \neq O$ sont le triplet $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times]0, \pi[$ tel que

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi \sin\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\begin{cases} r = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ \theta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

Coordonnées de l'espace



Exercice: coord. cylindriques $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants, dont on connait les coordonnés cylindriques, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$A \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/3 \\ z = 2 \end{cases} \qquad B \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/4 \\ z = -3 \end{cases}$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartesiennes avec les formules:

- $A \quad \begin{cases} x = 3\cos(\pi/3) = \frac{3}{2} \\ y = 3\sin(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 \end{cases} \qquad A\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\right)$

- $B \quad \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ y = \sqrt{2}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ z = -3 \end{cases} \qquad B\,(1, 1, -3)$

Exercice: coord. sphériques $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants, dont on connait les coordonnées sphériques, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$C \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \pi/2 \\ \theta = 3\pi/4 \end{cases} \qquad D \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \pi/3 \\ \theta = \pi/6 \end{cases}$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on applique les formules:

- $C \quad \begin{cases} x = \sqrt{2}\ \cos(\pi/2)\ \sin(\pi/4) = 0 \\ y = \sqrt{2}\ \sin(\pi/2)\ \sin(\pi/4) = 1 \\ z = \sqrt{2}\ \cos(3\pi/4) = -1 \end{cases} \qquad C\,(0, 1, -1)$

- $D \quad \begin{cases} x = \cos(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{1}{4} \\ y = \sin(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ z = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad D\,(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Exo: cartesiennes → cylindriques et sphériques

Énoncé – *Pour les points suivants en coordonnées cartesiennes, trouver les coordonnées cylindriques et sphériques:*

$$A = (-1, 1, 1) \qquad B\,(3, 0, 0) \qquad C\,(0, 1, 1)$$

Réponse –

- A $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \tan\varphi = -1 \\ r = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \\ z = 1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{3} \\ \varphi = 3\pi/4 \\ \theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$

- B $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{9+0} = 3 \\ \tan\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ r = \sqrt{9+0+0} = 3 \\ \cos\theta = \frac{0}{3} = 0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \rho = 3 \\ \varphi = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} r = 3 \\ \varphi = 0 \\ \theta = \pi/2 \end{array}\right.$

- C $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{0+1} = 1 \\ \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = 1 \\ r = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \rho = 1 \\ \varphi = \pi/2 \\ z = 1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/2 \\ \theta = \pi/4 \end{array}\right.$

Notations des points

Conclusion –

- Un point géométrique du plan ou de l'espace est noté P.

- Un point en coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est noté $\vec{x}$.

Cela signifie donc (x, y), (ρ, φ), (x, y, z), (ρ, φ, z) ou (r, φ, θ) selon le contexte.

Dans la suite $\mathbb{R}^n$ est l'un des trois espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

2. Ensembles ouverts, fermés, bornés, compacts

Dans cette section :

- Intervalles, disques, boules
- Bord d'un ensemble
- Ensembles ouverts et fermés
- Ensembles bornés et compacts

Intervalles

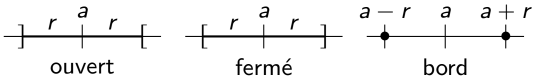
Définitions –

- Dans $\mathbb{R}$, on appelle

intervalle ouvert $\quad I_a(r) =]a-r, a+r[$

intervalle fermé $\quad \overline{I}_a(r) = [a-r, a+r]$

bord de l'intervalle $\quad \partial I_a(r) = \{a-r, a+r\}$



Disques

- Dans $\mathbb{R}^2$, on appelle

disque ouvert

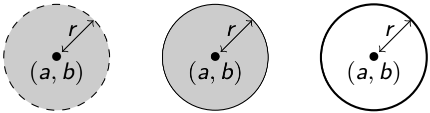
$$D_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\right\}$$

disque fermé

$$\overline{D}_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2\right\}$$

bord du disque $\quad$ (= cercle)

$$\partial D_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}$$



ouvert $\qquad$ fermé $\qquad$ bord

Boules

- Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle

boule ouverte

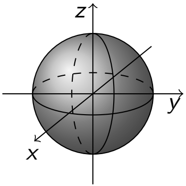
$$B_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2\}$$

boule fermée

$$\overline{B}_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2\}$$

bord de la boule (= sphère)

$$\partial B_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}$$



Bord d'un ensemble

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

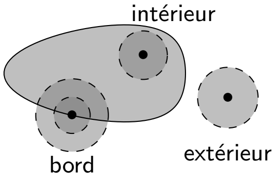
• Un point P est un **point intérieur** à D, s'il existe une boule ouverte B_P contenue dans D.

• Un point P est un **point extérieur** à D il existe une boule ouverte B_P qui n'intersecte pas D.

• Un point $P \in \mathbb{R}^n$ est un **point du bord** de D si toute boule ouverte B_P centrée en P contient à la fois des points de D et de son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash D$.

• Le **bord** de D est l'ensemble des points du bord, noté ∂D.

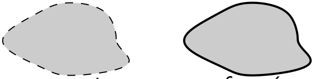
Attention – Un point de ∂D peut être dans D ou non!



Ensembles ouverts et fermés

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

- D est **ouvert** s'il ne contient <u>aucun</u> de ses points de bord.
- D est **fermé** s'il contient <u>tous</u> ses points de bord.

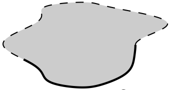


ouvert fermé

Propriété – *Le complémentaire d'un ouvert est fermé, le complémentaire d'un fermé est ouvert.*

- Par convention, l'**ensemble vide** $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont à la fois <u>ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$</u>.

ATTENTION – Il existe des ensembles qui ne sont <u>ni ouverts ni fermés</u>!

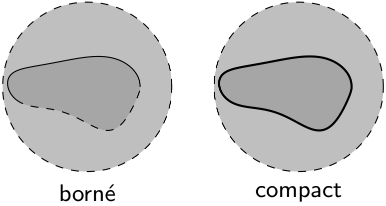


ni ouvert ni fermé

Ensembles bornés et compacts

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

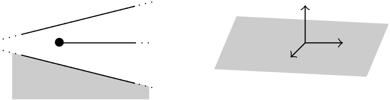
- D est **borné** s'il existe un disque ouvert B qui le contient.
- D est **compact** s'il est fermé et borné.



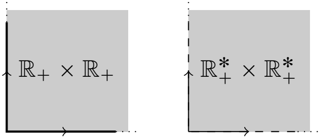
Exemples: non bornés fermés et ouverts

Exemples –

• Droites, demi-droites, plans et demi-plans sont non bornés.
Les droites et les plans sont fermés. Les demi-droites et les demi-plans sont fermés s'ils contiennent leurs point ou droite extreme.

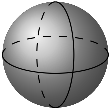


• Les quadrants $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sont non bornés.
Le premier est aussi fermé. Le deuxième est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ mais ne l'est pas dans $\mathbb{R}^3$ (car tout le quadrant est son propre bord dans $\mathbb{R}^3$).

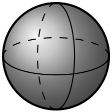


Exemples: bornés ouverts et fermés

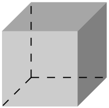
• Disques, boules, carrés et cubes pleins sont bornés.
Ils sont fermés (et donc compacts) s'ils contiennent leur bord (cercle, sphère ou carré et cube).



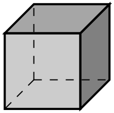
boule ouverte



boule fermée

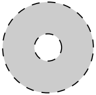


cube ouvert

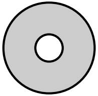


cube fermé

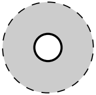
• Les couronnes circulaires sont bornées. Dans le plan, elles sont fermées (donc compactes) ou ouvertes selon qu'elles contiennent les circles ou non.



couronne ouverte



couronne fermée



ni ouverte ni fermée

Exercice

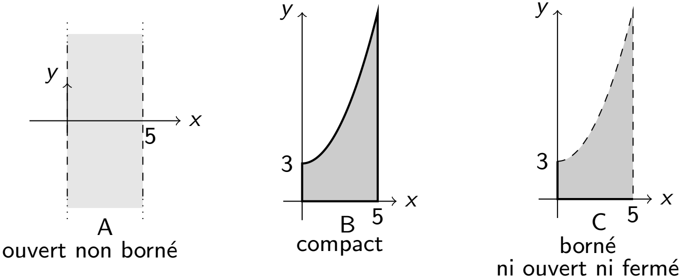
Énoncé – *Dessiner les sous-ensembles suivants de* $\mathbb{R}^2$ *et dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés ou compacts :*

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 5\Big\}$$

$$B = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2+3\Big\}$$

$$C = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x < 5,\ 0 \leqslant y < x^2+3\Big\}$$

Réponse –



3. Fonctions de deux ou trois variables

Dans cette section:

- Fonctions réelles et vectorielles de plusieurs variables
- Domaine et image

Fonctions réelles et vectorielles

Définition – Une **fonction de plusieurs variables** est une loi

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

qui associe à un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ au plus une valeur $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$.

- Pour ce cours, $n = 2$ ou 3 et $m = 1$, 2 ou 3.
- Si $m = 1$, la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **réelle**.
- Si $m > 1$, la fonction f est dite **vectorielle**.

Exemples de fonctions de plusieures variables

- **Fonctions réelles**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 + \sin(xy) + 1$

Pression $= f$(Volume, Temperature)

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^3 z + xyz + \ln(z^2 + 1)$

- **Fonctions vectorielles**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2, x + y, y^3)$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (x^2 + z, xz + y)$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (\rho, \varphi) \mapsto h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$

Attention aux fonctions vectorielles et linéaires !

ATTENTION – Une fonction vectorielle n'est pas linéaire en général !

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire si et seulement si, en coordonnée cartesiennes, ses composantes sont des polynômes de degré 1 sans termes constants.

Par exemple:

- $f(x, y, z) = \big(2z - x, 0, 3y + 5x - z\big)$ est linéaire
- $g(x, y, z) = \big(xz + 5, 3, \sin(y)\big)$ n'est pas linéaire,

  car contient un polynôme de degré 2 (xz),
  deux termes constants non nuls (5 et 3)
  et une fonction non-polynomiale ($\sin(y)$).

Domaine et image

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

• Le **domaine (de définition)** de f est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels f est bien définie:

$$D_f = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{il existe } f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

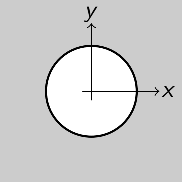
• L'**image** de f est l'ensemble des valeurs de f :

$$I_f = f(D_f) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{il existe } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \vec{y} = f(\vec{x}) \right\}$$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$

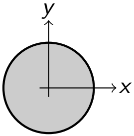
$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \geqslant 1\right\}$
$=$ complémentaire du disque $D_O(1)$
(fermé non borné)



$I_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$
$=$ disque fermé $\overline{D}_O(1)$ (compact)



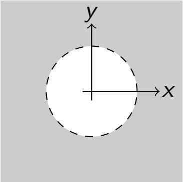
$I_f = [0,1]$

car $\quad x^2+y^2 \geqslant 0 \iff 0 \leqslant 1-x^2-y^2 \leqslant 1$
$\iff 0 \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} = f(x,y) \leqslant 1$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1)$

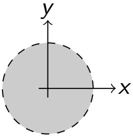
$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$
$=$ complémentaire du disque $\overline{D}_O(1)$
(ouvert non borné)



$I_f = \mathbb{R}$

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$
$=$ disque ouvert $D_O(1)$
(ouvert borné)



$I_f = \ln]0,1] =]-\infty, 0] = \mathbb{R}^-$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \left(\frac{1}{x^2}, -\frac{1}{y^2}\right)$

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0,\ y \neq 0\right\}$$
$=$ plan privé des deux axes de coordonnées (ouvert non borné)

$I_f = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^- = 4^{eme}$ quadrant privé de son bord

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 - z^2}, -\sqrt{y^2 + z^2}\right)$$

$$D_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 \geqslant 0\right\}$$
$=$ cône délimité par les deux plans $z = \pm x$ (fermé non borné)

$I_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- = 4^{eme}$ quadrant

Exercices

Énoncé – *Dessiner le domaine de définition et l'image des fonctions suivantes et déterminer la nature du domaine (ouvert, fermé, borné, compact).*

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2}.$

Réponse :

$$D_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 1 > 0,\ x^2 + y^2 \neq 0\big\}$$
$$= \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} = \text{plan moins l'origine} \quad \text{(ouvert non borné)}$$

La condition $x^2 + y^2 + 1 > 0$ est vérifiée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et la condition $x^2 + y^2 \neq 0$ est vérifiée si $(x, y) \neq (0, 0)$.

$I_f = \mathbb{R}^*_+ =]\,0, +\infty\,[$ (ouvert non borné)

car $x^2 + y^2 > 0$ implique $x^2 + y^2 + 1 > 1$ et par conséquent $\ln(x^2 + y^2 + 1) > 0$, et le quotient de deux nombres positifs est positif.

Exercices

- $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$(x,y) \mapsto g(x,y) = \left(\frac{\ln(x^2+1)}{y^2}, \frac{\ln(y^2+1)}{x^2} \right)$$

Réponse :

$$D_g = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+1 > 0,\ y \neq 0,\ y^2+1 > 0,\ x \neq 0 \right\}$$

$= \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* =$ plan privé des deux axes de coordonnées (ouvert non borné).

En effet, les conditions $x^2+1 > 0$ et $y^2+1 > 0$ sont vérifiées pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$I_g = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = 1^{er}$ quadrant privé de son bord (ouvert non borné)

Les conditions $x \neq 0$ et $y \neq 0$ impliquent $x^2 > 0$ et $y^2 > 0$, et par conséquent $\ln(x^2+1) > 0$ et $\ln(y^2+1) > 0$.

4. Graphes et lignes de niveau

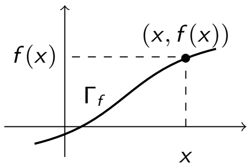
Dans cette section:

- Graphe des fonctions d'une variable (rappel)
- Graphe des fonctions de plusieures variables
- Lignes de niveau

Graphe des fonctions d'une variable

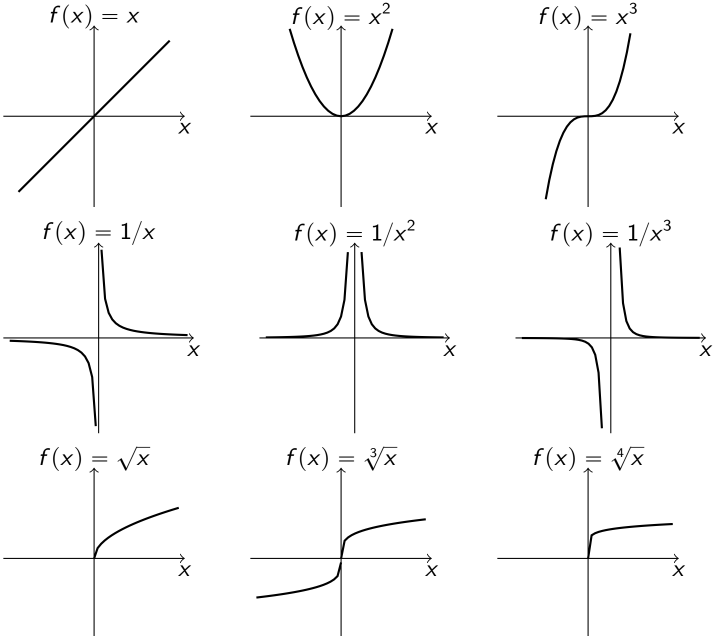
Rappel – Le **graphe de** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f,\ y = f(x) \Big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

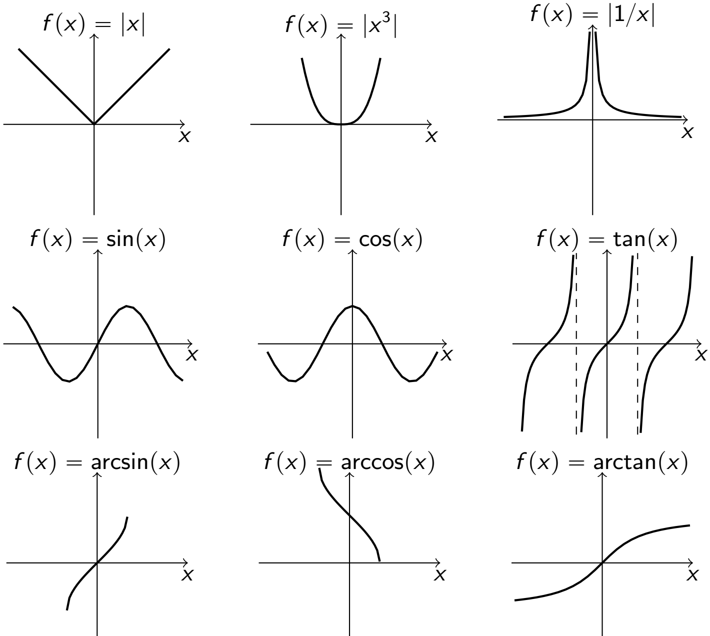


Le graphe des fonctions usuelles d'une variable est à connaître par cœur.

Graphes à connaître !

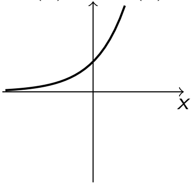


D'autres graphes à connaître !

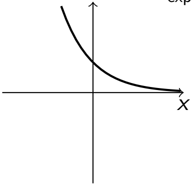


D'autres encore... ouf !

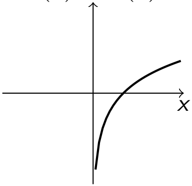
$f(x) = \exp(x)$



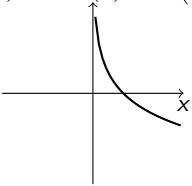
$f(x) = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$



$f(x) = \ln(x)$



$f(x) = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

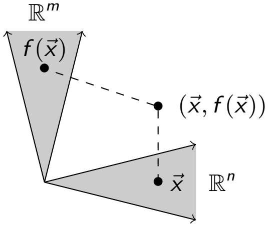


Graphe des fonctions de plusieures variables

Définition – Le **graphe de** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \vec{x} \in D_f,\ \vec{y} = f(\vec{x}) \Big\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

PROBLÈME – Ce graphe est difficile à dessiner si $n + m > 3$!

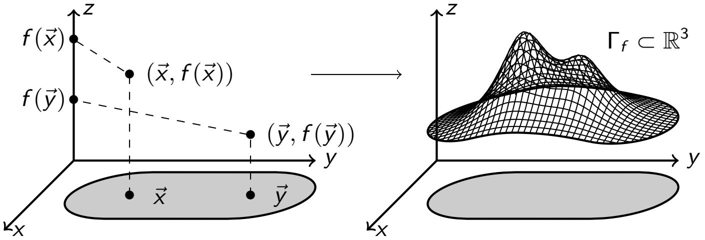


Regardons $n = 2$ et $m = 1$.

Graphe des fonctions réelle de deux variables

Le **graphe de** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f,\ z = f(x, y) \Big\} \subset \mathbb{R}^3.$$



Exemple: graphe d'une fonction de deux variables

Exemple –

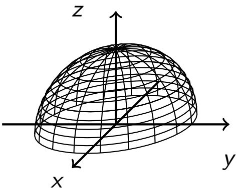
- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = z$

$$\Longrightarrow \quad D_f = \overline{D}_0(1) \quad \text{et} \quad I_f = [0, 1]$$

Notons que

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2, \quad \text{c.-à-d.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \text{et} \quad z \geqslant 0.$$

Ainsi $\Gamma_f =$ demi-sphère



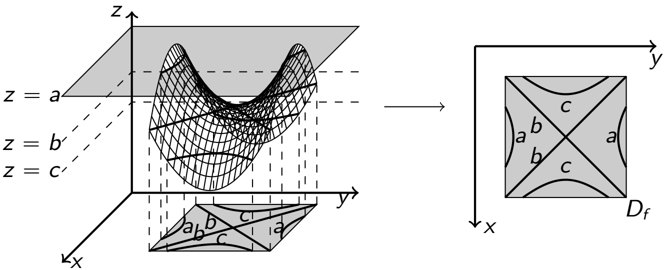
Lignes de niveau

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de domaine $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et d'image $I_f \subset \mathbb{R}$.

Définition – Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la **ligne de niveau** a est la projection sur D_f de $\Gamma_f \cap \{z = a\}$, c'est-à-dire

$$L_a(f) = \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = a\}.$$

À noter que $L_a(f) = \emptyset$ si $a \notin I_f$.



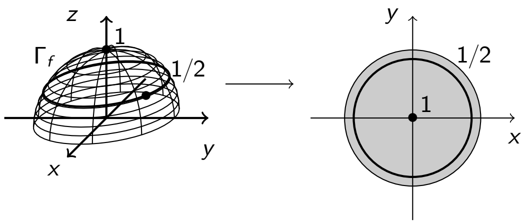
Exemple: lignes de niveau

Exemple –

- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = z, \quad D_f = \overline{D}_0(1), \; I_f = [0,1]$

Pour tout $a \in [0,1] = I_f$ on a

$$\begin{aligned} L_a(f) &= \left\{ (x,y) \in \overline{B}_O(1) \mid \sqrt{1-x^2-y^2} = a \right\} \\ &= \text{cercle centré en } (0,0) \text{ de rayon } \sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$



Exercice

Énoncé – *Trouver le domaine, l'image et la nature des lignes de niveau de la fonction*

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

Dessiner les lignes de niveau pour les valeurs $a = -2, -1, 0, 1, 2$. *En déduire le graphe de* f.

Réponse –

$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\right\} = \mathbb{R}^2 \setminus$ la bissectrice du 2^{eme} quadrant

$I_f = \mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$L_a(f) = \left\{(x, y) \in D_f \mid \frac{x - y}{x + y} = a\right\}$$

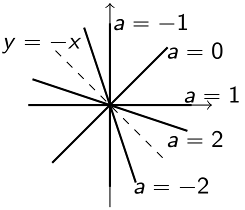
$= \text{droite d'équation} \quad (a - 1)x + (a + 1)y = 0$

Exercice

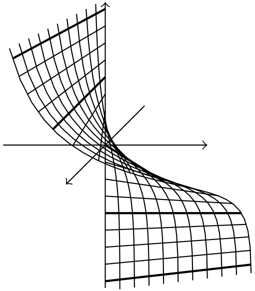
$L_a(f) =$ droite d'équation $\quad (a-1)x + (a+1)y = 0$

$$\begin{array}{llllll} a=0 & \Longrightarrow & y = x & & & \\ a=1 & \Longrightarrow & y=0 & a=-1 & \Longrightarrow & x=0 \\ a=2 & \Longrightarrow & y = -\frac{1}{3}x & a=-2 & \Longrightarrow & y=-3x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_f &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq x,\ z = \frac{x-y}{x+y} \right\} \\ &= \text{union de droites tournantes (sans l'axe } Oz\text{)} \end{aligned}$$



$\longleftrightarrow$



5. Opérations, composition et changement de coordonnées

Dans cette section:

- Somme et produit de fonctions
- Composition de fonctions
- Changement de coordonnées

Somme et produit de fonctions

Définition – Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions suivantes:

somme: $\big(f+g\big)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g;$

zéro: $0(\vec{x}) = (0, \dots, 0), \quad D_0 = \mathbb{R}^n;$

opposée de f: $\big(-f\big)(\vec{x}) = -f(\vec{x}), \quad D_{-f} = D_f;$

produit de f **par** λ: $\big(\lambda f\big)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}), \quad D_{\lambda f} = D_f.$

Si f et g sont des fonctions réelles ($m = 1$):

produit: $\big(fg\big) : (\vec{x}) = f(\vec{x})g(\vec{x}), \quad D_{fg} = D_f \cap D_g;$

un: $1(\vec{x}) = 1, \quad D_1 = \mathbb{R}^n;$

inverse de f: $\left(\dfrac{1}{f}\right)(\vec{x}) = \dfrac{1}{f(\vec{x})}, \quad D_{1/f} = \Big\{\vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) \neq 0\Big\}.$

Exemples: somme et produit de fonctions

Exemple –

Si $\quad f(x,y) = x^2 - y^2, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 \quad$ et $\quad \lambda = 3,$
on a :

$$\left[\begin{array}{l} (f+g)(x,y) = 2x^2 \\ \\ (3f)(x,y) = 3f(x,y) \\ \\ (fg)(x,y) = x^4 - y^4 \\ \\ \dfrac{1}{f}(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2} \quad \text{si } x \neq \pm y. \end{array}\right.$$

Propriétés des opérations

Proposition – *Les opérations d'addition, produit par scalaire et multiplication entre fonctions à plusieurs variables ont les mêmes proprietés que leurs analogues entre fonctions à une variable (elles sont commutatives, associatives et distributives).*

En particulier, *l'ensemble des fonctions à plusieurs variables $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ muni de l'addition et du produit par scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie.*

Composition de fonctions

Définition – Données deux fonctions

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

on définit la **composée de** f **et** g comme la fonction

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

obtenue en calculant g sur les valeurs obtenues par f:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & (g \circ f)(\vec{x}) = g\Big(f(\vec{x})\Big) \end{array}$$

Le domaine de $g \circ f$ est l'ensemble

$$D_{g \circ f} = \Big\{ \vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) \in D_g \Big\}.$$

Exemples: cas usuels de fonctions composées

Fixons $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 - y.$

- Si $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ z \mapsto g(z) = \exp z$

alors $\quad g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\quad z = f(x, y)$:

$$\big(g \circ f\big)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x^2 - y) = \exp(x^2 - y)$$

- Si $\quad h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (u, v) \mapsto h(u, v) = \big(h_1(u, v), h_2(u, v)\big) = (2u, u + v)$

alors $\quad f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\begin{cases} x = h_1(u, v) \\ y = h_2(u, v) \end{cases}$:

$$\big(f \circ h\big)(u, v) = f(h(u, v)) = f(2u, u + v) = 4u^2 - (u + v)$$

- Si $\quad \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\cos t, \sin t)$

alors $\quad f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \end{cases}$:

$$\big(f \circ \gamma\big)(t) = f(\gamma(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin t$$

Changement de variables

Un changement de variable s'écrit comme une composée !

Proposition – *Si* $\vec{y} = f(\vec{x})$ *est une fonction des variables* $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$*, son expression comme* *fonction de nouvelles variables* $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ *est donnée par la fonction composée*

$$\tilde{f} = f \circ h,$$

ou

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \vec{u} \mapsto h(\vec{u}) = (\vec{x})$$

est l'application qui décrit le changement de variables des $(x_1, \ldots, x_n)$ *vers les* $(u_1, \ldots, u_n)$*.*

Autrement dit, on a

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f\big(h(\vec{u})\big) = \tilde{f}(\vec{u}).$$

Changements en polaires, cylindriques, sphériques

- **Changement en coordonnées polaires:**

$$f(x,y) = f\big(h(\rho,\varphi)\big) = \tilde{f}(\rho,\varphi)$$

avec $h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

- **Changement en coordonnées cylindriques:**

$$f(x,y,z) = f\big(h(\rho,\varphi,z)\big) = \tilde{f}(\rho,\varphi,z)$$

avec $h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$h(\rho,\varphi,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$

- **Changement en coordonnées sphériques:**

$$f(x,y,z) = f\big(h(r,\varphi,\theta)\big) = \tilde{f}(r,\varphi,\theta)$$

avec $h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$h(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

Exemple: passage en coordonnées polaire

Exemple – On veut exprimer la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

en coordonnées polaires.

Pour cela il suffit de faire la composée $f \circ h$ où

$$h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

c'est-à-dire à remplacer x et y dans f par $\rho \cos \varphi$ et $\rho \sin \varphi$.

On obtient

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\rho, \varphi) &= f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \\ &= (\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 + 2\rho \cos \varphi \\ &= \rho^2 + 2\rho \cos \varphi. \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Exprimer la fonction*

$$f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, z^2\right)$$

en coordonnées cylindriques et sphériques.

Réponse – En coordonnées cylindriques :

$$\tilde{f}(\rho,\varphi,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = \left(\rho, z^2\right)$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\tilde{f}}(r,\varphi,\theta) & = & f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \\ & = & \left(r\,\sin\theta, r^2\cos^2\theta\right) \end{array}.$$