UCBL – L1 PCSI – UE Math 2

Fonctions de plusieures variables et champs de vecteurs

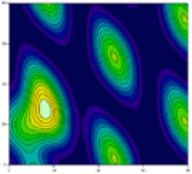
Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard Lyon 1

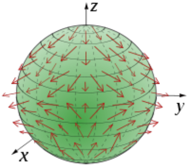
http://math.univ-lyon1.fr/∼frabetti/Math2/

But du cours:

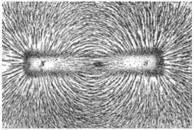
Champs scalaires
(lignes de niveau)



Champs de vecteurs
(ici, sur la sphère)



Lignes de champ
(dipole magnétique)



et aussi potentiels, circulation, flux...

Programme et plan des cours

Partie I : Fonctions de plusieures variables

CM 1 – Coordonnées, ensembles compacts
CM 2 – Fonctions, graphes, opérations
CM 3 – Dérivées partielles, gradient, différentielle
CM 4 – Jacobienne, règle de la chaîne
CM 5 – Dérivées secondes, Hessienne, Laplacien, Taylor, extrema
CM 6 – Intégrales simples et doubles
CM 7 – Intégrales triples. Aire, volume, centre de masse

Partie II : Champs de vecteurs

CM 8 – Champs scalaires et champs de vecteurs
CM 9 – Champs conservatifs
CM 10 – Champs incompressibles
CM 11 – Courbes et circulation
CM 12 – Surfaces et flux

Prérequis

1. **Espaces vectoriels et vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$**
   (produits scalaire, vectoriel et mixte).
2. **Applications linéaires et matrices**
   (produit, détérminant, matrice inverse).
3. **Géométrie cartesienne du plan et de l'espace**
   (droites, coniques, plans, quadriques).
4. **Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable**
   (graphes, dérivées, points critiques, extrema, Taylor, primitives).
5. **Équations différentielles du 1er ordre**.

Math2 – Chapitre 1
Fonctions de plusieures variables

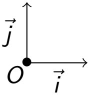
Dans ce chapitre:

1.1 – Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques

Dans cette section:

- Coordonnées cartesiennes et polaires du plan
- Coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques de l'espace

Coordonnées cartesiennes du plan

On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère 

du plan.

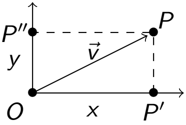
Définition – Soit P un point du plan.

• Le **coordonnées cartesiennes** de P sont le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\quad \vec{v} = \overrightarrow{OP} \; = \; x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \; \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Autrement dit,

$$x = \|\overrightarrow{OP'}\| \quad \text{et} \quad y = \|\overrightarrow{OP''}\|$$

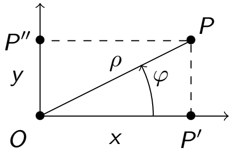
sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.



Coordonnées polaires

- Les **coordonnées polaires** de $P \neq O$ sont le couple

$(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ tel que $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$



On a donc

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi \ \text{ t.q. } \tan \varphi = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ ou } \cot \varphi = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \\ \quad \big(\text{par ex.} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{si } x, y > 0\big) \end{cases}$$

Exercice: coord. polaires $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants du plan, dont on connait les coordonnés polaires, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$A \left\{ \begin{array}{l} \rho = 3 \\ \varphi = 5\pi/4 \end{array} \right. \qquad B \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \end{array} \right. \qquad C \left\{ \begin{array}{l} \rho = 0 \\ \varphi = 3\pi/2 \end{array} \right.$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartésiennes avec les formules:

- $A \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3\cos(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 3\sin(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \qquad A\,(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$

- $B \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\cos(3\pi/4) = \frac{-\sqrt{2}^2}{2} \\ y = \sqrt{2}\sin(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} \end{array} \right. \qquad B\,(-1, 1)$

- $C \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0\ \cos(3\pi/2) = 0 \\ y = 0\ \sin(3\pi/2) = 0 \end{array} \right. \qquad C\,(0, 0)$

Exercice: coord. cartesiennes $\longrightarrow$ polaires

Énoncé – *Pour les points suivants du plan en coordonnés cartesiennes, trouver les coordonnées polaires :*

$$A\,(2,3) \qquad B\,(2,0) \qquad C\,(0,3)$$

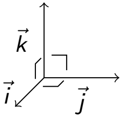
Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartesiennes avec les formules:

- A $\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ \cos\varphi = 2/\sqrt{13} \\ \sin\varphi = 3/\sqrt{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{13} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases}$

- B $\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{4+0} = 2 \\ \cos\varphi = 2/2 = 1 \\ \sin\varphi = 0/2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 2 \\ \varphi = \arctan 0 = 0 \end{cases}$

- C $\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{0+9} = 3 \\ \cos\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\varphi = \frac{3}{3} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$

Coordonnées cartesiennes de l'espace

On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère 

de l'espace.

Définition – Soit P un point de l'espace.

• Les **coordonnées cartesiennes** de P sont le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\quad \vec{v} = \overrightarrow{OP} \; = \; x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \; \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Autrement dit,

$$x = \|\overrightarrow{OP'}\|, \quad y = \|\overrightarrow{OP''}\| \quad \text{et} \quad z = \|\overrightarrow{OP'''}\|$$

sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

Coordonnées cylindriques

• Les **coordonnées cylindriques** de $P \neq O$ sont le triplet $(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right.$$

Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \|\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \varphi \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{x}{\rho} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\rho} \end{array} \right. \\ \\ z = z \end{array} \right.$$

Coordonnées sphériques

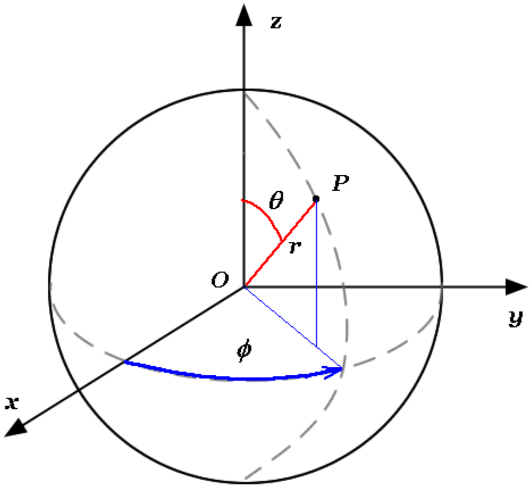
- Les **coordonnées sphériques** de $P \neq O$ sont le triplet $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times]0, \pi[$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos\varphi \sin\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\theta \end{array} \right.$$

Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array} \right. \\ \theta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{array} \right.$$

Coordonnées de l'espace



Exercice: coord. cylindriques $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants, dont on connait les coordonnés cylindriques, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$A \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/3 \\ z = 2 \end{cases} \qquad B \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/4 \\ z = -3 \end{cases}$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartesiennes avec les formules:

- $A \quad \begin{cases} x = 3\cos(\pi/3) = \frac{3}{2} \\ y = 3\sin(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 \end{cases} \qquad A\,(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2)$

- $B \quad \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ y = \sqrt{2}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ z = -3 \end{cases} \qquad B\,(1, 1, -3)$

Exercice: coord. sphériques $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants, dont on connait les coordonnées sphériques, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$C \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/2 \\ \theta = 3\pi/4 \end{array} \right. \qquad D \left\{ \begin{array}{l} r = 1 \\ \varphi = \pi/3 \\ \theta = \pi/6 \end{array} \right.$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on applique les formules:

- C $\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\ \cos(\pi/2)\ \sin(3\pi/4) = 0 \\ y = \sqrt{2}\ \sin(\pi/2)\ \sin(3\pi/4) = 1 \\ z = \sqrt{2}\ \cos(3\pi/4) = -1 \end{array} \right. \qquad C\,(0, 1, -1)$

- D $\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \cos(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{1}{4} \\ y = \sin(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ z = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \qquad D\,(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

Exo: cartesiennes → cylindriques et sphériques

Énoncé – *Pour les points suivants en coordonnées cartesiennes, trouver les coordonnées cylindriques et sphériques:*

$$A = (-1, 1, 1) \qquad B\,(3, 0, 0) \qquad C\,(0, 1, 1)$$

Réponse –

- A $\begin{cases} \rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \tan\varphi = -1 \\ r = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{3} \\ \varphi = 3\pi/4 \\ \theta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

- B $\begin{cases} \rho = \sqrt{9+0} = 3 \\ \tan\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ r = \sqrt{9+0+0} = 3 \\ \cos\theta = \frac{0}{3} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} r = 3 \\ \varphi = 0 \\ \theta = \pi/2 \end{cases}$

- C $\begin{cases} \rho = \sqrt{0+1} = 1 \\ \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = 1 \\ r = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \pi/2 \\ z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/2 \\ \theta = \pi/4 \end{cases}$

Notations des points

Conclusion –

- Un point géométrique du plan ou de l'espace est noté P.
- Un point en coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est noté $\vec{x}$.

Cela signifie donc (x, y), (ρ, φ), (x, y, z), (ρ, φ, z) ou (r, φ, θ) selon le contexte.

Dans la suite $\mathbb{R}^n$ est l'un des trois espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

1.2 – Ensembles ouverts, fermés, bornés, compacts

Dans cette section :

- Intervalles, disques, boules
- Bord d'un ensemble
- Ensembles ouverts et fermés
- Ensembles bornés et compacts

Intervalles

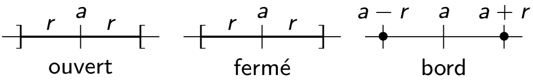
Définitions –

- Dans $\mathbb{R}$, on appelle

intervalle ouvert $I_a(r) =]a-r, a+r[$

intervalle fermé $\bar{I}_a(r) = [a-r, a+r]$

bord de l'intervalle $\partial I_a(r) = \{a-r, a+r\}$



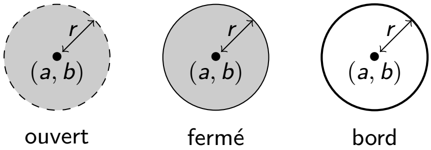
Disques

- Dans $\mathbb{R}^2$, on appelle

disque ouvert
$$D_{(a,b)}(r) = \left\{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\right\}$$

disque fermé
$$\overline{D}_{(a,b)}(r) = \left\{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2\right\}$$

bord du disque (= cercle)
$$\partial D_{(a,b)}(r) = \left\{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}$$



Boules

- Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle

boule ouverte

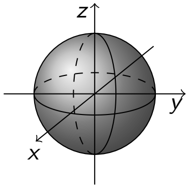
$$B_{(a,b,c)}(r) = \left\{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2\right\}$$

boule fermée

$$\overline{B}_{(a,b,c)}(r) = \left\{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2\right\}$$

bord de la boule (= sphère)

$$\partial B_{(a,b,c)}(r) = \left\{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\right\}$$



Bord d'un ensemble

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

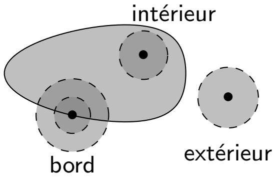
• Un point P est un **point intérieur** à D, s'il existe une boule ouverte B_P contenue dans D.

• Un point P est un **point extérieur** à D il existe une boule ouverte B_P qui n'intersecte pas D.

• Un point $P \in \mathbb{R}^n$ est un **point du bord** de D si toute boule ouverte B_P centrée en P contient à la fois des points de D et de son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash D$.

• Le **bord** de D est l'ensemble des points du bord, noté ∂D.

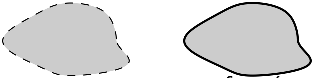
ATTENTION – Un point de ∂D peut être dans D ou non!



Ensembles ouverts et fermés

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

- D est **ouvert** s'il ne contient aucun de ses points de bord.
- D est **fermé** s'il contient tous ses points de bord.

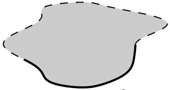


ouvert fermé

Propriété – *Le complémentaire d'un ouvert est fermé, le complémentaire d'un fermé est ouvert.*

- Par convention, l'**ensemble vide** $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ sont à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$.

ATTENTION – Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés!

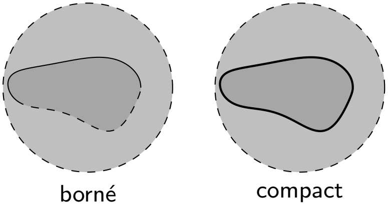


ni ouvert ni fermé

Ensembles bornés et compacts

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

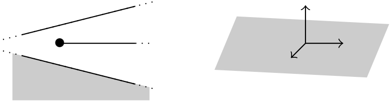
- D est **borné** s'il existe un disque ouvert B qui le contient.
- D est **compact** s'il est fermé et borné.



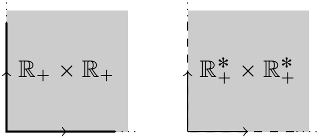
Exemples: non bornés fermés et ouverts

Exemples –

• Droites, demi-droites, plans et demi-plans sont non bornés.
Les droites et les plans sont fermés. Les demi-droites et les demi-plans sont fermés s'ils contiennent leurs point ou droite extreme.

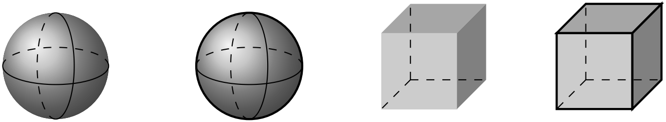


• Les quadrants $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sont non bornés.
Le premier est aussi fermé. Le deuxième est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ mais ne l'est pas dans $\mathbb{R}^3$ (car tout le quadrant est son propre bord dans $\mathbb{R}^3$).



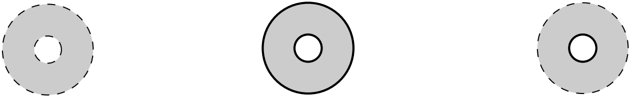
Exemples: bornés ouverts et fermés

• Disques, boules, carrés et cubes pleins sont bornés.
Ils sont fermés (et donc compacts) s'ils contiennent leur bord (cercle, sphère ou carré et cube).



boule ouverte — boule fermée — cube ouvert — cube fermé

• Les couronnes circulaires sont bornées. Dans le plan, elles sont fermées (donc compactes) ou ouvertes selon qu'elles contiennent les circles ou non.



couronne ouverte — couronne fermée — ni ouverte ni fermée

Exercice

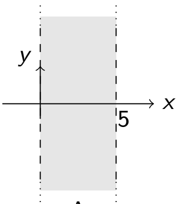
Énoncé – *Dessiner les sous-ensembles suivants de* $\mathbb{R}^2$ *et dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés ou compacts :*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 5\right\}$$

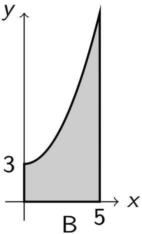
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 3\right\}$$

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x < 5,\ 0 \leqslant y < x^2 + 3\right\}$$

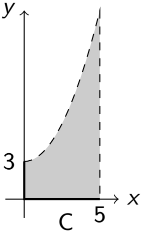
Réponse –



A
ouvert non borné



B
compact



C
borné
ni ouvert ni fermé

1.3 – Fonctions de deux ou trois variables

Dans cette section:

- Fonctions réelles et vectorielles de plusieurs variables
- Domaine et image

Fonctions réelles et vectorielles

Définition – Une **fonction de plusieurs variables** est une loi

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

qui associe à un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ <u>au plus</u> une valeur $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$.

- Pour ce cours, $n = 2$ ou 3 et $m = 1$, 2 ou 3.
- Si $m = 1$, la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **réelle**.
- Si $m > 1$, la fonction f est dite **vectorielle**.

Exemples de fonctions de plusieures variables

- **Fonctions réelles**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 + \sin(xy) + 1$

Pression $= f(\text{Volume}, \text{Temperature})$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^3 z + xyz + \ln(z^2 + 1)$

- **Fonctions vectorielles**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2, x + y, y^3)$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (x^2 + z, xz + y)$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (\rho, \varphi) \mapsto h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$

Attention aux fonctions vectorielles et linéaires !

ATTENTION – Une fonction vectorielle n'est pas linéaire en général !

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est <u>linéaire</u> si et seulement si, en coordonnée cartesiennes, ses composantes sont des <u>polynômes de degré 1 sans termes constants</u>.

Par exemple:

- $f(x, y, z) = \big(2z - x, 0, 3y + 5x - z\big)$ est linéaire
- $g(x, y, z) = \big(xz + 5, 3, \sin(y)\big)$ n'est pas linéaire,

  car contient un polynôme de degré 2 (xz),
  deux termes constants non nuls (5 et 3)
  et une fonction non-polynomiale ($\sin(y)$).

Domaine et image

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

• Le **domaine (de définition)** de f est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels f est bien définie:

$$D_f = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{il existe } f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

• L'**image** de f est l'ensemble des valeurs de f :

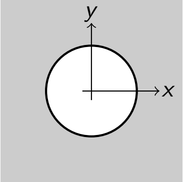
$$I_f = f(D_f) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{il existe } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \vec{y} = f(\vec{x}) \right\}$$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\}$
$\quad =$ complémentaire du disque $D_O(1)$
(fermé non borné)

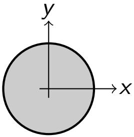
$I_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$



- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
$\quad =$ disque fermé $\overline{D}_O(1)$ (compact)

$I_f = [0, 1]$

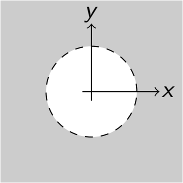


car $\quad x^2 + y^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow 0 \leqslant 1 - x^2 - y^2 \leqslant 1$
$\Longleftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2} = f(x, y) \leqslant 1$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

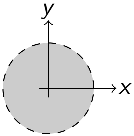
$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$
$\quad = \text{complémentaire du disque } \overline{D}_O(1)$
$\quad\quad$ (ouvert non borné)



$I_f = \mathbb{R}$

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
$\quad = \text{disque ouvert } D_O(1)$
$\quad\quad$ (ouvert borné)



$I_f = \ln]0, 1] =]-\infty, 0] = \mathbb{R}^-$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \left(\dfrac{1}{x^2}, -\dfrac{1}{y^2}\right)$

$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0,\ y \neq 0\right\}$
$\quad =$ plan privé des deux axes de coordonnées
$\qquad$ (ouvert non borné)

$I_f = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^- = 4^{eme}$ quadrant privé de son bord

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},$

$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 - z^2}, -\sqrt{y^2 + z^2}\right)$

$D_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 \geqslant 0\right\}$
$\quad =$ cône délimité par les deux plans $z = \pm x$
$\qquad$ (fermé non borné)

$I_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- = 4^{eme}$ quadrant

Exercices

Énoncé – *Dessiner le domaine de définition et l'image des fonctions suivantes et déterminer la nature du domaine (ouvert, fermé, borné, compact).*

• $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2}.$

Réponse : $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 1 > 0,\ x^2 + y^2 \neq 0\}$
$= \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} =$ plan moins l'origine (ouvert non borné)

La condition $x^2 + y^2 + 1 > 0$ est vérifiée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et la condition $x^2 + y^2 \neq 0$ est vérifiée si $(x, y) \neq (0, 0)$.

$I_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ (ouvert non borné)

car $x^2 + y^2 > 0$ implique $x^2 + y^2 + 1 > 1$ et par conséquent $\ln(x^2 + y^2 + 1) > 0$, et le quotient de deux nombres positifs est positif.

Exercices

- $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \left(\dfrac{\ln(x^2+1)}{y^2}, \dfrac{\ln(y^2+1)}{x^2} \right)$

Réponse :

$D_g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 1 > 0,\ y \neq 0,\ y^2 + 1 > 0,\ x \neq 0 \right\}$
$= \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* =$ plan privé des deux axes de coordonnées
(ouvert non borné).

En effet, les conditions $x^2 + 1 > 0$ et $y^2 + 1 > 0$ sont vérifiées pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$I_g = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = 1^{er}$ quadrant privé de son bord
(ouvert non borné)

Les conditions $x \neq 0$ et $y \neq 0$ impliquent $x^2 > 0$ et $y^2 > 0$, et par conséquent $\ln(x^2 + 1) > 0$ et $\ln(y^2 + 1) > 0$.

1.4 – Graphes et lignes de niveau

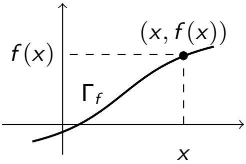
Dans cette section:

- Graphe des fonctions d'une variable (rappel)
- Graphe des fonctions de plusieures variables
- Lignes de niveau

Graphe des fonctions d'une variable

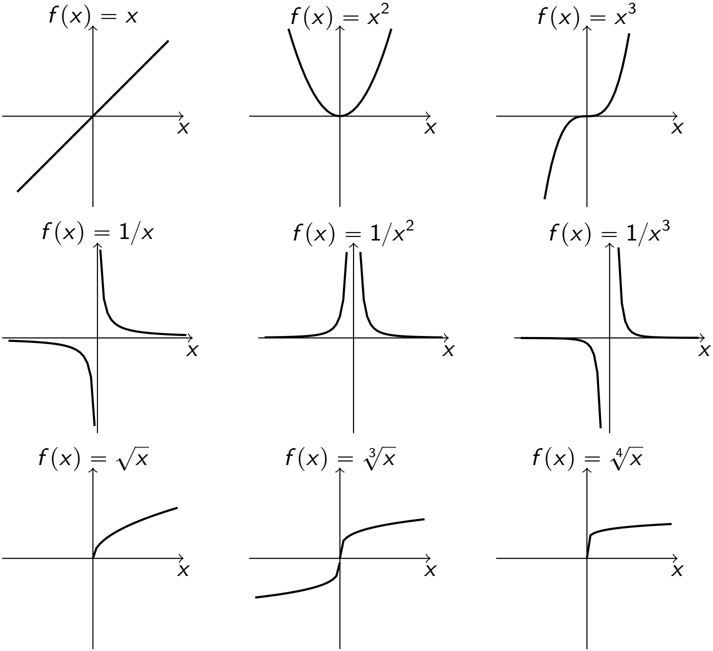
Rappel – Le **graphe de** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f,\ y = f(x) \Big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

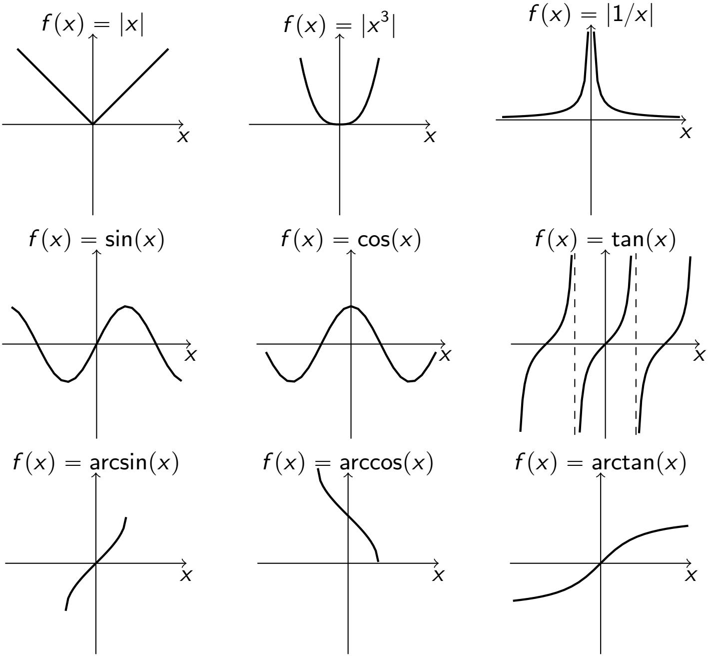


Le graphe des fonctions usuelles d'une variable est à connaître par cœur.

Graphes à connaître !

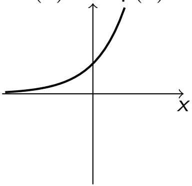


D'autres graphes à connaître !

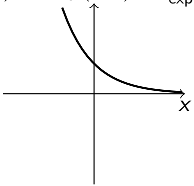


D'autres encore... ouf !

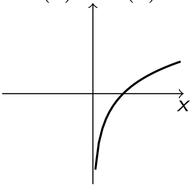
$f(x) = \exp(x)$



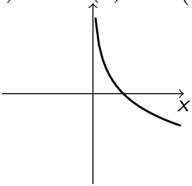
$f(x) = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$



$f(x) = \ln(x)$



$f(x) = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

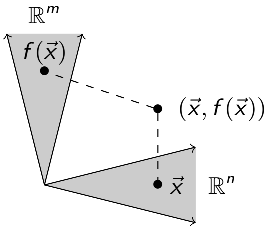


Graphe des fonctions de plusieures variables

Définition – Le **graphe de** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \vec{x} \in D_f,\ \vec{y} = f(\vec{x}) \Big\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Problème – Ce graphe est difficile à dessiner si $n + m > 3$!

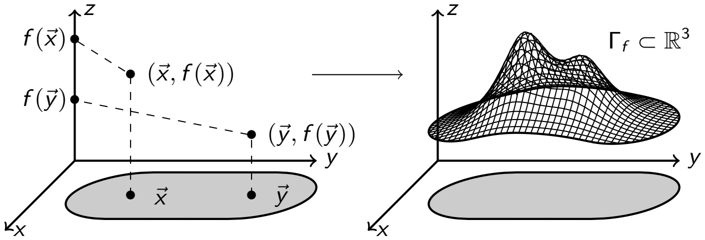


Regardons $n = 2$ et $m = 1$.

Graphe des fonctions réelle de deux variables

Le **graphe de** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f ,\ z = f(x, y) \Big\} \subset \mathbb{R}^3 .$$



Exemple: graphe d'une fonction de deux variables

Exemple –

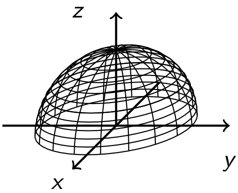
- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = z$

$$\Longrightarrow \quad D_f = \overline{D}_0(1) \quad \text{et} \quad I_f = [0, 1]$$

Notons que

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2, \quad \text{c.-à-d.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \text{et} \quad z \geqslant 0.$$

Ainsi Γ_f= demi-sphère



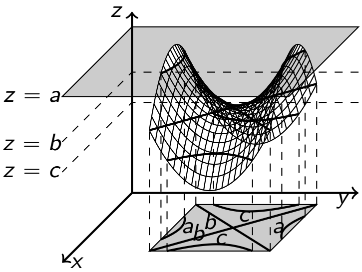
Lignes de niveau

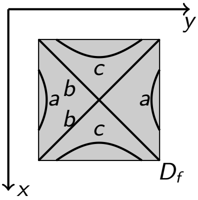
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de domaine $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et d'image $I_f \subset \mathbb{R}$.

Définition – Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la **ligne de niveau** a est la projection sur D_f de $\Gamma_f \cap \{z = a\}$, c'est-à-dire

$$L_a(f) = \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = a\}.$$

À noter que $L_a(f) = \varnothing$ si $a \notin I_f$.





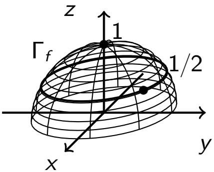
Exemple: lignes de niveau

Exemple –

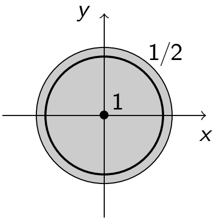
- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = z, \quad D_f = \overline{D}_0(1),\ I_f = [0,1]$

Pour tout $a \in [0,1] = I_f$ on a

$$L_a(f) = \left\{ (x,y) \in \overline{B}_O(1) \mid \sqrt{1-x^2-y^2} = a \right\}$$
$$= \text{cercle centré en } (0,0) \text{ de rayon } \sqrt{1-a^2}$$



$\longrightarrow$



Exercice

Énoncé – *Trouver le domaine, l'image et la nature des lignes de niveau de la fonction*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Dessiner les lignes de niveau pour les valeurs $a = -2, -1, 0, 1, 2$.
En déduire le graphe de f.

Réponse –

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\} = \mathbb{R}^2 \setminus$ la bissectrice du 2^{eme} quadrant

$I_f = \mathbb{R}$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$L_a(f) = \left\{(x,y) \in D_f \mid \frac{x-y}{x+y} = a\right\}$$

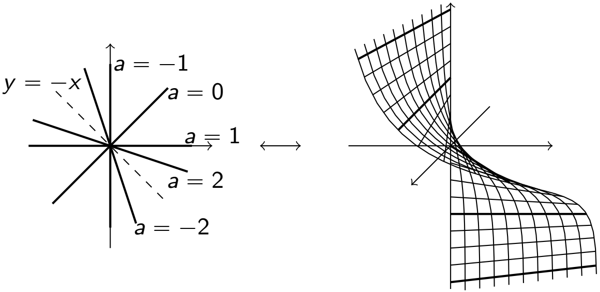
$=$ droite d'équation $\quad (a-1)x + (a+1)y = 0$

Exercice

$$L_a(f) = \text{droite d'équation} \quad (a-1)x + (a+1)y = 0$$

$$\begin{array}{llllll} a = 0 & \Longrightarrow & y = x & & & \\ a = 1 & \Longrightarrow & y = 0 & a = -1 & \Longrightarrow & x = 0 \\ a = 2 & \Longrightarrow & y = -\frac{1}{3}x & a = -2 & \Longrightarrow & y = -3x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_f &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq x,\ z = \frac{x-y}{x+y} \right\} \\ &= \text{union de droites tournantes (sans l'axe } Oz\text{)} \end{aligned}$$



1.5 – Opérations, composition et changement de coordonnées

Dans cette section:

- Somme et produit de fonctions
- Composition de fonctions
- Changement de coordonnées

Somme et produit de fonctions

Définition – Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On définit les fonctions suivantes:

somme: $\big(f+g\big)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g;$

zéro: $0(\vec{x}) = (0, \ldots, 0), \quad D_0 = \mathbb{R}^n;$

opposée de f: $\big(-f\big)(\vec{x}) = -f(\vec{x}), \quad D_{-f} = D_f;$

produit de f **par** λ: $\big(\lambda f\big)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}), \quad D_{\lambda f} = D_f.$

Si f et g sont des fonctions <u>réelles</u> ($m = 1$):

produit: $\big(fg\big) : (\vec{x}) = f(\vec{x}) g(\vec{x}), \quad D_{fg} = D_f \cap D_g;$

un: $1(\vec{x}) = 1, \quad D_1 = \mathbb{R}^n;$

inverse de f: $\left(\frac{1}{f}\right)(\vec{x}) = \frac{1}{f(\vec{x})}, \quad D_{1/f} = \left\{ \vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) \neq 0 \right\}.$

Exemples: somme et produit de fonctions

Exemple –

Si $\quad f(x,y) = x^2 - y^2, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 \quad$ et $\quad \lambda = 3$,
on a :

$$\left[\begin{array}{l} (f+g)(x,y) = 2x^2 \\ \\ (3f)(x,y) = 3f(x,y) \\ \\ (fg)(x,y) = x^4 - y^4 \\ \\ \dfrac{1}{f}(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2} \quad \text{si } x \neq \pm y. \end{array}\right.$$

Propriétés des opérations

Proposition – *Les opérations d'addition, produit par scalaire et multiplication entre fonctions à plusieurs variables ont les mêmes proprietés que leurs analogues entre fonctions à une variable (elles sont commutatives, associatives et distributives).*

En particulier, *l'ensemble des fonctions à plusieurs variables $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ muni de l'addition et du produit par scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie.*

Composition de fonctions

Définition – Données deux fonctions

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

on définit la **composée de** f **et** g comme la fonction

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

obtenue en calculant g sur les valeurs obtenues par f:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & (g \circ f)(\vec{x}) = g\Big(f(\vec{x})\Big) \end{array}$$

Le domaine de $g \circ f$ est l'ensemble

$$D_{g \circ f} = \Big\{ \vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) \in D_g \Big\}.$$

Exemples: cas usuels de fonctions composées

Fixons $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 - y.$

- Si $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto g(z) = \exp z$

alors $\quad g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\quad z = f(x,y)$:

$$\big(g \circ f\big)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x^2 - y) = \exp(x^2 - y)$$

- Si $\quad h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto h(u,v) = \big(h_1(u,v), h_2(u,v)\big)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (2u, u+v)$

alors $\quad f \circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\left\{ \begin{array}{l} x = h_1(u,v) \\ y = h_2(u,v) \end{array} \right. :$

$$\big(f \circ h\big)(u,v) = f(h(u,v)) = f(2u, u+v) = 4u^2 - (u+v)$$

- Si $\quad \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\cos t, \sin t)$

alors $\quad f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\left\{ \begin{array}{l} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \end{array} \right. :$

$$\big(f \circ \gamma\big)(t) = f(\gamma(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin t$$

Changement de variables

Un changement de variable s'écrit comme une composée !

Proposition – *Si* $\vec{y} = f(\vec{x})$ *est une fonction des variables* $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, *son expression comme* *<u>fonction de nouvelles variables</u>* $\vec{u} = (u_1, ..., u_n)$ *est donnée par la fonction composée*

$$\tilde{f} = f \circ h,$$

ou

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \; \vec{u} \mapsto h(\vec{u}) = (\vec{x})$$

est l'application qui décrit le changement de variables des $(x_1, ..., x_n)$ *vers les* $(u_1, ..., u_n)$.

Autrement dit, on a

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f\big(h(\vec{u})\big) = \tilde{f}(\vec{u}).$$

Changements en polaires, cylindriques, sphériques

- **Changement en coordonnées polaires:**

$$f(x,y) = f\big(h(\rho,\varphi)\big) = \tilde{f}(\rho,\varphi)$$

avec $\quad h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

- **Changement en coordonnées cylindriques:**

$$f(x,y,z) = f\big(h(\rho,\varphi,z)\big) = \tilde{f}(\rho,\varphi,z)$$

avec $\quad h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\qquad h(\rho,\varphi,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$

- **Changement en coordonnées sphériques:**

$$f(x,y,z) = f\big(h(r,\varphi,\theta)\big) = \tilde{f}(r,\varphi,\theta)$$

avec $\quad h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\qquad h(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

Exemple: passage en coordonnées polaire

Exemple – On veut exprimer la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

en coordonnées polaires.

Pour cela il suffit de faire la composée $f \circ h$ où

$$h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

c'est-à-dire à remplacer x et y dans f par $\rho \cos \varphi$ et $\rho \sin \varphi$.

On obtient

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}(\rho, \varphi) & = & f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \\ & = & (\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 + 2\rho \cos \varphi \\ & = & \rho^2 + 2\rho \cos \varphi. \end{array}$$

Exercice

Énoncé – *Exprimer la fonction*

$$f(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z^2\right)$$

en coordonnées cylindriques et sphériques.

Réponse – En coordonnées cylindriques :

$$\tilde{f}(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) = \left(\rho, z^2\right)$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\tilde{f}}(r, \varphi, \theta) & = & f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \\ & = & \left(r \sin \theta, r^2 \cos^2 \theta\right) \end{array} .$$