Fascicule d'exercices pour l'UE Math 2A

Automne 2023

Alessandra Frabetti <frabetti@math.univ-lyon1.fr>
Nadège Jacquemot <nadege.jacquemot@univ-lyon1.fr>

Prérequis (programme du cours TMB)

1. Espaces vectoriels et vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ (produits scalaire, vectoriel et mixte)
2. Applications linéaires et matrices (produit, détérminant, matrice inverse).
3. Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace (droites, coniques, plans, quadriques).
4. Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable (Taylor, extrema, primitives).
5. Équations différentielles du 1er ordre.

Table des matières

TD 1 – COORDONNÉES, FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

Exercice 1 – Changement de coordonnées des points
Dessiner les points suivants, donnés en coordonnées cartesiennes, ensuite trouver leur expression en coordonnées polaires (ρ,φ) (dans le plan) ou cylindriques (ρ,φ,z) et sphériques (r,θ,φ) (dans l'espace) :

a) Dans le plan : $(\sqrt{3},1)$, $(1,\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},-1)$, $(-\sqrt{3},1)$, $(2,-2)$, $(0,5)$, $(-3,0)$, $(-1,-1)$.

b) Dans l'espace : $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(0,2,1)$, $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$, $(0,0,3)$.

Exercice 2 – Expression en coordonnées cylindriques et sphériques
Exprimer les quantités suivantes en coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) et sphériques (r,θ,φ) :

a) $z(x^2+y^2)$

b) $x(y^2+z^2)$

c) $z\sqrt{x^2+y^2}$

d) $(x^2+y^2)^2+z^4$

e) $x^2+y^2+z^2-xy$

f) $\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

Exercice 3 – Sous-ensembles du plan
Dessiner les sous-ensembles suivants du plan $\mathbb{R}^2$. Indiquer leur bord en trait plein s'il est inclus dans l'ensemble et en traits pointillés s'il n'y appartient pas, puis dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés et compacts (en justifiant la réponse à partir du dessin).

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geqslant x^2\}$

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y> x^2\}$

$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geqslant x^2,\ y\leqslant x+1\}$

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y> x^2,\ y< x+1\}$

$E=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \rho\leqslant 3,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\}$

$F=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 \mid 1<\rho< 3,\ 0<\varphi<\pi/2\}$

$G=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 \mid \rho\geqslant 3\}$

Exercice 4 – Sous-ensembles de l'espace [Facultatif]
Dessiner les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ et dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés et compacts.

$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2\leqslant y\leqslant x+1,\ 0\leqslant z\leqslant 2\}$

$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y> x^2,\ z>0\}$

$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1, z\leqslant 1-x\}$

$D=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \rho\leqslant 3,\ 0\leqslant z\leqslant 2\}$

$E=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \rho\leqslant 3,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2,\ z\leqslant 0\}$

$F=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid r>3\}$

$G=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid r\leqslant 3,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2\}$

Exercice 5 – Domaine de définition de fonctions
Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes et le dessiner dans un plan ou dans l'espace :

a) $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+y)}{e^{x+y}}$

b) $F(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y}}{x^2-y^2}$

c) $g(x,y,z)=\dfrac{\ln(z)}{x-y}$

d) $h(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}, \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{y}\right)$

TD 2 – GRAPHE DE FONCTIONS, COMPOSÉES

Exercice 6 – Lignes de niveau et graphe
Trouver les lignes de niveau des fonctions suivantes et dessiner celles des niveaux indiqués. Ensuite, dessiner le graphe de f en remontant chaque ligne de niveau à son hauteur.

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 2, et 3.

b) $f(x,y) = x^2+4y^2$, dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 4 et 9.

c) $f(x,y) = \dfrac{2y}{x}$ (avec $x \neq 0$), dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 2, -1 et -2.

Exercice 7 – Graphe de fonctions
Trouver à quels graphes correspondent les fonctions suivantes.

a) $f(x,y) = x^2+4y^2$

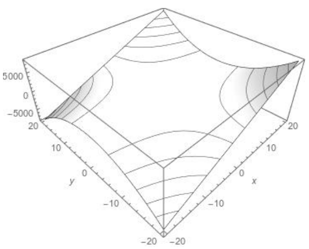
b) $f(x,y) = \frac{2y}{x}$

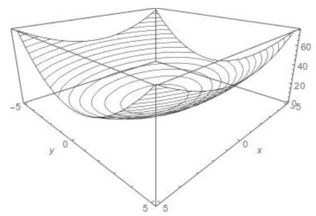
c) $f(x,y) = xy^2$

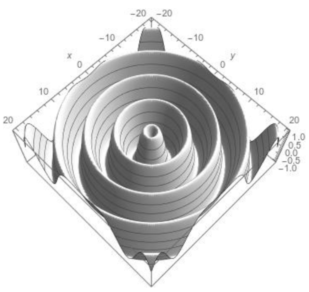
d) $f(x,y) = \sin(x)+\sin(y)$

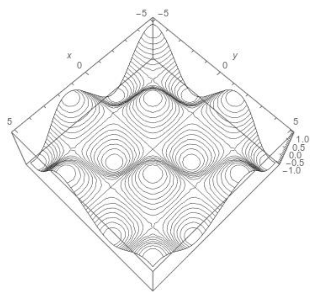
e) $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$

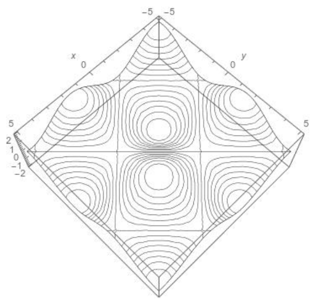
f) $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$

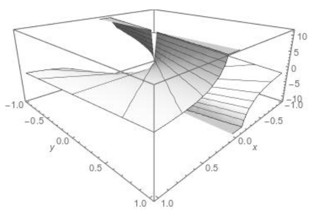
A) 

C) 

E) 

B) 

D) 

F) 

Exercice 8 – Composées
Calculer les possibles composées des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(u,v) = \frac{u^2}{v^2}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(z) = z^4+1 \qquad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t+1, t-1)$$

Exercice 9 – « Décomposées »
Exprimer les fonctions suivantes comme composées de fonctions élémentaires :

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

b) $g(x,y) = e^{\sin(xy)}$

c) $F(x,y,z) = \sin(x^2+3yz)$

d) $G(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

Exercice 10 – Changement de coordonnées de fonctions
Exprimer les fonctions suivantes en coordonnées cylindriques (ρ,φ,z) et sphériques (r,θ,φ).

a) $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$

b) $g(x,y,z) = x(y^2+z^2)$

c) $h(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$

d) $u(x,y,z) = (x^2+y^2)^2+z^4$

e) $v(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy$

f) $w(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

g) $F(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

h) $G(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

i) $H(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+z}{x^2+y^2+z^2}$

j) $U(x,y,z) = xy+z^2$

k) $V(x,y,z) = (x^2+y^2)\,e^{z^2}$

TD 3 – DÉRIVÉES, GRADIENT, DIFFÉRENTIELLE, JACOBIENNE

Exercice 11 – Dérivées partielles
Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles (où exactes s'il n'y a qu'une variable) et détérminer l'ensemble où les fonctions sont différentiables :

a) $f(x,y) = y\,\sin(xy)$
b) $g(u,v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\right)$
c) $h(x,y,z) = \left(x^2(y+1), xz^2, y+1\right)$
d) $\gamma(t) = \left(\sqrt{2+t}, \sqrt{2-t}\right)$
e) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$
f) $\phi(p,q) = \left(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1)\right)$
g) $u(\omega,t) = \left(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t\right)$
h) $F(r,\theta,\varphi) = \left(r\cos\varphi, r\sin\theta\right)$

Exercice 12 – Gradient et différentielle des fonctions réelles
Pour les fonctions suivantes, ecrire le gradient et la différentielle en tout point, et puis au point indiqué :

a) $f(x,y) = y\sin(xy)$ en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$
b) $G(R,T) = R^3T + R^2T^2 + RT^3$ en $(3,2)$

Exercice 13 – Dérivée directionnelle
Pour les fonctions suivantes, trouver la dérivée directionnelle dans la direction du vecteur donné :

a) $f(x,y) = y\ln(xy)$ dans la direction de $\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$
b) $g(x,y,z) = x\,e^{yz}$ dans la direction de $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$.

Exercice 14 – Dérivée directionnelle
Un randonneur se promène sur une montagne qui ressemble au graphe de la fonction $f(x,y) = xy^2$, dans un voisinage du point $(2,1)$. Il arrive au point $(2,1,2) = (2,1,f(2,1))$ de la montagne depuis la direction $\vec{d} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, et là demarrent trois chemins de direction

$$\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}, \quad \vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \vec{\jmath} - \vec{\imath}.$$

a) Quel chemin doit-il prendre pour <u>monter</u> la pente le plus <u>doucement</u> possible ?
b) Quelle est la direction où il faudrait réaliser un nouveau chemin qui <u>monterait</u> la pente le plus <u>rapidement</u> possible ?
c) Au retour, en passant par le même point, quel chemin doit-il prendre, parmi les quatre existant, pour <u>descendre</u> la pente le plus <u>rapidement</u> possible ?

Exercice 15 – Matrice Jacobienne des fonctions vectorielles
Pour les fonctions vectorielles suivantes, calculer la matrice Jacobienne et, si possible, le déterminant Jacobien en tout point, et puis au point indiqué :

a) $g(u,v) = \left(uv^2, \frac{1}{u+v-1}\right)$ en $(1,1)$
b) $h(x,y,z) = \left(x^2(y+1), xz^2, y+1\right)$ en $(1,0,1)$
c) $\phi(p,q) = \left(\ln(p^2q^2), \ln(p-q+1)\right)$ en $(1,1)$
d) $u(\omega,t) = \left(e^{\omega t}, \sin(\omega t), \omega t\right)$ en $(\pi,1)$
e) $F(r,\theta,\varphi) = \left(r\cos\varphi, r\sin\theta\right)$ en $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

TD 4 – RÈGLE DE LA CHAINE POUR LA DÉRIVÉE DES COMPOSÉES

Exercice 16 – Règle de la chaine
Soient $x = x(t)$ et $y = y(t)$ deux fonctions dérivables en tout $t \in \mathbb{R}$. Trouver la dérivée par rapport à t de

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ b) $g(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ c) $h(x,y) = \left(\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x-y}\right)$

Exercice 17 – Règle de la chaine
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, de variables (x,y). Trouver la dérivée de f par rapport à t quand

a) $x = \sin t$ et $y = \cos t$ b) $x = e^{-t}$ et $y = e^t$

Exercice 18 – Règle de la chaine
Soit f une fonction de plusieurs variables à valeur réelle, de classe C^1. Calculer les dérivées partielles de la fonction g en fonction des dérivées partielles de f, dans les cas suivants :

a) $g(x,y,z) = f(x^2 + 3yz, y^2 - z^2)$
b) $g(x,y,z) = \big(f(x^2 + 3yz, y^2 - z^2)\big)^2$
c) $g(x,y,z) = \ln\big(f(x^2 + 3yz, y^2 - z^2)\big)$
d) $g(x,y) = f(\sin x, \sin y, xy^2)$
e) $g(x,y) = \ln\big(f(\sin x, \sin y, xy^2)\big)$
f) $g(x,y) = e^{f(\sin x, \sin y, xy^2)}$

Exercice 19 – Règle de la chaine
Soit $z(x) = f(x, y(x))$, où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $y = y(x)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée $z'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f et de la dérivée de y par rapport à x.

Appliquer la formule trouvée aux cas particuliers suivants (tous indépendants) :

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$
b) $f(x,y) = xy^2 + x^2y$
c) $y = e^{3x}$
d) $y = \ln x$

Exercice 20 – Règle de la chaine
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec dérivées partielles

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2x}{y-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{x^2}{(y-1)^2}.$$

a) Calculer les dérivées partielles de la fonction $F(u,v) = f(2u - v, u - 2v)$.
b) Calculer la dérivée de la fonction $G(t) = f(t+1, t^2)$.

Exercice 21 – Différentielle de fonctions composées
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et posons

a) $g(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$ b) $g(x,y,z) = f(2x - yz, xy - 3z)$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f, et écrire la différentielle de g.

Exercice 22 – Jacobienne de fonctions composées
Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et posons

a) $g(x,y) = h(x^2 - y^2, 2xy)$ b) $g(x,y,z) = h(2x - yz, xy - 3z)$

Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de h, et écrire la matrice Jacobienne de g.

Exercice 23 – Jacobienne de fonctions composées
Soient $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ les deux fonctions définies par

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (x\, e^y, y\, e^x) \\ G(u,v) &= (u+v, u-v). \end{aligned}$$

Calculer les matrices Jacobiennes de F, de G et des deux fonctions composées $f = G \circ F$ et $g = F \circ G$. Comparer les matrices Jacobiennes de f et de g au produit des matrices Jacobiennes de F et de G.

Exercice 24 – Jacobienne de fonctions composées
Soient $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ deux fonction différentiables sur $\mathbb{R}^2$, dont on connait les matrices Jacobiennes

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x+1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J_G(u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ 3u^2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice Jacobienne et le detérminant Jacobien des fonctions composées $f(x,y) = G(F(x,y))$ et $g(u,v) = F(G(u,v))$.

TD 5 – HESSIENNE, LAPLACIEN, TAYLOR

Exercice 25 – Matrice Hessienne
Calculer la matrice Hessienne et le détérminant Hessien des fonctions suivantes, en tout point et puis au point indiqué :

a) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ en $(1,-1)$

b) $g(\varphi,\theta) = \varphi\sin\theta - \theta\sin\varphi$ en $(0,\frac{\pi}{2})$

c) $h(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ en $(0,1,2)$

d) $F(u,v) = \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$ en $(1,1)$

Exercice 26 – Laplacien
Calculer le Laplacien des fonctions de l'Exercice 25 en tout point, puis au point indiqué.

Exercice 27 – Fonctions harmoniques
Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquels la fonction $u(x,y,t) = x^2 + y^2 - c^2t^2$ est harmonique.

Exercice 28 – Laplacien
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et posons $F(x,y) = f(x-2y)$.

a) Calculer le Laplacien de F en (x,y), c'est-à-dire la valeur $\Delta F(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$.

b) Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = 25(x-2y)^4$.

Exercice 29 – Formule de Taylor
Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour du point indiqué :

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ autour de $(0,0)$

b) $g(x,y) = \ln(xy^2+1)$ autour de $(1,1)$ et puis de $(1,-1)$

c) $h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}$ autour de $(0,0)$ et puis de $(1,1)$

d) $u(x,y,z) = 3 + z\,\sin(\pi/2 + x + y^2)$ autour de $(0,0,0)$

Exercice 30 – Approximation
La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts), où E est la différence de potentiel électrique (en volt) et R est la résistance (en ohm). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E decroît de 5 volt et R de 0.2 ohm ? Comparer les résultats obtenus par le calcul exact avec l'approximation fournie par la différentielle de $P = P(E,R)$.

TD 6 – EXTREMA LOCAUX

Exercice 31 – Rappel : extrema locaux de fonctions d'une variable réelle
Pour la fonction réelle

$$f(x) = \ln(2 - 2x^2 + x^4),$$

trouver le domaine de définition et les points critiques. Ensuite déteminer le signe de f'' dans les points critiques : la fonction admet-elle des extrema locaux ?

Exercice 32 – Points critiques et extrema
Pour chacune des fonctions suivantes, trouver et étudier les points critiques. La fonction admet-elle des extrema locaux ?

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

b) $g(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

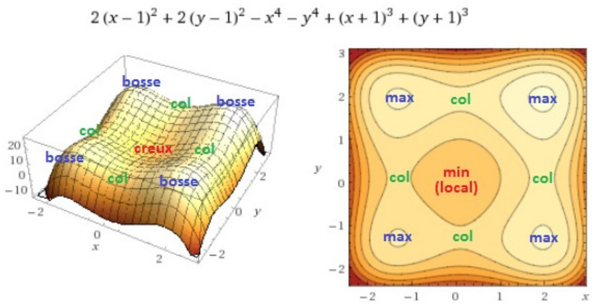
c) $h(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

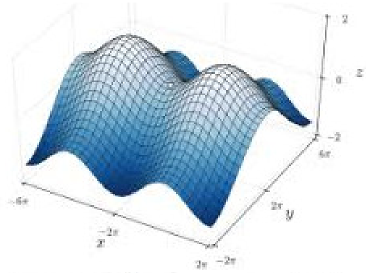
d) $F(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^3$

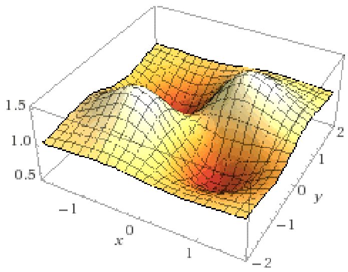
e) $G(x, y) = \ln(2 + x^2 - 2xy + 6y^2)$

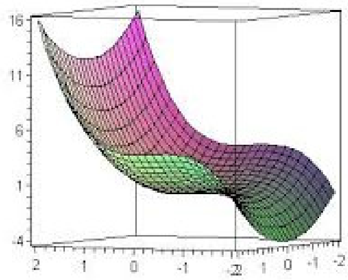
f) $H(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 - 2x + 2y^2}$

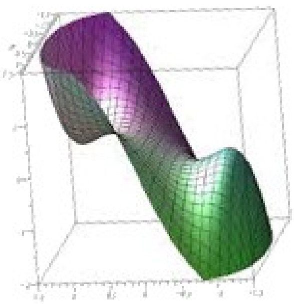
Exercice 33 – Points critiques et extrema
Pour les fonctions representées par les graphes suivantes, indiquer tous les points critiques et les extrema locaux :

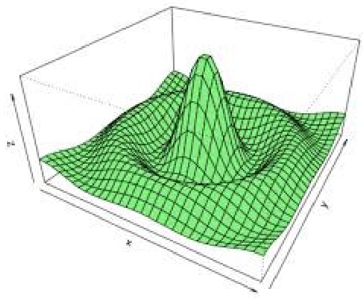
a) 

d) 

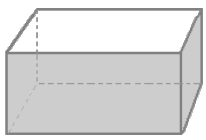
b) 

e) 

c) 

f) 

Exercice 34 – Application des extrema : optimisation
On veut construire une boite en forme de parallélépipède rectangle (ouverte en haut) de volume $4\,m^3$, avec base et faces d'aire totale minimale.
Quelles dimensions doit-on prendre pour la boite ?



TD 7 – INTÉGRALES DOUBLES ET TRIPLES, AIRE ET VOLUME

Exercice 35 – Intégrales doubles
Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3)(y^2+y^4)\,dx\,dy$, où $D=[0,1]\times[0,1]$.

b) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3+y^2+y^4)\,dx\,dy$, où $D=[0,1]\times[0,1]$.

c) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3+y^2+y^4)\,dx\,dy$, où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.

d) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3y^2+y^4)\,dx\,dy$, où D est délimité par $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.

e) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy$, où D est le triangle plein $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant\pi\}$.

f) $\displaystyle\iint_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$, où $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1\}$ est un quart du disque unité.

g) $\displaystyle\iint_D x^2\,dx\,dy$, où $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ est un secteur d'anneau.

Exercice 36 – Aire de surfaces planes
Calculer l'aire des surfaces S suivantes :

a) S est la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation $y=x$ et $y^2=x$.

b) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y^2/2\leqslant x\leqslant 2\}$.

c) S est la partie du plan délimitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. [*Poser* $x=2\rho\cos\varphi$ *et* $y=3\rho\sin\varphi$.]

Exercice 37 – Intégrales triples
Calculer les intégrales triples suivantes :

a) $\displaystyle\iiint_\Omega (1+x^3)(2y+y^2)(z+6z^3)\,dx\,dy\,dz$, où $\Omega=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

b) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^3y^2z-xy^2z^3)\,dx\,dy\,dz$, où $\Omega=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

c) $\displaystyle\iiint_\Omega x^2y\,e^{xyz}\,dx\,dy\,dz$, où $\Omega=[0,1]\times[0,2]\times[-1,1]$.

d) $\displaystyle\iiint_B \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, où B est la boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 centrée en l'origine.

Exercice 38 – Volumes
Calculer le volume des ensembles $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ suivants :

a) Ω est le tronc de cylindre d'équation $x^2+y^2=R^2$, pour $z\in[0,H]$.

b) Ω est le recipient délimité en bas par le paraboloïde d'équation $z=x^2+y^2$ et en haut par le disque $D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ z=1\}$. [*Utiliser les coordonnées cylindriques.*]

TD 8 – MOYENNE ET CENTRE DE MASSE

Exercice 39 – Quantité totale et moyenne
Une substance de concentration $f(x,y,z) = \frac{1}{z+1}$ occupe le recipient Ω délimité en bas par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et en haut par le disque $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ z=1\}$. Trouver la quantité totale de substance contenue dans Ω et la quantité moyenne.

Exercice 40 – Centre de masse

a) Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

b) Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

c) Calculer la masse totale du cube $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$ ayant pour densité de masse $\mu(x,y,z) = x^2y + xz^2$. Calculer ensuite le centre de masse du cube.

Exercice 41 – Culbuto homogène en équilibre

Un *culbuto* est un objet avec base arrondie fait de telle manière que si on le déplace de la position verticale il y revient en oscillant.

[Photo : MONSIEUR COLBUTO de HIBAI AGORRIA MUNITIS]

Considerons le culbuto homogène constitué d'une demi-boule de rayon 1 surmontée d'un cône de hauteur $a > 0$. Nous voulons trouver les valeurs de a pour lesquelles le culbuto revient à l'équilibre en position verticale, en sachant que cela arrive si le centre de masse G se trouve <u>strictement en dessous</u> du plan qui sépare la demi-boule du cône.

Soit K_a l'ensemble des points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ avec $-1 \leqslant z \leqslant a$ et tels que

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \quad \text{(demi-boule)}, \\ x^2+y^2 \leqslant \left(1 - \dfrac{z}{a}\right)^2 & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant a \quad \text{(cône plein)}. \end{cases}$$

a) Dessiner K_a et en calculer le volume.

b) Pour tout $z \in [-1,a]$, soit D_z le disque contenu dans K_a à hauteur z fixée. Dessiner D_z, trouver son rayon et calculer son aire.

c) Trouver le centre de masse de K_a, en sachant qu'il se trouve sur l'axe $\vec{Oz}$.

d) Trouver les valeurs de $a > 0$ pour que le culbuto K_a revienne à l'équilibre en position verticale.