TD 2 – GRAPHE DE FONCTIONS, COMPOSÉES

Exercice 6 – Lignes de niveau et graphe
Trouver les lignes de niveau des fonctions suivantes et dessiner celles des niveaux indiqués.
Ensuite, dessiner le graphe de f en remontant chaque ligne de niveau à son hauteur.

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 2, et 3.

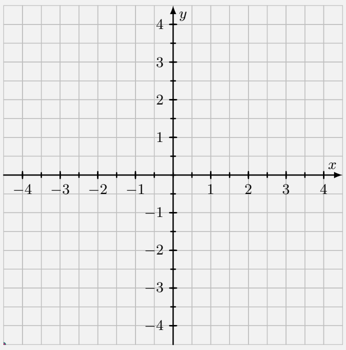
b) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 4 et 9.

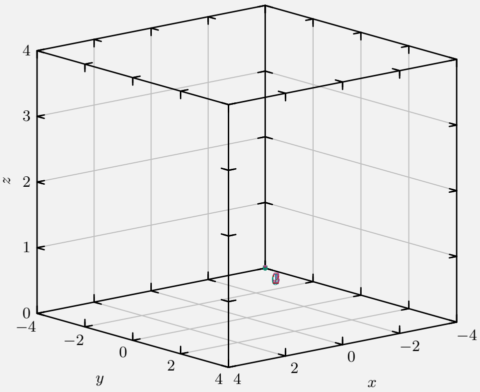
c) $f(x, y) = \dfrac{2y}{x}$ (avec $x \neq 0$), dessiner les lignes des niveaux 0, 1, 2, -1 et -2.

Corrigé

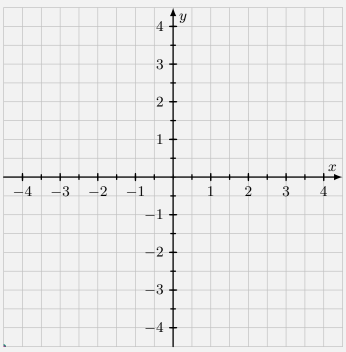
On note $L_f(a)$ la ligne de niveau $a \in \mathbb{R}$ de la fonction $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

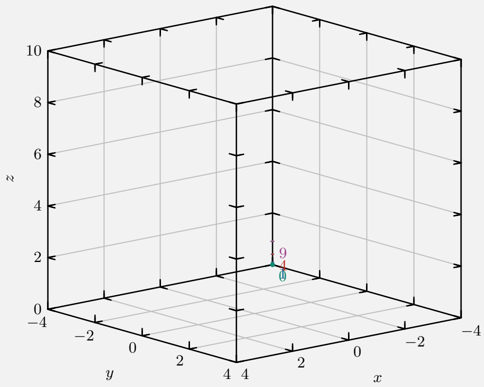
a) $$L_f(a) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = a\right\} = \begin{cases} \text{cercle de centre } O \text{ et de rayon } a & \text{si } a > 0 \\ (0, 0) & \text{si } a = 0 \\ \varnothing & \text{si } a < 0 \end{cases}$$



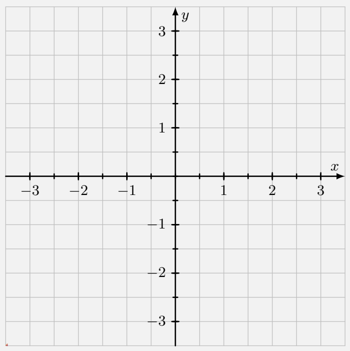


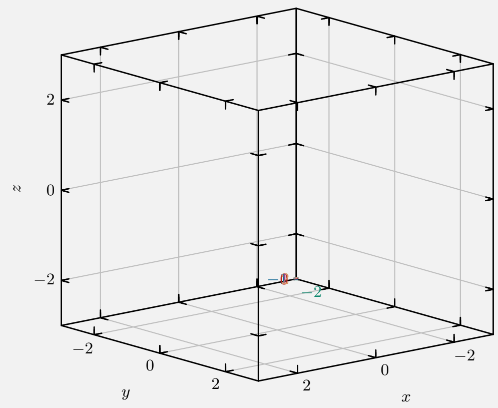
b) $$L_f(a) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = a\right\}$$
$$= \begin{cases} \text{ellipse de centre 0, de demi axes } \sqrt{a} \text{ sur } Ox \text{ et } \frac{\sqrt{a}}{2} \text{ sur } Oy & \text{si } a > 0 \\ (0, 0) & \text{si } a = 0 \\ \varnothing & \text{si } a < 0 \end{cases}$$





c) $$L_f(a) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2y}{x} = a\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid y = \frac{a}{2}x\right\}$$





Exercice 7 – Graphe de fonctions
Trouver à quels graphes correspondent les fonctions suivantes.

a) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

b) $f(x, y) = \frac{2y}{x}$

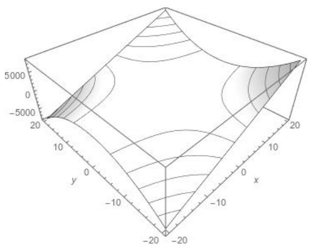
c) $f(x, y) = xy^2$

d) $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$

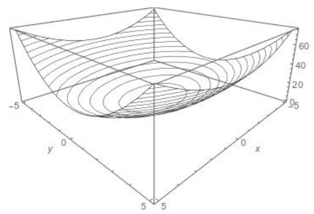
e) $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$

f) $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$

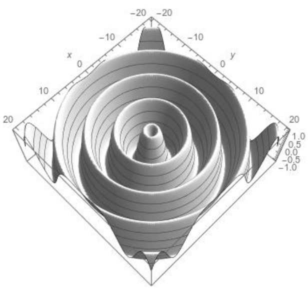
A)



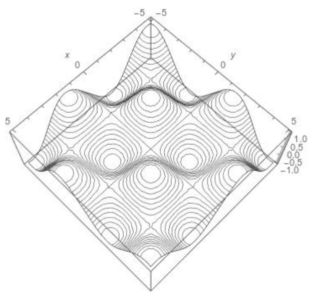
C)



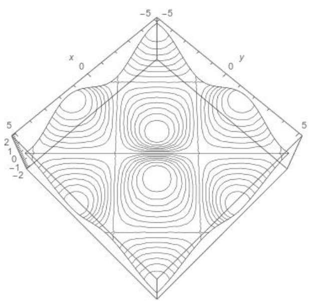
E)



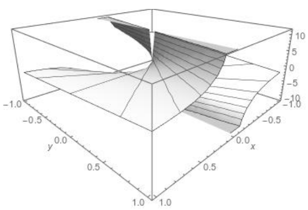
B)



D)



F)



Corrigé

Pour répondre (en faisant le moins de calculs possibles), on va essayer d'identifier à quel graphes correspondent les fonctions :

- en calculant leurs lignes de niveau et en les comparant à celles désinée sur les graphes ;
- en mettant en évidence des propriétés interessantes.

Remarquons que les fonctions a), b), c) sont non bornées tandis que les fonctions d), e), f) le sont. On en déduit déjà les correspondances fonctions-graphes : (a, b, c)-(A, C, F) et (d, e, f)-(B, D, E)

a) Graphe C)
En effet, vu la remarque précédente, le graphe de la fonction a) est A, C ou F. Les lignes de niveau de cette fonction sont des ellipses, donc la seule possibilitést le graphe C).

b) Graphe F)
On a ecore le choix entre les graphes A) et F). Comme les lignes de niveau de la focntion sont

$$L_a(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash x = 0) \mid \frac{2y}{x} = a\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{x = 0\}) \mid 2y = ax\},$$

c'est-à-dire des droites, la seule possibilité est le graphe F).

c) Graphe A)
C'est la seule possibilité qui reste ;) (vous pouvez aussi vous amuser à calculer les lignes de niveau pour vérifier).

d) Graphe D)
En effet, on a le choix entre les graphes B), D) et E). Si on réalise une coupe dans le plan d'équation $x + y = 0$, on obtient $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) = \sin(x) + \sin(-x) = 0$. La seule possibilité est donc le graphe D).

e) Graphe B)
On peut refaire exactement le même raisonnement que précédement mais cette fois ci en faisant une coupe dans le plan d'équation $x = 0$. La seule possibilité est donc le graphe B).

f) Graphe E)
C'est la seule possibilité qui reste ;). On peut aussi argumenter en disant que c'est la seule fonction à symétrie radiale et donc son graphe doit être invaviant par rotation d'axe Oz.

Exercice 8 – Composées
Calculer les possibles composées des fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(u, v) = \frac{u^2}{v^2}$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(z) = z^4 + 1 \qquad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(\rho, \theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$$

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t + 1, t - 1)$$

Corrigé

Le tableau ci-dessous résume les compositions possibles. Il se lit "ligne rond colonne". Par exemple, dans la case de la deuxième ligne et troisième colonne, on se pose la question si $F \circ g$ est possible.

$\overset{\curvearrowright}{\circ}$	f	F	g	h	γ
f	NON	NON	NON	oui	oui
F	NON	NON	NON	oui	oui
g	oui	oui	oui	NON	NON
h	NON	NON	NON	oui	oui
γ	oui	oui	oui	NON	NON

1. $f \circ h(\rho, \theta) = f\big(h(\rho, \theta)\big) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \sqrt{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2} = |\rho|$
2. $f \circ \gamma(t) = f\big(\gamma(t)\big) = f(t + 1, t - 1) = \sqrt{(t + 1)^2 + (t - 1)^2} = \sqrt{2t^2 + 2}$
3. $F \circ h(\rho, \theta) = F\big(h(\rho, \theta)\big) = F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \dfrac{(\rho\cos\theta)^2}{(\rho\sin\theta)^2} = \left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \dfrac{1}{(\tan\theta)^2}$
4. $F \circ \gamma(t) = F\big(\gamma(t)\big) = F(t + 1, t - 1) = \dfrac{(t + 1)^2}{(t - 1)^2} = \left(\dfrac{t + 1}{t - 1}\right)^2$
5. $g \circ f(x, y) = g\big(f(x, y)\big) = f(x, y)^4 + 1 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^4 + 1 = \left(x^2 + y^2\right)^2 + 1$
6. $g \circ F(u, v) = g\big(F(u, v)\big) = F(u, v)^4 + 1 = \left(\dfrac{u^2}{v^2}\right)^4 + 1 = \dfrac{u^8}{v^8} + 1$
7. $g \circ g(z) = g\big(g(z)\big) = g(z)^4 + 1 = \left(z^4 + 1\right)^4 + 1$

8. $h \circ h(\rho,\theta) = h\big(h(\rho,\theta)\big) = h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \big(\rho\cos\theta\cos(\rho\sin\theta), \rho\cos\theta\sin(\rho\sin\theta)\big)$
9. $h \circ \gamma(t) = h\big(\gamma(t)\big) = h(t+1, t-1) = \big((t+1)\cos(t-1), (t+1)\sin(t-1)\big)$
10. $\gamma \circ f(x,y) = \gamma\big(f(x,y)\big) = \big(f(x,y)+1, f(x,y)-1\big) = \left(\sqrt{x^2+y^2}+1, \sqrt{x^2+y^2}-1\right)$
11. $\gamma \circ F(u,v) = \gamma\big(F(u,v)\big) = \big(F(u,v)+1, F(u,v)-1\big) = \left(\dfrac{u^2}{v^2}+1, \dfrac{u^2}{v^2}-1\right)$
12. $\gamma \circ g(z) = \gamma\big(g(z)\big) = \big(g(z)+1, g(z)-1\big) = \big((z^4+1)+1, (z^4+1)-1\big) = \big(z^4+2, z^4\big)$

Exercice 9 – « Décomposées »
Exprimer les fonctions suivantes comme composées de fonctions élémentaires :

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

b) $g(x,y) = e^{\sin(xy)}$

c) $F(x,y,z) = \sin(x^2+3yz)$

d) $G(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$

Corrigé

a) $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, $\quad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{f_3} \mathbb{R}_+$, $\quad f_1(x,y) = (x^2, y^2)$, $\quad f_2(u,v) = u+v$, $\quad f_3(t) = \sqrt{t}$

b) $g = g_3 \circ \sin \circ g_1$, $\quad \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g_1} \mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R} \xrightarrow{g_3} \mathbb{R}_+$, $\quad f_1(x,y) = xy$, $\quad f_3(t) = e^t$

c) $F = \sin \circ F_1$, $\quad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{F_1} \mathbb{R} \xrightarrow{\sin} \mathbb{R}$, $\quad F_1(x,y,z) = x^2+3yz$,

d) $G = G_2 \circ G_1$, $\quad \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\} \xrightarrow{G_1} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{G_2} \mathbb{R}_+^*$, $\quad G_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $\quad G_2(t) = \dfrac{1}{t}$

Exercice 10 – Changement de coordonnées de fonctions
Exprimer les fonctions suivantes en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et sphériques (r, θ, φ).

a) $f(x,y,z) = z(x^2+y^2)$

b) $g(x,y,z) = x(y^2+z^2)$

c) $h(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$

d) $u(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 + z^4$

e) $v(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy$

f) $w(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

g) $F(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

h) $G(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

i) $H(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+z}{x^2+y^2+z^2}$

j) $U(x,y,z) = xy + z^2$

k) $V(x,y,z) = (x^2+y^2)\, e^{z^2}$

Corrigé

a) $$\begin{aligned} f(x,y,z) = z(x^2+y^2) &= z\big[(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2\big] = z\rho^2 = \tilde{f}(\rho,\varphi,z) \\ &= r\cos\theta\big[(r\cos\varphi\sin\theta)^2 + (r\sin\varphi\sin\theta)^2\big] = r\cos\theta\big[(r\sin\theta)^2\big] \\ &= r^3\cos\theta\,\sin^2\theta = \hat{f}(r,\theta,\varphi) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} g(x,y,z) = x(y^2+z^2) &= \rho\cos\varphi\big[(\rho\sin\varphi)^2 + z^2\big] = \rho\cos\varphi\big(\rho^2\sin^2\varphi + z^2\big) = \tilde{g}(\rho,\varphi,z) \\ &= r\cos\varphi\,\sin\theta\big[(r\sin\varphi\,\sin\theta)^2 + (r\cos\theta)^2\big] \\ &= r^3\cos\varphi\,\sin\theta\big(\sin^2\varphi\,\sin^2\theta + \cos^2\theta\big) = \hat{g}(r,\theta,\varphi) \end{aligned}$$

c) $h(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} = z\sqrt{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2} = z\rho = \tilde{h}(\rho,\varphi,z)$

$= r\cos\theta\sqrt{(r\cos\varphi\sin\theta)^2+(r\sin\varphi\sin\theta)^2} = r\cos\theta\sqrt{r^2\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}$

$= r^2\cos\theta\,\sin\theta = \hat{h}(r,\theta,\varphi) \qquad \big(0\leqslant\theta\leqslant\pi \quad\Rightarrow\ \sin\theta\geqslant 0 \quad\Rightarrow\ \sqrt{\sin^2\theta} = \sin\theta\big)$

d) $u(x,y,z) = (x^2+y^2)^2+z^4 = \big[(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2\big]^2+z^4 = \rho^4+z^4 = \tilde{u}(\rho,\varphi,z)$

$= \big[(r\cos\varphi\sin\theta)^2+(r\sin\varphi\sin\theta)^2\big]^2+(r\cos\theta)^4 = \big(r^2\sin^2\theta\big)^2+r^4\cos^4\theta$

$= r^4\big(\sin^4\theta+\cos^4\theta\big) = \hat{u}(r,\theta,\varphi)$

e) $v(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy = \rho^2+z^2-\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi$

$= \rho^2(1-\sin\varphi\cos\varphi)+z^2 = \tilde{v}(\rho,\varphi,z)$

$= r^2-r\cos\varphi\sin\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta = r^2(1-\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta) = \hat{v}(r,\theta,\varphi)$

f) $w(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{\rho^2-z^2}{\rho^2+z^2} = \tilde{w}(\rho,\varphi,z)$

$= \dfrac{r^2\cos^2\varphi\,\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\,\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta}{r^2\cos^2\varphi\,\sin^2\theta+r^2\sin^2\varphi\,\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta} = \dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$= 2\sin^2\theta-1 = \hat{w}(r,\theta,\varphi)$

g) $F(x,y,z) = \ln\big(x^2+y^2+z^2\big) = \ln\big(\rho^2+z^2\big) = \tilde{F}(\rho,\varphi,z)$

$= \ln\big(r^2\big) = \hat{F}(r,\varphi,\theta)$

h) $G(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 = \rho^2-z^2 = \tilde{G}(\rho,\varphi,z)$

$= (r\sin\theta)^2-(r\cos\theta)^2 = r^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta) = -r^2\cos(2\theta) = \hat{G}(r,\varphi,\theta)$

i) $H(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+z}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{\rho+z}{\rho^2+z^2} = \tilde{H}(\rho,\varphi,z)$

$= \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{r} = \hat{H}(r,\varphi,\theta)$

j) $U(x,y,z) = xy+z^2 = \rho^2\cos\varphi\sin\varphi+z^2 = \tilde{U}(\rho,\varphi,z)$

$= r^2(\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta+\cos^2\theta) = \hat{U}(r,\varphi,\theta)$

k) $V(x,y,z) = (x^2+y^2)\,e^{z^2} = \rho^2\,e^{z^2} = \tilde{V}(\rho,\varphi,z)$

$= r^2\sin^2\theta\,e^{r^2\cos^2\theta} = \hat{V}(r,\varphi,\theta)$