TD 5 – HESSIENNE, LAPLACIEN, TAYLOR

Exercice 25 – Matrice Hessienne
Calculer la matrice Hessienne et le détérminant Hessien des fonctions suivantes, en tout point et puis au point indiqué :

a) $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$ en $(1,-1)$

b) $g(\varphi,\theta) = \varphi\sin\theta - \theta\sin\varphi$ en $(0,\frac{\pi}{2})$

c) $h(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ en $(0,1,2)$

d) $F(u,v) = \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$ en $(1,1)$

Corrigé

a) Pour $f(x,y) = x^3y + x^2y^2 + xy^3$, on a $\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y + 2xy^2 + y^3 \\ x^3 + 2x^2y + 3xy^2 \end{pmatrix}$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy + 2y^2 & 3x^2 + 4xy + 3y^2 \\ 3x^2 + 4xy + 3y^2 & 2x^2 + 6xy \end{pmatrix} \qquad H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(x,y) = 4xy(3x+y)(3y+x) - (3x^2+4xy+3y^2)^2 \qquad \det H_f(1,-1) = 16 - 4 = 12.$$

b) Pour $g(\varphi,\theta) = \varphi\sin\theta - \theta\sin\varphi$, on a $\vec{\nabla} g(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta - \theta\cos\varphi \\ \varphi\cos\theta - \sin\varphi \end{pmatrix}$

$$H_g(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \theta\sin\varphi & \cos\theta - \cos\varphi \\ \cos\theta - \cos\varphi & -\varphi\sin\theta \end{pmatrix} \qquad H_g(0,\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det H_g(\varphi,\theta) = -\varphi\theta\sin\varphi\sin\theta - (\cos\theta - \cos\varphi)^2 \qquad \det H_g(0,\tfrac{\pi}{2}) = -(-1)^2 = -1.$$

c) Pour $h(x,y,z) = xy^2 + yz^2$ on a $\vec{\nabla} h(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + z^2 \\ 2yz \end{pmatrix}$

$$H_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 2y & 2x & 2z \\ 0 & 2z & 2y \end{pmatrix} \qquad H_h(0,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det H_h(x,y,z) = -2y \det \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 0 & 2y \end{pmatrix} = n - 2y(2y)^2 = -8y^3 \qquad \det H_h(0,1,2) = -8.$$

d) Pour $F(u,v) = \dfrac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$ on a $\vec{\nabla} F(u,v) = \dfrac{4}{(u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} uv^2 \\ -u^2v \end{pmatrix}$

$$H_F(u,v) = \frac{4}{(u^2+v^2)^3}\begin{pmatrix} v^2(v^2-3u^2) & 2uv(u^2-v^2) \\ 2uv(u^2-v^2) & u^2(3v^2-u^2) \end{pmatrix} \qquad H_F(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det H_F(u,v) = \frac{16}{(u^2+v^2)^6}\Big(u^2v^2(v^2-3u^2)(3v^2-u^2) - 4u^2v^2(u^2-v^2)^2\Big) \qquad \det H_F(1,1) = -1.$$

Exercice 26 – Laplacien
Calculer le Laplacien des fonctions de l'Exercice 25 en tout point, puis au point indiqué.

Corrigé

a) $\Delta f(x,y) = 6xy + 2y^2 + 2x^2 + 6xy = 2x^2 + 12xy + 2y^2$ et $\Delta f(1,-1) = -8$.

b) $\Delta g(\varphi,\theta) = \theta\sin\varphi - \varphi\sin\theta$ et $\Delta g(0,\frac{\pi}{2}) = 0$.

c) $\Delta h(x,y,z) = 2x + 2y$ et $\Delta h(0,1,2) = 2$.

d) $\Delta F(u,v) = \dfrac{4}{(u^2+v^2)^3}\big(v^2(v^2-3u^2) + u^2(3v^2-u^2)\big) = \dfrac{4(v^4-u^4)}{(u^2+v^2)^3}$ et $\Delta F(1,1) = 0$.

Exercice 27 – Fonctions harmoniques

Trouver les valeurs de $c \in \mathbb{R}^*$ pour lesquels la fonction $u(x,y,t) = x^2 + y^2 - c^2t^2$ est harmonique.

Corrigé

La fonction u est de classe C^2 sur tout $\mathbb{R}^3$, car c'est un polynôme. Alors, il faut trouver $c \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Delta u(x,y,t) = 0$ pour tout $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$. Calculons :

$$\vec{\nabla} u(x,y,t) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2c^2t \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \Delta u(x,y,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 + 2 - 2c^2 = 4 - 2c^2.$$

Alors u est harmonique si $\Delta u(x,y,t) = 2(2-c^2) = 0$, c'est-à-dire si $c = \pm\sqrt{2}$.

Exercice 28 – Laplacien

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et posons $F(x,y) = f(x-2y)$.

a) Calculer le Laplacien de F en (x,y), c'est-à-dire la valeur $\Delta F(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$.

b) Déterminer toutes les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = 25(x-2y)^4$.

Corrigé

a) Calculons d'abord les dérivées partielles de F :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x-2y)\frac{\partial(x-2y)}{\partial x} = f'(x-2y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(x-2y)\frac{\partial(x-2y)}{\partial y} = -2f'(x-2y).$$

Ensuite les dérivées doubles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(f'(x-2y)\big) \\ &= f''(x-2y)\frac{\partial(x-2y)}{\partial x} = f''(x-2y) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) &= -2\frac{\partial}{\partial y}\big(f'(x-2y)\big) \\ &= -2f''(x-2y)\frac{\partial(x-2y)}{\partial y} = (-2)^2 f''(x-2y) = 4f''(x-2y).\end{aligned}$$

En conclusion : $\Delta f(x,y) = 5f''(x-2y)$.

b) On cherche les fonctions f pour lesquelles on a $5f''(x-2y) = 25(x-2y)^4$ pour toute $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si on pose $z = x-2y$, on a

$$\begin{aligned} 5f''(z) = 25z^4 \quad &\iff \quad f'(z) = \int 5z^4\,dz = z^5 + a, \qquad a \in \mathbb{R} \\ &\iff \quad f(z) = \int (z^5 + a)\,dz = \frac{1}{6}z^6 + az + b, \qquad a,b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\Delta F(x,y) = 25(x-2y)^4 \iff f(z) = \frac{1}{6}z^6 + az + b$ pour tout $a,b \in \mathbb{R}$.

Exercice 29 – Formule de Taylor

Donner la partie principale du développement de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour du point indiqué :

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ autour de $(0,0)$

b) $g(x,y) = \ln(xy^2+1)$ autour de $(1,1)$ et puis de $(1,-1)$

c) $h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}$ autour de $(0,0)$ et puis de $(1,1)$

d) $u(x,y,z) = 3 + z\,\sin(\pi/2 + x + y^2)$ autour de $(0,0,0)$

Corrigé

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$ $\qquad f(0,0) = 1$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin x}{\cos y} \\ \dfrac{\cos x \sin y}{\cos^2 y} \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\cos x}{\cos y} & -\dfrac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} \\ -\dfrac{\sin x \sin y}{\cos^2 y} & \dfrac{\cos x(1+\sin^2 y)}{\cos^3 y} \end{pmatrix} \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout (x,y) proche de $(0,0)$ on a : $\dfrac{\cos x}{\cos y} = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}y^2 + o(x^2+y^2)$.

b) $g(x,y) = \ln(xy^2+1)$ $\qquad g(1,1) = \ln 2$ et $g(1,-1) = \ln 2$.

$$\vec{\nabla} g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y^2}{xy^2+1} \\ \dfrac{2xy}{xy^2+1} \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} g(1,1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} g(1,-1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$H_g(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{y^4}{(xy^2+1)^2} & \dfrac{2y}{(xy^2+1)^2} \\ \dfrac{2y}{(xy^2+1)^2} & \dfrac{2x(1-xy^2)}{(xy^2+1)^3} \end{pmatrix} \qquad H_g(1,1) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H_g(1,-1) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout (x,y) proche de $(1,1)$ on a :

$$\ln(xy^2+1) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) + (y-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)(y-1) + o((x-1)^2 + (y-1)^2),$$

et pour tout (x,y) proche de $(1,-1)$ on a :

$$\ln(xy^2+1) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - (y+1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)(y+1) + o((x-1)^2 + (y+1)^2).$$

c) $h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}$ $\qquad h(0,0) = 1 \qquad h(1,1) = e^5$

$$\vec{\nabla} h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}\begin{pmatrix} 3y+1 \\ 3x+2y \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} h(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} h(1,1) = \begin{pmatrix} 4e^5 \\ 5e^5 \end{pmatrix}$$

$$H_h(x,y) = e^{x+3xy+y^2}\begin{pmatrix} (3y+1)^2 & (3x+2y)(3y+1)+3 \\ (3x+2y)(3y+1)+3 & (3x+2y)^2+2 \end{pmatrix}$$

$$H_h(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad H_h(1,1) = \begin{pmatrix} 16e^5 & 23e^5 \\ 23e^5 & 27e^5 \end{pmatrix}$$

On a donc pour tout (x,y) proche de $(0,0)$:

$$e^{x+3xy+y^2} = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + 3xy + y^2 + o(x^2+y^2)$$

et pour tout (x,y) proche de $(1,1)$ on trouve :

$$\begin{aligned} e^{x+3xy+y^2} = e^5\Big(1 + 4(x-1) + 5(y-1) + 8(x-1)^2 + 23(x-1)(y-1) + \tfrac{27}{2}(y-1)^2\Big) \\ + o\big((x-1)^2 + (y-1)^2\big) \end{aligned}$$

d) $u(x,y,z) = 3 + z\sin\big(\pi/2 + x + y^2\big) = 3 + z\cos\big(x+y^2\big)$ $\qquad u(0,0,0) = 3$

$$\vec{\nabla} u(x,y,z) = \begin{pmatrix} -z\sin(x+y^2) \\ -2yz\sin(x+y^2) \\ \cos(x+y^2) \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} u(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad H_u(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_u(x,y,z) = -\begin{pmatrix} z\cos(x+y^2) & 2yz\cos(x+y^2) & \sin(x+y^2) \\ 2yz\cos(x+y^2) & 2z\big(\sin(x+y^2) + 2y^2\cos(x+y^2)\big) & 2y\sin(x+y^2) \\ \sin(x+y^2) & 2y\sin(x+y^2) & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc pour tout (x,y,z) proche de $(0,0,0)$:

$$3 + z\sin\big(\pi/2 + x + y^2\big) = 3 + z + o\big(x^2+y^2+z^2\big)$$

Exercice 30 – Approximation

La puissance utilisée dans une résistance électrique est donnée par $P = E^2/R$ (en watts), où E est la différence de potentiel électrique (en volt) et R est la résistance (en ohm). Si $E = 200$ volt et $R = 8$ ohm, quelle est la modification de la puissance si E decroît de 5 volt et R de 0.2 ohm ? Comparer les résultats obtenus par le calcul exact avec l'approximation fournie par la différentielle de $P = P(E,R)$.

Corrigé

Pour la fonction $P(E,R) = \dfrac{E^2}{R}$, posons :

$$\begin{aligned}
&E_0 = 200, \quad R_0 = 8, \quad P_0 = E_0^2/R_0 = 200^2/8 = 5000,\\
&E = E_0 + \delta E \quad \text{et} \quad R = R_0 + \delta R, \qquad \text{avec} \quad \delta E = -5 \quad \text{et} \quad \delta R = -0,2.
\end{aligned}$$

Le calcul exact de $P - P_0$ donne :

$$P - P_0 = \frac{(E-0+\delta E)^2}{R_0 + \delta R)} - P_0 = \frac{195^2}{7,8} - 5000 = -125.$$

La formule de Taylor de la fonction $P(E,R)$ au premier ordre, au point (E_0, R_0), donne :

$$\begin{aligned}
P - P_0 &= dP_{(E_0,R_0)}(\delta E, \delta R) + o(\delta E, \delta R)\\
&\simeq \frac{\partial P}{\partial E}(E_0,R_0)\,\delta E + \frac{\partial P}{\partial R}(E_0,R_0)\,\delta E = \frac{2E_0}{R_0}\,\delta E - \frac{E_0^2}{R_0^2}\,\delta R\\
&= \frac{2\cdot 200}{8}\,(-5) - \frac{200^2}{8^2}\,(-0,2) = -250 + 125 = -125.
\end{aligned}$$

Remarque : les deux calculs donnent *exactement* le même résultat, mais ce n'est que par chance ! En effet, dans la formule de Taylor, le reste $o(\delta E, \delta R)$ est négligeable (tend vers zéro) seulement dans la limite $(\delta E, \delta R) \to (0,0)$ et non quand δE et δR sont fixés (même si petits à notre goût). Si on n'utilise pas une formule explicite (intégrale) pour estimer la grandeur de ce reste, les valeurs de $P - P_0$ et de $dP_{(E_0,R_0)}(\delta E, \delta R)$ peuvent être en réalité très différents !
Pour être "mathématiquement" corrects, il faudrait utiliser la formule de Taylor uniquement pour estimer l'**erreur relative** $\left|\dfrac{P-P_0}{P_0}\right|$ en fonction des erreurs relatives $\left|\dfrac{E-E_0}{E_0}\right|$ et $\left|\dfrac{R-R_0}{R_0}\right|$, comme dans l'exemple de cours.