TD 7 – INTÉGRALES DOUBLES ET TRIPLES, AIRE ET VOLUME

Exercice 35 – Intégrales doubles
Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3)(y^2+y^4)\,dx\,dy,$ où $D=[0,1]\times[0,1]$.

b) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3+y^2+y^4)\,dx\,dy,$ où $D=[0,1]\times[0,1]$.

c) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3+y^2+y^4)\,dx\,dy,$ où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.

d) $\displaystyle\iint_D (1+x+x^3y^2+y^4)\,dx\,dy,$ où D est délimité par $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.

e) $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy,$ où D est le triangle plein $D=\big\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant\pi\big\}$.

f) $\displaystyle\iint_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy,$ où $D=\big\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1\big\}$ est un quart du disque unité.

g) $\displaystyle\iint_D x^2\,dx\,dy,$ où $D=\big\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\big\}$ est un secteur d'anneau.

Corrigé

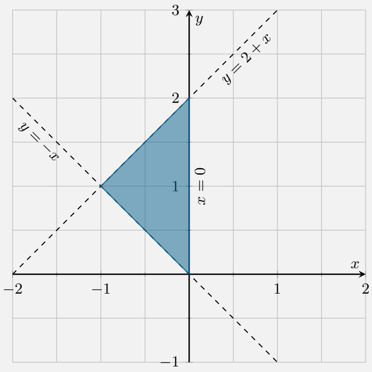
a) $D=[0,1]\times[0,1]$

$$\begin{aligned}\iint_D (1+x+x^3)(y^2+y^4)\,dx\,dy &= \int_0^1 (1+x+x^3)dx\int_0^1 (y^2+y^4)dy\\ &= \left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1\left[\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right]_0^1\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{14}{15}\end{aligned}$$

b) $D=[0,1]\times[0,1]$

$$\begin{aligned}\iint_D (1+x+x^3+y^2+y^4)\,dx\,dy &= \iint_D (1+x+x^3)dxdy+\iint_D (y^2+y^4)dxdy\\ &= \int_0^1\int_0^1 (1+x+x^3)dxdy+\int_0^1\int_0^1 (y^2+y^4)dxdy\\ &= \int_0^1 (1+x+x^3)dx\int_0^1 dy+\int_0^1 dx\int_0^1 (y^2+y^4)dy\\ &= \left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1\Big[y\Big]_0^1+\Big[x\Big]_0^1\left[\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\right]_0^1\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{137}{60}\end{aligned}$$

c) $D=\big\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 0, -x\leqslant y\leqslant x+2\big\}$



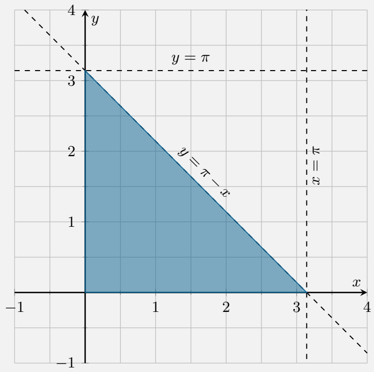
$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D (1+x+x^3+y^2+y^4)\,dx\,dy \\
&= \int_{x=-1}^{x=0}\left(\int_{y=-x}^{y=x+2}(1+x+x^3+y^2+y^4)dy\right)dx \\
&= \int_{x=-1}^{x=0}\left[(1+x+x^3)y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5})\right]_{y=-x}^{y=x+2}dx \\
&= \int_{x=-1}^{x=0}\left((1+x+x^3)(x+2)+\frac{(x+2)^3}{3}+\frac{(x+2)^5}{5}\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\left((1+x+x^3)(-x)+\frac{(-x)^3}{3}+\frac{(-x)^5}{5}\right)\right)dx \\
&= \int_{x=-1}^{x=0}\left(2(1+x)^2+\frac{7x^3}{3}+\frac{(x+2)^3}{3}+2x^4+\frac{x^5}{5}+\frac{(x+2)^5}{5}\right)dx \\
&= \left[\frac{2(1+x)^3}{3}+\frac{7x^4}{12}+\frac{(x+2)^4}{12}+\frac{2x^5}{5}+\frac{x^6}{30}+\frac{(x+2)^6}{30}\right]_{x=-1}^{x=0} \\
&= \frac{2}{3}+\frac{2^4}{12}+\frac{2^6}{30}-\left(\frac{7}{12}+\frac{1}{12}-\frac{2}{5}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}\right)=\frac{19}{5}
\end{aligned}
$$

d) $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 0, -x\leqslant y\leqslant x+2\}$

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D (1+x+x^3y^2+y^4)\,dx\,dy \\
&= \int_{x=-1}^{x=0}\left(\int_{y=-x}^{y=x+2}(1+x+x^3y^2+y^4)dy\right)dx \\
&= \int_{x=-1}^{x=0}\left[(1+x)y+x^3\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5})\right]_{y=-x}^{y=x+2}dx \\
&= \int_{x=-1}^{x=0}\left((1+x)(x+2)+x^3\frac{(x+2)^3}{3}+\frac{(x+2)^5}{5}\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\left((1+x)(-x)+x^3\frac{(-x)^3}{3}+\frac{(-x)^5}{5}\right)\right)dx \\
&= \int_{x=-1}^{x=0}\left(2(1+x)^2+\frac{x^3}{3}\big((x+2)^3+x^3\big)+\frac{x^5}{5}+\frac{(x+2)^5}{5}\right)dx \\
&= \int_{x=-1}^{x=0}\left(2(1+x)^2+\frac{x^3}{3}\big(2x^3+6x^2+12x+8\big)+\frac{x^5}{5}+\frac{(x+2)^5}{5}\right)dx \\
&= \int_{x=-1}^{x=0}\left(2(1+x)^2+\frac{8x^3}{3}+4x^4+\frac{11x^5}{5}+\frac{(x+2)^5}{5}+\frac{2x^6}{3}\right)dx \\
&= \left[\frac{2(1+x)^3}{3}+\frac{2x^4}{3}+\frac{4x^5}{5}+\frac{11x^6}{30}+\frac{(x+2)^6}{30}+\frac{2x^7}{21}\right]_{x=-1}^{x=0} \\
&= \frac{2}{3}+\frac{2^6}{30}-\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+\frac{11}{30}+\frac{1}{30}-\frac{2}{21}\right)=\frac{92}{35}
\end{aligned}
$$

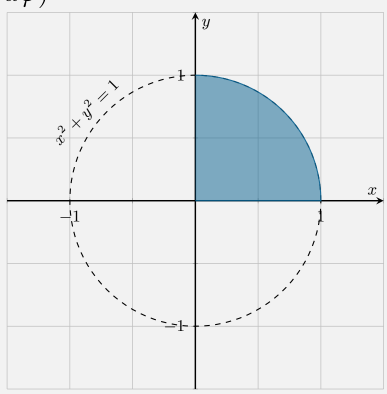
e) $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant\pi\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant \pi-x\}$

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \sin(x+y)\;dx\,dy \\
&= \int_{x=0}^{x=\pi}\left(\int_{y=0}^{y=\pi-x}\sin(x+y)dy\right)dx \\
&= \int_{x=0}^{x=\pi}\Big[-\cos(x+y)\Big]_{y=0}^{y=\pi-x}dx \\
&= \int_0^{\pi}\Big(-\cos(x+\pi-x)-\big(-\cos(x+0)\big)\Big)dx \\
&= \int_0^{\pi}(1+\cos x)dx = \Big[x+\sin x\Big]_0^{\pi} = \pi
\end{aligned}
$$



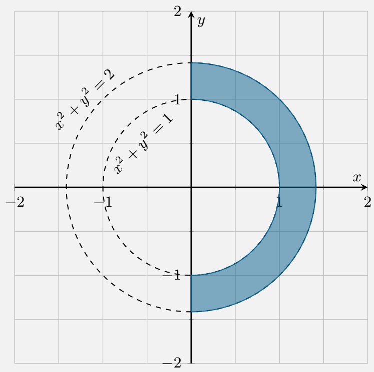
f) Pour cette intégrale le plus simple est de passer en coordonnées polaires. Le domaine cartésien $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$ est l'image du domaine polaire $\tilde{D} = \{(\rho,\varphi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\} = [0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$. On a donc (puisque $dxdy = \rho d\rho d\varphi$)

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (4-x^2-y^2)\;dx\,dy \\
&= \iint_{\tilde{D}} (4-\rho^2)\rho d\rho d\varphi \\
&= \int_0^1 (4-\rho^2)\rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\
&= \left[2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\Big[\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi = \frac{7\pi}{8}
\end{aligned}
$$



g) Ici aussi le plus simple est de passer en coordonnées polaires. Le domaine cartésien $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$ est l'image du domaine polaire $\tilde{D} = \{(\rho,\varphi) \mid 1 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2},\ -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2\} = [0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$. On a donc (puisque $dxdy = \rho d\rho d\varphi$)

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D x^2\;dx\,dy \\
&= \iint_{\tilde{D}} (\rho\cos\varphi)^2\rho d\rho d\varphi \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi \\
&= \int_1^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\varphi)+1}{2}d\varphi \\
&= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^{\sqrt{2}}\left[\frac{\sin(2\varphi)}{4}+\frac{\varphi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}
$$



Exercice 36 – Aire de surfaces planes

Calculer l'aire des surfaces S suivantes :

a) S est la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x$ et $y^2 = x$.

b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2/2 \leqslant x \leqslant 2\}$.

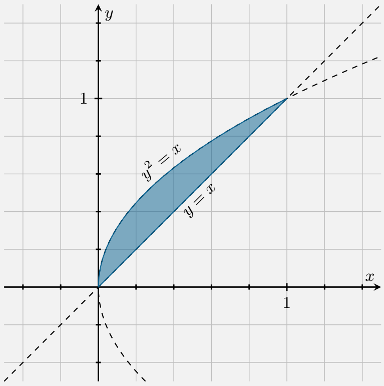
c) S est la partie du plan délimitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$. [*Poser* $x = 2\rho\cos\varphi$ *et* $y = 3\rho\sin\varphi$.]

Corrigé

On rappelle que si S est une partie bornée du plan, on a

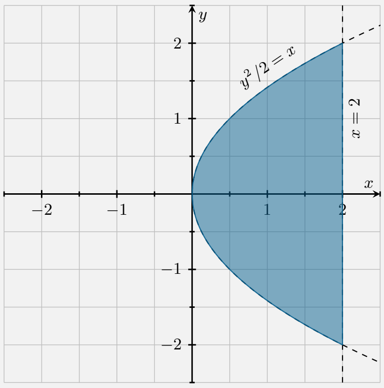
$$\mathrm{Aire}(S) = \iint\limits_S dxdy.$$

a) On a $D = \{(x, y) \mid x \in [y^2, y], y \in [0, 1]\}$. D'où



$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(S) &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \Big[x \Big]_{y^2}^{y} dy \\ &= \int_0^1 (y^2 - y) dy \\ &= \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

b) On a $D = \{(x, y) \mid y^2/2 \leqslant x \leqslant 2\} = \{(x, y) \mid x \in [y^2/2, 2], y \in [-2, 2]\}$. D'où



$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(S) &= \int_{-2}^{2} \left(\int_{y^2/2}^{2} dx \right) dy \\ &= \int_{-2}^{2} \Big[x \Big]_{y^2/2}^{2} dy \\ &= \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{y^2}{2} \right) dy \\ &= \left[2y - \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^{2} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

c) On a $D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1\}$. Notons

- $h : (\rho, \varphi) \mapsto (2\rho \cos \varphi, 3\rho \sin \varphi)$ le changement de variables suggéré dans l'énoncé ;
- $\tilde{S} = h^{-1}(S) = \{(\rho, \varphi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

On a alors

$$\mathrm{Aire}(S) = \iint\limits_S dxdy = \iint\limits_{\tilde{S}} |\det J_h(\rho, \varphi)| d\rho d\varphi,$$

où $J_h(\rho, \varphi)$ est la matrice jacobienne de h. Puisque

$$|\det J_h(\rho, \varphi)| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(2\rho\cos\varphi)}{\partial\rho} & \frac{\partial(2\rho\cos\varphi)}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial(3\rho\sin\varphi)}{\partial\rho} & \frac{\partial(3\rho\sin\varphi)}{\partial\varphi} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 2\cos\varphi & -2\rho\sin\varphi \\ 3\sin\varphi & 3\rho\cos\varphi \end{pmatrix} \right| = 6\rho,$$

on obtient

$$\mathrm{Aire}(S) = \iint\limits_{\tilde{S}} 6\rho d\rho d\varphi = 6 \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 6 \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 \Big[\varphi \Big]_0^{2\pi} = 6\pi.$$

Exercice 37 – Intégrales triples

Calculer les intégrales triples suivantes :

a) $\displaystyle\iiint_\Omega (1+x^3)(2y+y^2)(z+6z^3)\ dx\ dy\ dz,$ où $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

b) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^3y^2z - xy^2z^3)\ dx\ dy\ dz,$ où $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

c) $\displaystyle\iiint_\Omega x^2y\, e^{xyz}\ dx\ dy\ dz,$ où $\Omega = [0,1]\times[0,2]\times[-1,1]$.

d) $\displaystyle\iiint_B \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz,$ où B est la boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon 1 centrée en l'origine.

Corrigé

a) $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (1+x^3)(2y+y^2)(z+6z^3)\ dx\ dy\ dz &= \int_0^1 (1+x^3)dx \int_0^1 (2y+y^2)dy \int_0^1 (z+6z^3)dz \\ &= \left[x+\frac{x^4}{4}\right]_0^1 \left[y^2+\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \left[\frac{z^2}{2}+\frac{3z^4}{2}\right]_0^1 \\ &= \left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

b) $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (x^3y^2z - xy^2z^3)\ dx\ dy\ dz &= \iiint_\Omega x^3y^2z\ dx\ dy\ dz - \iiint_\Omega xy^2z^3\ dx\ dy\ dz \\ &= \int_0^1 x^3dx \int_0^1 y^2dy \int_0^1 zdz - \int_0^1 xdx \int_0^1 y^2dy \int_0^1 z^3dz \\ &= \int_0^1 x^3dx \int_0^1 y^2dy \int_0^1 zdz - \int_0^1 \tilde{z}d\tilde{z} \int_0^1 y^2dy \int_0^1 \tilde{x}^3d\tilde{x} \\ &= 0 \quad \text{(On a juste renommé les variables à la ligne précédente)}\end{aligned}$$

c) $\Omega = [0,1]\times[0,2]\times[-1,1]$

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega x^2y\, e^{xyz}\ dx\ dy\ dz &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_{z=-1}^{z} = 1x^2y\, e^{xyz} dz\right) dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2y\left[\frac{e^{xyz}}{xy}\right]_{-1}^1 dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^2 x\big(e^{xy}-e^{-xy}\big) dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 2x\sinh(xy)dy\right) dx \\ &= \int_0^1 2x\left[\frac{\cosh(xy)}{x}\right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 \big(2\cosh(2x)-2\big)dx \\ &= \Big[\sinh(2x)-2x\Big]_0^1 = \sinh(2)-2\end{aligned}$$

d) $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$ Notons

$$I = \iiint_B \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz$$

Considérons le changement de variables $h : ((x, y, z)) \mapsto (-x, y, z)$. On voit facilement que :

- $\tilde{B} = h^{-1}(B) = B$,
- $|\det J_h(x, y, z)| = |(-1) \cdot 1 \cdot 1| = 1$.

D'où

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\tilde{B}} \frac{(-x)y}{(-x)^2 + y^2 + z^2}\, dx\ dy\ dz \\ &= -\iiint_{B} \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\ dy\ dz \\ &= -I. \end{aligned}$$

Ce qui donne $2I = 0$ et donc $I = 0$.

On aurait aussi pu calculer I en passant en coordonnées sphériques.

Exercice 38 – Volumes

Calculer le volume des ensembles $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ suivants :

a) Ω est le tronc de cylindre d'équation $x^2 + y^2 = R^2$, pour $z \in [0, H]$.

b) Ω est le recipient délimité en bas par le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et en haut par le disque $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 1\}$. [*Utiliser les coordonnées cylindriques.*]

Corrigé

Afin d'illustrer l'intérêt des coordonnées cylindriques pour traiter des ensembles (surfaces, volumes) de révolution autour de l'axe des z, on compare ci-dessous le calcul de volumes en coordonnées cylindriques et cartésiennes.

a) **Calcul en coordonnées cylindriques ($dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$) :**

$\Omega = \big\{(\rho, \varphi, z) \in [0, R] \times [0, 2\pi[\times [0, H]\big\}$

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dV = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \\ &= \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^R \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \Big[z\Big]_0^H = \pi R^2 H \end{aligned}$$

Le même calcul en coordonnées cartésiennes ($dV = dx\, dy\, dz$) :

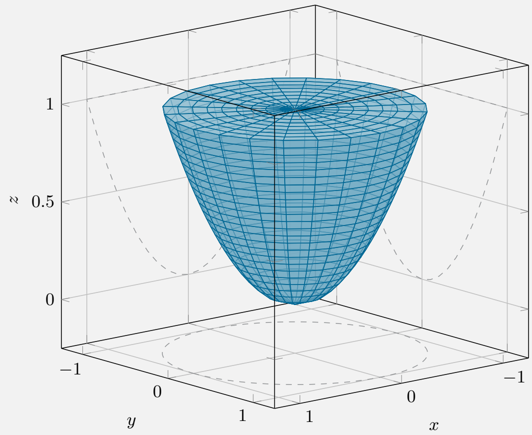
$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant z \leqslant H,\ -R \leqslant x \leqslant R,\ -\sqrt{R^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \iiint_\Omega dV = \int_0^H \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\,dx\,dz = 2\int_0^H dz \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,dx \\
&= 4\int_0^H dz \int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx && (x = R\sin\alpha, \quad dx = R\cos\alpha\,d\alpha) \\
&= 4\int_0^H dz \int_0^{\pi/2} R\sqrt{1-\sin^2\!\alpha}\;R\cos\alpha\,d\alpha && (\sqrt{\cos^2\alpha} = \cos\alpha \text{ car } \alpha \in [0,\pi/2]) \\
&= 4\int_0^H dz \int_0^{\pi/2} R^2\cos^2\!\alpha\,d\alpha = 4R^2\int_0^H dz \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\big(1+\cos(2\alpha)\big)\,d\alpha \\
&= 2R^2\Big[z\Big]_0^H \Big[\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\Big]_0^{\pi/2} = \pi R^2 H
\end{aligned}$$

b) **Calcul en coordonnées cylindriques :**

$$\Omega = \left\{(\rho,\varphi,z) \in [0,1]\times[0,2\pi[\,\times[0,1] \;\middle|\; \rho \leqslant \sqrt{z}\right\}$$

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \iiint_\Omega dV \\
&= \int_{z=0}^{z=1}\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{z}} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \Big[\frac{\rho^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{z}} dz \\
&= 2\pi\int_0^1 \frac{z}{2}\,dz \\
&= 2\pi\Big[\frac{z^2}{4}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$



Le même calcul en coordonnées cartésiennes :

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant z \leqslant 1,\ -\sqrt{z} \leqslant y \leqslant \sqrt{z},\ -\sqrt{z-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{z-y^2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \iiint_\Omega dV = \int_0^1 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx\,dy\,dz = 2\int_0^1 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \sqrt{z-y^2}\,dy\,dz \\
&= 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} \sqrt{z-y^2}\,dy\,dz && (y = \sqrt{z}\sin\alpha, \quad dy = \sqrt{z}\cos\alpha\,d\alpha) \\
&= 4\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \sqrt{z}\,\sqrt{1-\sin^2\!\alpha}\,\sqrt{z}\,\cos\alpha\,d\alpha && (\cos\alpha \geqslant 0 \text{ car } \alpha \in [0,\pi/2]) \\
&= 4\int_0^1 z\int_0^{\pi/2} \cos^2\!\alpha\,d\alpha\,dz = 4\int_0^1 z\,dz \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}\,d\alpha \\
&= 2\Big[\frac{z^2}{2}\Big]_0^1 \Big[\alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$