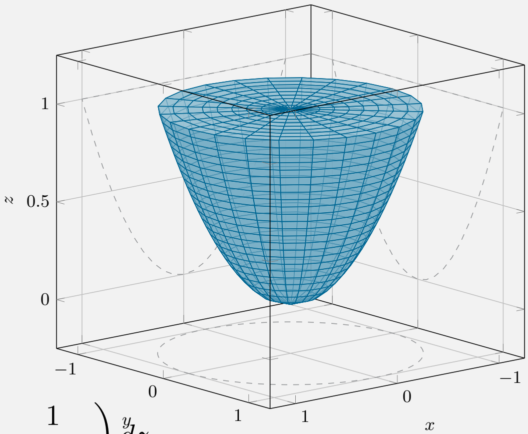
TD 8 – MOYENNE ET CENTRE DE MASSE

Exercice 39 – Quantité totale et moyenne

Une substance de concentration $f(x,y,z) = \frac{1}{z+1}$ occupe le recipient Ω délimité en bas par le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ et en haut par le disque $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ z = 1\}$. Trouver la quantité totale de substance contenue dans Ω et la quantité moyenne.

Corrigé

$\Omega = \big\{(\rho,\varphi,z) \in [0,1] \times [0,2\pi[\times [0,1] \;\big|\; \rho \leqslant \sqrt{z}\,\big\}$



Le volume de Ω est : $V(\Omega) = \dfrac{\pi}{2}$ (voir exercice 38 du TD 5)

La quantité totale Q_{tot} est donnée par :

$$\begin{aligned}
Q_{\text{tot}} &= \iiint_{\Omega} f(\rho,\varphi,z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz\,\frac{1}{z+1}\int_0^{\sqrt{z}} \rho\,d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{z+1}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z}} dz = \pi \int_0^1 \frac{z}{z+1}\,dz = \pi\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{z+1}\right) dz \\
&= \pi\big[z - \ln|z+1|\big]_0^1 = \pi\,(1-\ln 2)
\end{aligned}$$

La quantité moyenne est $Q_{\text{moy}} = \dfrac{Q_{\text{tot}}}{V(\Omega)} = 2\,(1-\ln 2)$.

On peut vérifier que l'on trouve la même quantité totale en permutant l'ordre des intégrations par rapport à ρ et z :

$\Omega = \big\{(\rho,\varphi,z) \in [0,1] \times [0,2\pi[\times [0,1] \;\big|\; z \geqslant \rho^2\big\}$

$$\begin{aligned}
Q_{\text{tot}} &= \iiint_{\Omega} f(\rho,\varphi,z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho\,\rho \int_{\rho^2}^1 \frac{1}{z+1}\,dz = 2\pi\int_0^1 \big[\ln|z+1|\big]_{\rho^2}^1 \rho\,d\rho \\
&= 2\pi\int_0^1 \Big(\ln 2 - \ln\big(\rho^2+1\big)\Big)\,\rho\,d\rho = 2\pi\ln 2\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 - 2\pi\int_0^1 \ln\big(\rho^2+1\big)\rho\,d\rho \\
&= \pi\ln 2 - 2\pi\int_0^1 \ln\big(\rho^2+1\big)\rho\,d\rho \\
&= \pi\ln 2 - \pi\int_1^2 \ln u\,du && (u = \rho^2+1,\ du = 2\rho\,d\rho,\ u\in[1,2]) \\
&= \pi\ln 2 - \pi\big[u\ln u\big]_1^2 + \pi\int_1^2 du && \text{(intégration par parties)} \\
&= \pi\,(1-\ln 2)
\end{aligned}$$

Exercice 40 – Centre de masse

a) Trouver le centre de gravité de la surface plane homogène délimitée par la parabole $y = 6x - x^2$ et la droite $y = x$.

b) Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque homogène.

c) Calculer la masse totale du cube $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ de $\mathbb{R}^3$ ayant pour densité de masse $\mu(x,y,z) = x^2y + xz^2$. Calculer ensuite le centre de masse du cube.

Corrigé

a) points d'intersection :

$$\begin{cases} y = x \\ y = 6x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x(5-x) = 0 \end{cases}$$

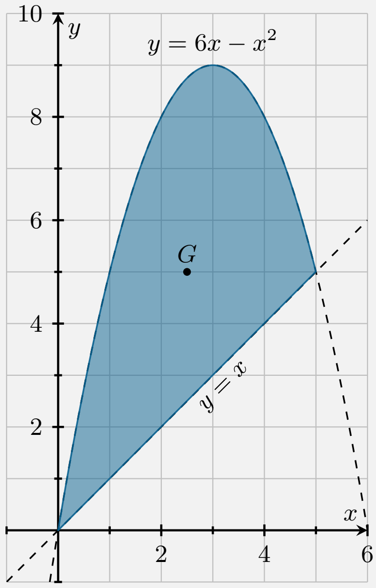
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, y_1) = (0,0) \\ (x_2, y_2) = (5,5) \end{cases}$$

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leqslant x \leqslant 5,\; x \leqslant y \leqslant 6x - x^2 \right\}$$

homogène $\Leftrightarrow$ $\mu(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in S$

$$M = \iint_S \mu(x,y)\,dx\,dy = \int_0^5 \left(\int_x^{6x-x^2} dy \right) dx$$

$$= \int_0^5 (5x - x^2)\,dx = \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^5 = \frac{125}{6}$$



centre de gravité : $G = (x_G, y_G)$ avec

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_S x\,\mu(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{M} \int_0^5 x \left(\int_x^{6x-x^2} dy \right) dx = \frac{1}{M} \int_0^5 (5x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \frac{1}{M} \left[\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^5 = \frac{6}{125} \left(\frac{5^4}{3} - \frac{5^4}{4} \right) = \frac{5}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_S y\,\mu(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{M} \int_0^5 \left(\int_x^{6x-x^2} y\,dy \right) dx = \frac{1}{M} \int_0^5 \left[\tfrac{1}{2} y^2 \right]_x^{6x-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2M} \int_0^5 \left((6x - x^2)^2 - x^2 \right) dx = \frac{1}{2M} \int_0^5 (x^4 - 12x^3 + 35x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2M} \left[\frac{x^5}{5} - 3x^4 + \frac{35x^3}{3} \right]_0^5 = \frac{3}{125} \left(5^4 - 3 \cdot 5^4 + \frac{7 \cdot 5^4}{3} \right) = 3 \cdot 5 \left(\frac{7}{3} - 2 \right) = 5$$

b) Demi-disque de rayon $R > 0$ en coordonnées cartésiennes :

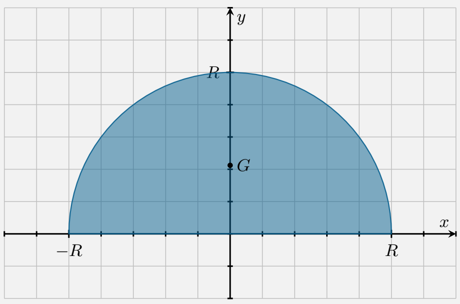
$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \geqslant 0,\; x^2 + y^2 \leqslant R^2 \right\}$

En coordonnées polaires :

$\tilde{D} = \left\{ (\rho, \varphi) \;\middle|\; 0 \leqslant \rho \leqslant R,\; 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \right\}$

homogène $\Leftrightarrow$ $\mu(x,y) = \text{const.}$

On peut poser $\mu(x,y) = \tilde{\mu}(\rho, \varphi) = 1$.



$$M = \iint_D \mu(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{\mu}(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_0^R \rho\,d\rho \int_0^\pi d\varphi = \left[\tfrac{1}{2} \rho^2 \right]_0^R \left[\varphi \right]_0^\pi = \frac{\pi R^2}{2}$$

centre de gravité : $G = (x_G, y_G)$ avec

$$x_G = \frac{1}{M}\iint\limits_{D} x\,\mu(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{M}\iint\limits_{\tilde{D}} \rho\cos\varphi\,\tilde{\mu}(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho\int_0^\pi \cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{M}\left[\tfrac{1}{3}\rho^3\right]_0^R\left[\sin\varphi\right]_0^\pi = 0$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint\limits_{D} y\,\mu(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{M}\iint\limits_{\tilde{D}} \rho\sin\varphi\,\tilde{\mu}(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \frac{1}{M}\int_0^R \rho^2\,d\rho\int_0^\pi \sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{M}\left[\tfrac{1}{3}\rho^3\right]_0^R\left[-\cos\varphi\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{R^3}{3}\big(1+1\big) = \frac{4R}{3\pi}$$

Remarque : On peut déduire que $x_G = 0$ (presque) sans calcul puisque la droite $x = 0$ est un axe de symétrie du demi disque ; comme le barycentre est un point unique, il doit se trouver sur cet axe. Ceci se justifie par le calcul en effectuant le changement de variable $(x,y) \mapsto (-x,y)$ dans l'intégrale de x_G (ce qui conduit à $x_G = -x_G$).

c) cube : $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

$$M = \iiint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \big(x^2y + xz^2\big)\,dz$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^1 \left[x^2yz + \tfrac{1}{3}xz^3\right]_{z=0}^{z=1} dy = \int_0^1 dx\int_0^1 \big(x^2y + \tfrac{1}{3}x\big)\,dy = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2 + \tfrac{1}{3}xy\right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^1 \big(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x\big)\,dx = \left[\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{6}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

centre de gravité : $G = (x_G, y_G, z_G)$ avec

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} x\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 3\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \big(x^3y + x^2z^2\big)\,dz$$

$$= 3\int_0^1 dx\int_0^1 \big(x^3y + \tfrac{1}{3}x^2\big)\,dy = 3\int_0^1 \big(\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{3}x^2\big)\,dx = 3\left[\tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{1}{9}x^3\right]_0^1 = \frac{17}{24}$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} y\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 3\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \big(x^2y^2 + xyz^2\big)\,dz$$

$$= 3\int_0^1 dx\int_0^1 \big(x^2y^2 + \tfrac{1}{3}xy\big)\,dy = 3\int_0^1 \big(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{6}x\big)\,dx = 3\left[\tfrac{1}{9}x^3 + \tfrac{1}{12}x^2\right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega} z\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 3\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 \big(x^2yz + xz^3\big)\,dz$$

$$= 3\int_0^1 dx\int_0^1 \big(\tfrac{1}{2}x^2y + \tfrac{1}{4}x\big)\,dy = 3\int_0^1 \big(\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{4}x\big)\,dx = \frac{3}{4}\left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{5}{8}$$

Exercice 41 – Culbuto homogène en équilibre

Un *culbuto* est un objet avec base arrondie fait de telle manière que si on le déplace de la position verticale il y revient en oscillant.

[Photo : MONSIEUR COLBUTO de HIBAI AGORRIA MUNITIS]

Considerons le culbuto homogène constitué d'une demi-boule de rayon 1 surmontée d'un cône de hauteur $a > 0$. Nous voulons trouver les valeurs de a pour lesquelles le culbuto revient à l'équilibre en position verticale, en sachant que cela arrive si le centre de masse G se trouve <u>strictement en dessous</u> du plan qui sépare la demi-boule du cône.

Soit K_a l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $-1 \leqslant z \leqslant a$ et tels que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \qquad \text{(demi-boule)}, \\ x^2 + y^2 \leqslant \left(1 - \dfrac{z}{a}\right)^2 & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant a \qquad \text{(cône plein)}. \end{cases}$$

a) Dessiner K_a et en calculer le volume.

b) Pour tout $z \in [-1, a]$, soit D_z le disque contenu dans K_a à hauteur z fixée. Dessiner D_z, trouver son rayon et calculer son aire.

c) Trouver le centre de masse de K_a, en sachant qu'il se trouve sur l'axe $\vec{Oz}$.

d) Trouver les valeurs de $a > 0$ pour que le culbuto K_a revienne à l'équilibre en position verticale.

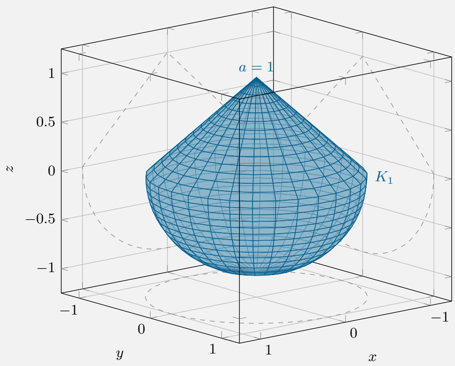
Corrigé

a) La partie inférieure du culbuto K_a est la demi-boule

$$B = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, -1 \leqslant z \leqslant 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\right\} \quad ,$$

et sa partie supérieure est le cône

$$C_a = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, 0 \leqslant z \leqslant a,\ x^2 + y^2 \leqslant (1 - z/a)^2\right\} \quad .$$



On passe ensuite en coordonnées sphériques,

$$\tilde{B} = \left\{(r, \theta, \varphi) \,\middle|\, 0 \leqslant r \leqslant 1,\ \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\} \quad ,$$

et coordonnées cylindriques, respectivement,

$$\tilde{C}_a = \left\{(\rho, \varphi, z) \,\middle|\, 0 \leqslant z \leqslant a,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1 - z/a,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\} \quad .$$

Le volume de K_a est donnée par

$$V(K_a) = \iiint_{K_a} dx\, dy\, dz = \iiint_{\tilde{B}} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi + \iiint_{\tilde{C}_a} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = V(\tilde{B}) + V(\tilde{C}_a) \quad .$$

Les volumes des deux parties sont

$$V(\tilde{B}) = \int_0^1 r^2\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \left[\tfrac{1}{3} r^3\right]_0^1 \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[-\cos\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2\pi}{3} \qquad \text{et}$$

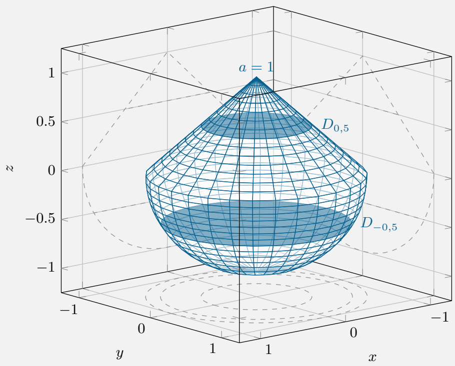
$$V(\tilde{C}_a) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dz \int_0^{1-z/a} \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^a \left[\tfrac{1}{2}\rho^2\right]_0^{1-z/a} dz = \pi \int_0^a \left(1 - z/a\right)^2 dz$$

$$= -a\pi \int_1^0 u^2\, du = a\pi \left[\tfrac{1}{3} u^3\right]_0^1 = \frac{a\pi}{3}. \qquad (u = 1 - z/a, \quad -a\, du = dz)$$

On obtient ainsi le volume du culbuto $V(K_a) = V(\tilde{B}) + V(\tilde{C}_a) = \dfrac{(a+2)\,\pi}{3}$.

b) Le rayon ρ_{D_z} du disque D_z est :

$$\rho_{D_z} = \begin{cases} \sqrt{1-z^2} & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1 - z/a & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant a \end{cases}$$



L'aire d'un tel disque est donnée par :

$$\text{Aire}(D_z) = \iint_{D_z} \rho \, d\rho \, d\varphi$$
$$= \int_0^{\rho_{D_z}} \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \big[\tfrac{1}{2}\rho^2\big]_0^{\rho_{D_z}} = \pi \rho_{D_z}^2$$

On obtient ainsi

$$\text{Aire}(D_z) = \begin{cases} \pi\big(1-z^2\big) & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ \pi(1 - z/a) & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant a \end{cases} .$$

c) Le culbuto étant homogène, on peut poser $\mu(x,y,z) = 1$ pour tout point $(x,y,z) \in K_a$.

$$M = \iint_{K_a} \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{K_a} dx\, dy\, dz = V(K_a) = \frac{(a+2)\,\pi}{3}$$

Le culbuto étant homogène et est symétrique par rapport aux rotations d'axe Oz (c'est-à-dire qu'une rotation d'angle quelconque autour de cet axe laisse K_a invariant), son barycentre (qui est unique) doit se trouver sur l'axe de symétrie ; on a donc $G = (0,0,z_G)$ et il ne reste plus qu'à calculer z_G :

$$z_G = \frac{1}{M} \iint_{K_a} z\, \mu(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{M}\Bigg(\iiint_{\tilde{B}} r\cos\theta\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi + \iiint_{\tilde{C}_a} z\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \Bigg)$$
$$= \frac{1}{M}\big(I_{\tilde{B}} + I_{\tilde{C}_a}\big)$$

Les deux intégrales introduites ci-dessus donnent

$$I_{\tilde{B}} = \int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 2\pi\big[\tfrac{1}{4}r^4\big]_0^1 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_1^0 u\, du = \frac{\pi}{2}\big[\tfrac{1}{2}u^2\big]_1^0 = -\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \qquad \Big|\; u = \sin\theta,\ du = \cos\theta\, d\theta$$

$$I_{\tilde{C}_a} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a z\, dz \int_0^{1-z/a} \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^a z\big[\tfrac{1}{2}\rho^2\big]_0^{1-z/a} dz = \pi \int_0^a z(1-z/a)^2\, dz$$
$$= \pi \int_0^a \big(z^3/a^2 - 2z^2/a + z\big)\, dz = \pi\left[\frac{z^4}{4a^2} - \frac{2z^3}{3a} + \frac{z^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2\pi}{12} .$$

On obtient ainsi

$$z_G = \frac{1}{M}\big(I_{\tilde{B}} + I_{\tilde{C}_a}\big) = \frac{3}{(a+2)\,\pi}\left(\frac{a^2\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^2-3}{4(a+2)} .$$

d) On applique la condition de stabilité en position verticale :

$$z_G < 0 \iff \frac{a^2-3}{4(a+2)} < 0 \overset{(a>0)}{\iff} a^2 - 3 < 0 \iff a < \sqrt{3}$$