UCBL – L1 PCSI – UE Math 2

Fonctions de plusieurs variables, dérivés, intégrales

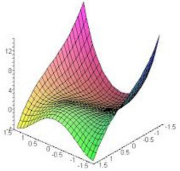
Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard Lyon 1

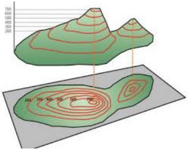
http://math.univ-lyon1.fr/∼frabetti/

But du cours

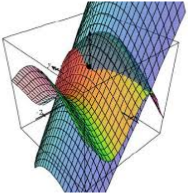
Graphe de fonction



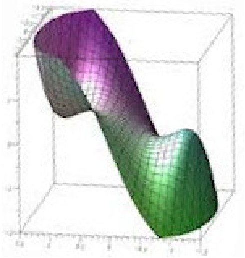
Lignes de niveau



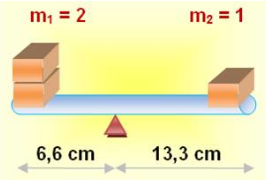
Taylor



Extrema



Centre de masse



Programme

Prérequis

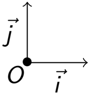
1. **Espaces vectoriels et vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$**
   (produits scalaire, vectoriel et mixte).
2. **Applications linéaires et matrices**
   (produit, détérminant, matrice inverse).
3. **Géométrie cartesienne du plan et de l'espace**
   (droites, coniques, plans, quadriques).
4. **Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable**
   (graphes, dérivées, points critiques, extrema, Taylor, primitives).
5. **Équations différentielles du 1er ordre**.

Chapitre 1
Fonctions de plusieures variables

Dans cette section:

- Coordonnées cartesiennes et polaires du plan
- Coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques de l'espace

Coordonnées cartesiennes du plan

On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère 

du plan.

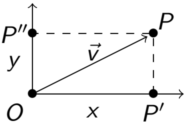
Définition – Soit P un point du plan.

• Le **coordonnées cartesiennes** de P sont le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Autrement dit,

$$x = \|\overrightarrow{OP'}\| \quad \text{et} \quad y = \|\overrightarrow{OP''}\|$$

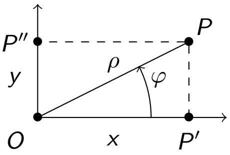
sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.



Coordonnées polaires

- Les **coordonnées polaires** de $P \neq O$ sont le couple

$(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ tel que $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$



On a donc

$$\begin{cases} \rho = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi \;\text{ t.q. } \tan \varphi = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ ou } \cot \varphi = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0 \\ \quad \big(\text{par ex.} \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{si } x, y > 0\big) \end{cases}$$

Exercice: coord. polaires $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants du plan, dont on connait les coordonnés polaires, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$A \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = 5\pi/4 \end{cases} \qquad B \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \end{cases} \qquad C \begin{cases} \rho = 0 \\ \varphi = 3\pi/2 \end{cases}$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartésiennes avec les formules:

- $A \quad \begin{cases} x = 3\cos(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 3\sin(5\pi/4) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad A\,(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2})$
- $B \quad \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(3\pi/4) = \frac{-\sqrt{2}^2}{2} \\ y = \sqrt{2}\sin(3\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} \end{cases} \qquad B\,(-1, 1)$
- $C \quad \begin{cases} x = 0\ \cos(3\pi/2) = 0 \\ y = 0\ \sin(3\pi/2) = 0 \end{cases} \qquad C\,(0, 0)$

Exercice: coord. cartesiennes $\longrightarrow$ polaires

Énoncé – *Pour les points suivants du plan en coordonnés cartesiennes, trouver les coordonnées polaires :*

$$A\,(2,3) \qquad B\,(2,0) \qquad C\,(0,3)$$

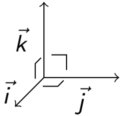
Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartesiennes avec les formules:

- A $\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\ \cos\varphi = 2/\sqrt{13} \\ \sin\varphi = 3/\sqrt{13} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{13} \\ \varphi = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases}$

- B $\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{4+0} = 2 \\ \cos\varphi = 2/2 = 1 \\ \sin\varphi = 0/2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 2 \\ \varphi = \arctan 0 = 0 \end{cases}$

- C $\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{0+9} = 3 \\ \cos\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\varphi = \frac{3}{3} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/2 \end{cases}$

Coordonnées cartesiennes de l'espace

On note $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère 

de l'espace.

Définition – Soit P un point de l'espace.

• Les **coordonnées cartesiennes** de P sont le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\quad \vec{v} = \overrightarrow{OP} \; = \; x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \; \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Autrement dit,

$$x = \|\overrightarrow{OP'}\|, \quad y = \|\overrightarrow{OP''}\| \quad \text{et} \quad z = \|\overrightarrow{OP'''}\|$$

sont les longueurs des projections orthogonales de $\vec{v}$ dans les directions $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

Coordonnées cylindriques

- Les **coordonnées cylindriques** de $P \neq O$ sont le triplet $(\rho, \varphi, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{array} \right.$$

Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \|\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \varphi \quad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{x}{\rho} \\ \sin \varphi = \frac{y}{\rho} \end{array} \right. \\ \\ z = z \end{array} \right.$$

Coordonnées sphériques

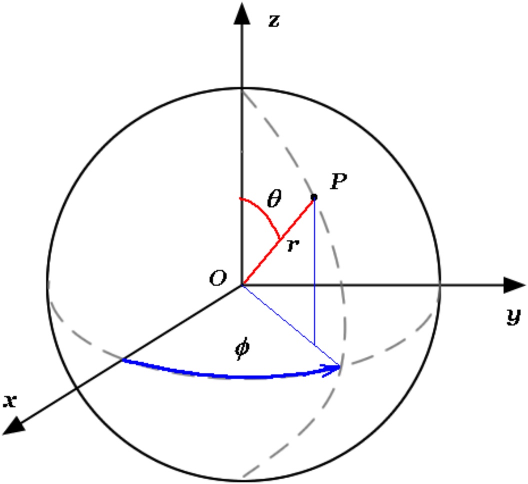
- Les **coordonnées sphériques** de $P \neq O$ sont le triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times [0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi \sin\theta \\ y = r \sin\varphi \sin\theta \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Si $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ on a donc

$$\begin{cases} r = \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \\ \theta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

Coordonnées de l'espace



Exercice: coord. cylindriques $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants, dont on connait les coordonnés cylindriques, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$A \begin{cases} \rho = 3 \\ \varphi = \pi/3 \\ z = 2 \end{cases} \qquad B \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/4 \\ z = -3 \end{cases}$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on calcule les coordonnées cartesiennes avec les formules:

- A $\quad \begin{cases} x = 3\cos(\pi/3) = \frac{3}{2} \\ y = 3\sin(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 \end{cases} \qquad A\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\right)$

- B $\quad \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ y = \sqrt{2}\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}^2}{2} = 1 \\ z = -3 \end{cases} \qquad B\,(1, 1, -3)$

Exercice: coord. sphériques $\longrightarrow$ cartesiennes

Énoncé – *Pour les points suivants, dont on connait les coordonnées sphériques, trouver les coordonnées cartesiennes :*

$$C \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{2} \\ \theta = 3\pi/4 \\ \varphi = \pi/2 \end{array} \right. \qquad D \left\{ \begin{array}{l} r = 1 \\ \theta = \pi/6 \\ \varphi = \pi/3 \end{array} \right.$$

Réponse – On dessine chaque point sur un plan, ensuite on applique les formules:

- C $$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2}\ \cos(\pi/2)\ \sin(3\pi/4) = 0 \\ y = \sqrt{2}\ \sin(\pi/2)\ \sin(3\pi/4) = 1 \\ z = \sqrt{2}\ \cos(3\pi/4) = -1 \end{array} \right. \qquad C\,(0, 1, -1)$$

- D $$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{1}{4} \\ y = \sin(\pi/3)\ \sin(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ z = \cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right. \qquad D\,(\tfrac{1}{4}, \tfrac{\sqrt{3}}{4}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

Exo: cartesiennes $\rightarrow$ cylindriques et sphériques

Énoncé – *Pour les points suivants en coordonnées cartesiennes, trouver les coordonnées cylindriques et sphériques:*

$$A = (-1, 1, 1) \qquad B\,(3, 0, 0) \qquad C\,(0, 1, 1)$$

Réponse –

- A $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \tan\varphi = -1 \\ r = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = 3\pi/4 \\ z = 1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{3} \\ \theta = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \varphi = 3\pi/4 \end{array}\right.$

- B $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{9+0} = 3 \\ \tan\varphi = \frac{0}{3} = 0 \\ r = \sqrt{9+0+0} = 3 \\ \cos\theta = \frac{0}{3} = 0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \rho = 3 \\ \varphi = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} r = 3 \\ \theta = \pi/2 \\ \varphi = 0 \end{array}\right.$

- C $\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{0+1} = 1 \\ \cos\varphi = 0 \\ \sin\varphi = 1 \\ r = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2} \\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \rho = 1 \\ \varphi = \pi/2 \\ z = 1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{2} \\ \theta = \pi/4 \\ \varphi = \pi/2 \end{array}\right.$

Notations des points

Conclusion –

- Un point géométrique du plan ou de l'espace est noté P.

- Un point en coordonnées dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est noté $\vec{x}$.

Cela signifie donc (x, y), (ρ, φ), (x, y, z), (ρ, φ, z) ou (r, θ, φ) selon le contexte.

Dans la suite $\mathbb{R}^n$ est l'un des trois espaces $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

1.2 – Ensembles ouverts, fermés, bornés, compacts

Dans cette section :

- Intervalles, disques, boules
- Bord d'un ensemble
- Ensembles ouverts et fermés
- Ensembles bornés et compacts

Intervalles

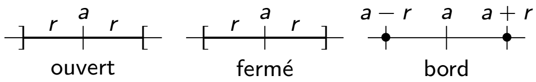
Définitions –

• Dans $\mathbb{R}$, on appelle

intervalle ouvert $\quad I_a(r) =]a-r, a+r[$

intervalle fermé $\quad \bar{I}_a(r) = [a-r, a+r]$

bord de l'intervalle $\quad \partial I_a(r) = \{a-r, a+r\}$



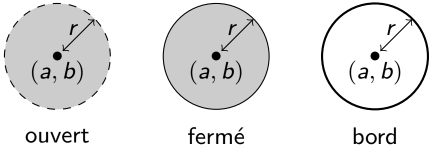
Disques

- Dans $\mathbb{R}^2$, on appelle

disque ouvert
$$D_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\right\}$$

disque fermé
$$\overline{D}_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2\right\}$$

bord du disque (= cercle)
$$\partial D_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}$$



Boules

- Dans $\mathbb{R}^3$, on appelle

boule ouverte

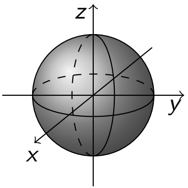
$$B_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2\}$$

boule fermée

$$\overline{B}_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2\}$$

bord de la boule (= sphère)

$$\partial B_{(a,b,c)}(r) = \{(x,y,z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}$$



Bord d'un ensemble

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

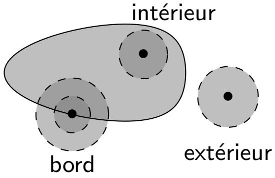
• Un point P est un **point intérieur** à D, s'il existe une boule ouverte B_P <u>contenue dans D</u>.

• Un point P est un **point extérieur** à D il existe une boule ouverte B_P <u>qui n'intersecte pas D</u>.

• Un point $P \in \mathbb{R}^n$ est un **point du bord** de D si <u>toute</u> boule ouverte B_P centrée en P contient à la fois des points de D et de son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash D$.

• Le **bord** de D est l'ensemble des points du bord, noté ∂D.

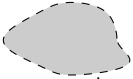
ATTENTION – Un point de ∂D peut être dans D ou non!



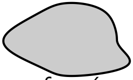
Ensembles ouverts et fermés

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

- D est **ouvert** s'il ne contient aucun de ses points de bord.
- D est **fermé** s'il contient tous ses points de bord.



ouvert

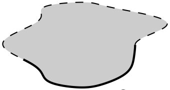


fermé

Propriété – *Le complémentaire d'un ouvert est fermé, le complémentaire d'un fermé est ouvert.*

- Par convention, l'**ensemble vide** $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ sont à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$.

ATTENTION – Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés!

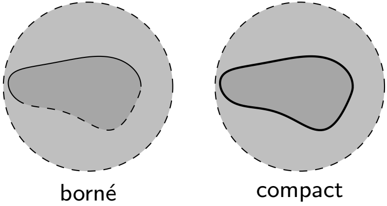


ni ouvert ni fermé

Ensembles bornés et compacts

Définition – Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble.

- D est **borné** s'il existe un disque ouvert B qui le contient.
- D est **compact** s'il est fermé et borné.

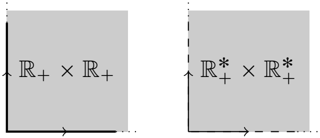


Exemples: non bornés fermés et ouverts

Exemples –

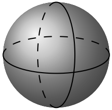
• Droites, demi-droites, plans et demi-plans sont non bornés.
Les droites et les plans sont fermés. Les demi-droites et les demi-plans sont fermés s'ils contiennent leurs point ou droite extreme.

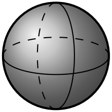
• Les quadrants $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sont non bornés.
Le premier est aussi fermé. Le deuxième est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ mais ne l'est pas dans $\mathbb{R}^3$ (car tout le quadrant est son propre bord dans $\mathbb{R}^3$).

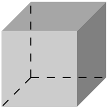


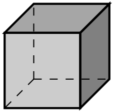
Exemples: bornés ouverts et fermés

• Disques, boules, carrés et cubes pleins sont bornés.
Ils sont fermés (et donc compacts) s'ils contiennent leur bord (cercle, sphère ou carré et cube).

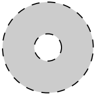

boule ouverte

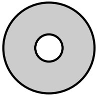

boule fermée

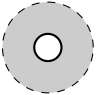

cube ouvert


cube fermé

• Les couronnes circulaires sont bornées. Dans le plan, elles sont fermées (donc compactes) ou ouvertes selon qu'elles contiennent les circles ou non.


couronne ouverte


couronne fermée


ni ouverte ni fermée

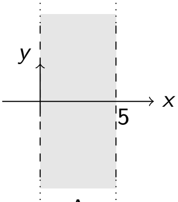
Énoncé – *Dessiner les sous-ensembles suivants de* $\mathbb{R}^2$ *et dire s'ils sont ouverts, fermés, bornés ou compacts :*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 5\right\}$$

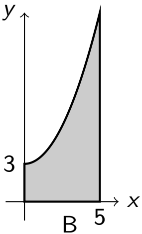
$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 3\right\}$$

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x < 5,\ 0 \leqslant y < x^2 + 3\right\}$$

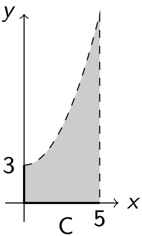
Réponse –



A
ouvert non borné



B
compact



C
borné

Dans cette section:

- Fonctions réelles et vectorielles de plusieurs variables
- Domaine et image

Définition – Une **fonction de plusieurs variables** est une loi

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x})$$

qui associe à un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ au plus une valeur $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$.

- Pour ce cours, $n = 2$ ou 3 et $m = 1$, 2 ou 3.
- Si $m = 1$, la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **réelle**.
- Si $m > 1$, la fonction f est dite **vectorielle**.

Exemples de fonctions de plusieures variables

- **Fonctions réelles**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^3 + \sin(xy) + 1$

Pression $= f(\text{Volume}, \text{Temperature})$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^3 z + xyz + \ln(z^2 + 1)$

- **Fonctions vectorielles**

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2, x + y, y^3)$

$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (x^2 + z, xz + y)$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (\rho, \varphi) \mapsto h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$

Attention aux fonctions vectorielles et linéaires !

ATTENTION – Une fonction vectorielle n'est pas linéaire en général !

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire si et seulement si, en coordonnée cartesiennes, ses composantes sont des polynômes de degré 1 sans termes constants.

Par exemple:

- $f(x, y, z) = \big(2z - x, 0, 3y + 5x - z\big)$ est linéaire
- $g(x, y, z) = \big(xz + 5, 3, \sin(y)\big)$ n'est pas linéaire,

  car contient un polynôme de degré 2 (xz),
  deux termes constants non nuls (5 et 3)
  et une fonction non-polynomiale ($\sin(y)$).

Domaine et image

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

• Le **domaine (de définition)** de f est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ pour lesquels f est bien définie:

$$D_f = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \text{il existe } f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

• L'**image** de f est l'ensemble des valeurs de f :

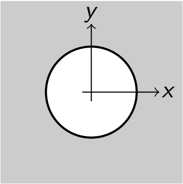
$$I_f = f(D_f) = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{il existe } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \vec{y} = f(\vec{x}) \right\}$$

Exemples: domaine et image

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

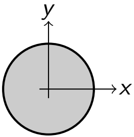
$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\}$$
$= \text{complémentaire du disque } D_O(1)$
(fermé non borné)

$$I_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$$



- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$
$= \text{disque fermé } \overline{D}_O(1)$ (compact)

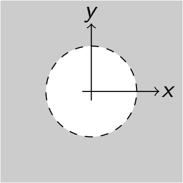


$$I_f = [0, 1]$$

car $\quad x^2 + y^2 \geqslant 0 \iff 0 \leqslant 1 - x^2 - y^2 \leqslant 1$
$\iff 0 \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2} = f(x, y) \leqslant 1$

• $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

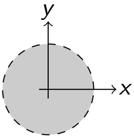
$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$
$= \text{complémentaire du disque } \overline{D}_O(1)$
(ouvert non borné)



$I_f = \mathbb{R}$

• $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$
$= \text{disque ouvert } D_O(1)$
(ouvert borné)



$I_f = \ln]0, 1] =]-\infty, 0] = \mathbb{R}^-$

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = \left(\dfrac{1}{x^2}, -\dfrac{1}{y^2}\right)$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0,\ y \neq 0\}$
$=$ plan privé des deux axes de coordonnées
(ouvert non borné)

$I_f = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^- = 4^{eme}$ quadrant privé de son bord

- $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2 - z^2}, -\sqrt{y^2 + z^2}\right)$

$D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - z^2 \geqslant 0\}$
$=$ union des deux plans $z = \pm x$ parallèles à l'axe Oy dans l'espace
(fermé non borné)

$I_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- = 4^{eme}$ quadrant

Exercice

Énoncé – *Dessiner le domaine de définition et l'image des fonctions suivantes et déterminer la nature du domaine (ouvert, fermé, borné, compact).*

• $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2}$.

Réponse : $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + 1 > 0,\ x^2 + y^2 \neq 0\right\}$
$= \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ = plan moins l'origine (ouvert non borné)

La condition $x^2 + y^2 + 1 > 0$ est vérifiée pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et la condition $x^2 + y^2 \neq 0$ est vérifiée si $(x, y) \neq (0, 0)$.

$I_f = \mathbb{R}_+^* =]\,0, +\infty\,[$ (ouvert non borné)

car $x^2 + y^2 > 0$ implique $x^2 + y^2 + 1 > 1$ et par conséquent $\ln(x^2 + y^2 + 1) > 0$, et le quotient de deux nombres positifs est positif.

• $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto g(x, y) = \left(\dfrac{\ln(x^2+1)}{y^2}, \dfrac{\ln(y^2+1)}{x^2} \right)$

Réponse :

$D_g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 1 > 0,\ y \neq 0,\ y^2 + 1 > 0,\ x \neq 0 \right\}$
$= \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ = plan privé des deux axes de coordonnées (ouvert non borné).

En effet, les conditions $x^2 + 1 > 0$ et $y^2 + 1 > 0$ sont vérifiées pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$I_g = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = 1^{er}$ quadrant privé de son bord (ouvert non borné)

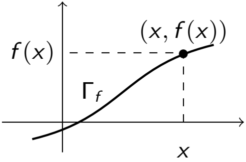
Les conditions $x \neq 0$ et $y \neq 0$ impliquent $x^2 > 0$ et $y^2 > 0$, et par conséquent $\ln(x^2 + 1) > 0$ et $\ln(y^2 + 1) > 0$.

Dans cette section:

- Graphe des fonctions d'une variable (rappel)
- Graphe des fonctions de plusieures variables
- Lignes de niveau

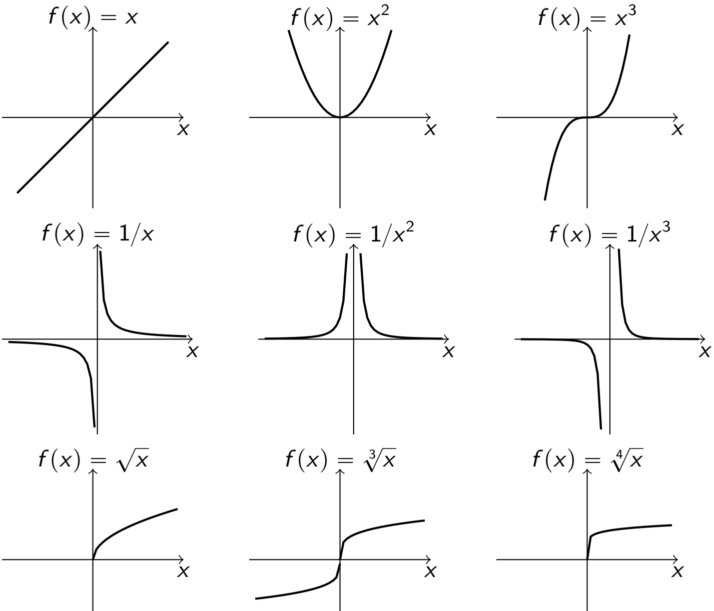
Rappel – Le **graphe de** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f,\ y = f(x) \Big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

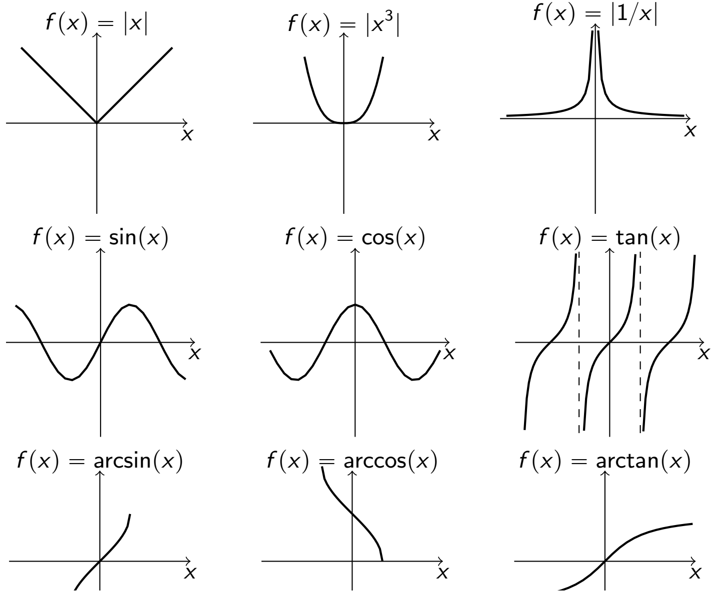


Le graphe des fonctions usuelles d'une variable est à connaître par cœur.

Graphes à connaître !

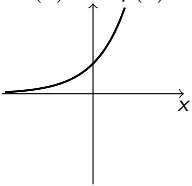


D'autres graphes à connaître !

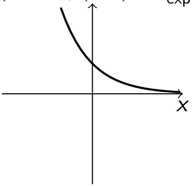


D'autres encore... ouf !

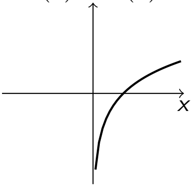
$f(x) = \exp(x)$



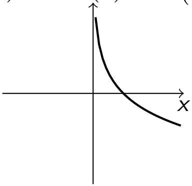
$f(x) = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$



$f(x) = \ln(x)$



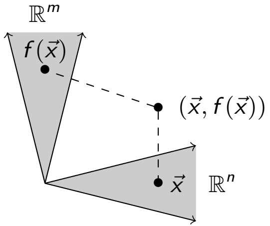
$f(x) = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$



Définition – Le **graphe de** $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \vec{x} \in D_f,\ \vec{y} = f(\vec{x}) \Big\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

PROBLÈME – Ce graphe est difficile à dessiner si $n + m > 3$!

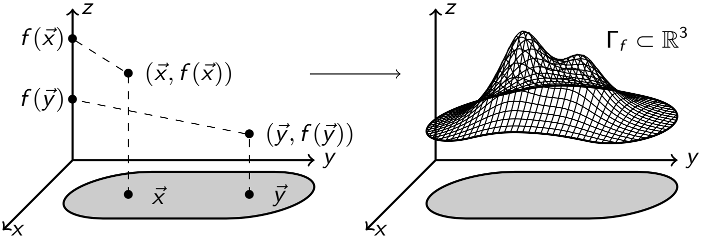


Regardons $n = 2$ et $m = 1$.

Graphe des fonctions réelle de deux variables

Le **graphe de** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \Big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f,\ z = f(x, y) \Big\} \subset \mathbb{R}^3.$$



Exemple –

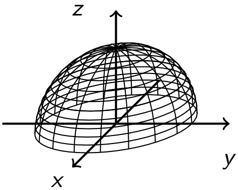
- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = z$

$$\Longrightarrow \quad D_f = \overline{D}_0(1) \quad \text{et} \quad I_f = [0,1]$$

Notons que

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2, \quad \text{c.-à-d.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad \text{et} \quad z \geqslant 0.$$

Ainsi Γ_f= demi-sphère



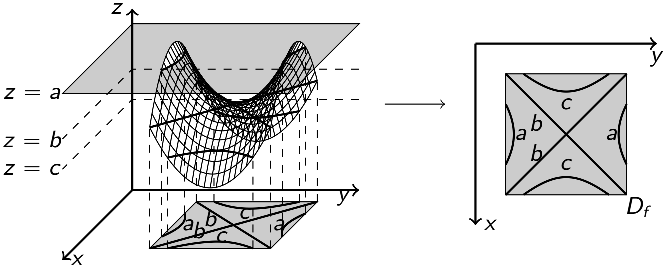
Lignes de niveau

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de domaine $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et d'image $I_f \subset \mathbb{R}$.

Définition – Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la **ligne de niveau** a est la projection sur D_f de $\Gamma_f \cap \{z = a\}$, c'est-à-dire

$$L_a(f) = \{(x, y) \in D_f \mid f(x, y) = a\}.$$

À noter que $L_a(f) = \varnothing$ si $a \notin I_f$.



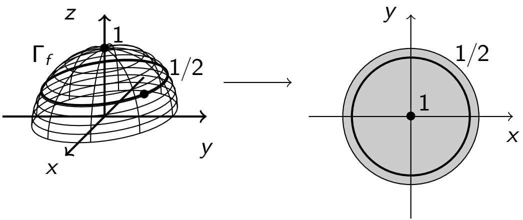
Exemple: lignes de niveau

Exemple –

- $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} = z, \qquad D_f = \overline{D}_0(1),\ I_f = [0,1]$

Pour tout $a \in [0,1] = I_f$ on a

$$L_a(f) = \left\{ (x,y) \in \overline{D}_O(1) \mid \sqrt{1-x^2-y^2} = a \right\}$$
$$= \text{cercle centré en } (0,0) \text{ de rayon } \sqrt{1-a^2}$$



Exercice

Énoncé – *Trouver le domaine, l'image et la nature des lignes de niveau de la fonction*

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}.$$

Dessiner les lignes de niveau pour les valeurs $a=-2,-1,0,1,2$. *En déduire le graphe de* f.

Réponse –

$D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq -x\right\}=\mathbb{R}^2\setminus$ la bissectrice du 2^{eme} quadrant

$I_f=\mathbb{R}$, alors pour tout $a\in\mathbb{R}$ on a

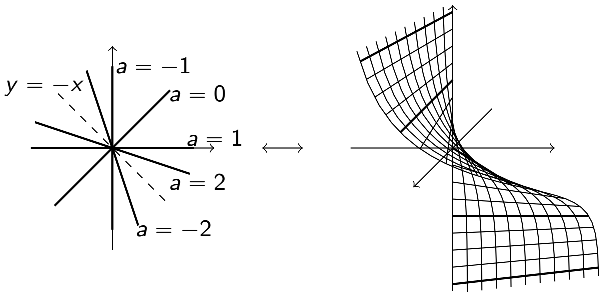
$$L_a(f)=\left\{(x,y)\in D_f \mid \frac{x-y}{x+y}=a\right\}$$

$=$ droite d'équation $\quad (a-1)x+(a+1)y=0$

$L_a(f) =$ droite d'équation $\quad (a-1)x + (a+1)y = 0$

$$
\begin{array}{llllll}
a = 0 & \Longrightarrow & y = x & & & \\
a = 1 & \Longrightarrow & y = 0 & \qquad a = -1 & \Longrightarrow & x = 0 \\
a = 2 & \Longrightarrow & y = -\frac{1}{3}x & \qquad a = -2 & \Longrightarrow & y = -3x
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_f &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq x,\ z = \frac{x-y}{x+y} \right\} \\
&= \text{union de droites tournantes (sans l'axe } Oz\text{)}
\end{aligned}
$$



1.5 – Opérations, composition et changement de coordonnées

Dans cette section:

- Somme et produit de fonctions
- Composition de fonctions
- Changement de coordonnées

Somme et produit de fonctions

Définition – Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions suivantes:

somme: $\big(f+g\big)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$, $\quad D_{f+g} = D_f \cap D_g$;

zéro: $0(\vec{x}) = (0, \ldots, 0)$, $\quad D_0 = \mathbb{R}^n$;

opposée de f: $\big(-f\big)(\vec{x}) = -f(\vec{x})$, $\quad D_{-f} = D_f$;

produit de f **par** λ: $\big(\lambda f\big)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$, $\quad D_{\lambda f} = D_f$.

Si f et g sont des fonctions <u>réelles</u> ($m = 1$):

produit: $\big(fg\big)(\vec{x}) = f(\vec{x})g(\vec{x})$, $\quad D_{fg} = D_f \cap D_g$;

un: $1(\vec{x}) = 1$, $\quad D_1 = \mathbb{R}^n$;

inverse de f: $\left(\dfrac{1}{f}\right)(\vec{x}) = \dfrac{1}{f(\vec{x})}$, $\quad D_{1/f} = \Big\{\vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) \neq 0\Big\}$.

Exemples: somme et produit de fonctions

Exemple –

Si $\quad f(x,y) = x^2 - y^2, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 \quad$ et $\quad \lambda = 3,$
on a :

$$\left[\begin{array}{l} (f+g)(x,y) = x^2 - y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 \\ \\ (3f)(x,y) = 3(x^2 - y^2) \\ \\ (fg)(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4 \\ \\ \dfrac{1}{f}(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2} \quad \text{si } x \neq \pm y. \end{array}\right.$$

Proposition – *Les opérations d'addition, produit par scalaire et multiplication entre fonctions à plusieurs variables ont les mêmes proprietés que leurs analogues entre fonctions à une variable (elles sont commutatives, associatives et distributives).*

En particulier, *l'ensemble des fonctions à plusieurs variables $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ muni de l'addition et du produit par scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie.*

Composition de fonctions

Définition – Données deux fonctions

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

on définit la **composée de f et g** comme la fonction

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

obtenue en calculant g sur les valeurs obtenues par f:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x}) & \mapsto & (g \circ f)(\vec{x}) = g\Big(f(\vec{x})\Big) \end{array}$$

Le domaine de $g \circ f$ est l'ensemble

$$D_{g\circ f} = \Big\{\vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) \in D_g\Big\}.$$

Exemples: cas usuels de fonctions composées

Fixons $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 - y.$

• Si $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto g(z) = \exp z$

alors $\quad g\circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\quad z = f(x,y)$:

$$\big(g\circ f\big)(x,y) = g(f(x,y)) = g(x^2 - y) = \exp(x^2 - y)$$

• Si $\quad h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto h(u,v) = \big(h_1(u,v), h_2(u,v)\big) = (2u, u+v)$

alors $\quad f\circ h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\left\{\begin{array}{l} x = h_1(u,v) \\ y = h_2(u,v) \end{array}\right.$:

$$\big(f\circ h\big)(u,v) = f(h(u,v)) = f(2u, u+v) = 4u^2 - (u+v)$$

• Si $\quad \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (\cos t, \sin t)$

alors $\quad f\circ\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad$ se trouve en posant $\left\{\begin{array}{l} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \end{array}\right.$:

$$\big(f\circ\gamma\big)(t) = f(\gamma(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin t$$

Changement de variables

Un changement de variable s'écrit comme une composée !

Proposition – *Si* $\vec{y} = f(\vec{x})$ *est une fonction des variables* $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, *son expression comme* <u>*fonction de nouvelles*</u> <u>*variables*</u> $\vec{u} = (u_1, ..., u_n)$ *est donnée par la fonction composée*

$$\tilde{f} = f \circ h,$$

où

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \vec{u} \mapsto h(\vec{u}) = \vec{x}$$

est l'application qui décrit le changement de variables des $(x_1, ..., x_n)$ *vers les* $(u_1, ..., u_n)$.

Autrement dit, on a

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f\big(h(\vec{u})\big) = \tilde{f}(\vec{u}).$$

Changements en polaires, cylindriques, sphériques

- **Changement en coordonnées polaires:**

$$f(x,y) = f\big(h(\rho,\varphi)\big) = \tilde{f}(\rho,\varphi)$$

avec $\quad h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$

- **Changement en coordonnées cylindriques:**

$$f(x,y,z) = f\big(h(\rho,\varphi,z)\big) = \tilde{f}(\rho,\varphi,z)$$

avec $\quad h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\quad h(\rho,\varphi,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$

- **Changement en coordonnées sphériques:**

$$f(x,y,z) = f\big(h(r,\theta,\varphi)\big) = \tilde{f}(r,\theta,\varphi)$$

avec $\quad h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\quad h(r,\theta,\varphi) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

Exemple: passage en coordonnées polaire

Exemple – On veut exprimer la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x$$

en coordonnées polaires.

Pour cela il suffit de faire la composée $f \circ h$ où

$$h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

c'est-à-dire à remplacer x et y dans f par $\rho \cos \varphi$ et $\rho \sin \varphi$.

On obtient

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}(\rho, \varphi) & = & f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \\ & = & (\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 + 2\rho \cos \varphi \\ & = & \rho^2 + 2\rho \cos \varphi. \end{array}$$

Exercice

Énoncé – *Exprimer la fonction*

$$f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, z^2\right)$$

en coordonnées cylindriques et sphériques.

Réponse – En coordonnées cylindriques :

$$\tilde{f}(\rho,\varphi,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = \left(\rho, z^2\right)$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\tilde{f}}(r,\theta,\varphi) & = & f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta) \\ & = & \left(r\ \sin\theta, r^2\cos^2\theta\right) \end{array} .$$

Chapitre 2
Dérivées, Taylor, extrema locaux

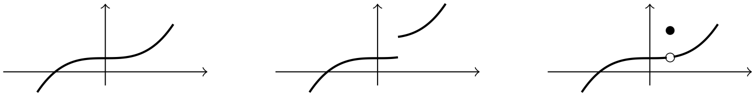
Dans cette section:

- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Limites de fonctions
- Fonctions continues

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, avec domaine D_f, on dit que:

• la **limite de f en un point** $a \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ à laquelle tend $f(x)$ quand x s'approche de a;

• f **est continue** en un point $a \in D_f$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



continue

$\lim\limits_{gauche} \neq \lim\limits_{droite}$

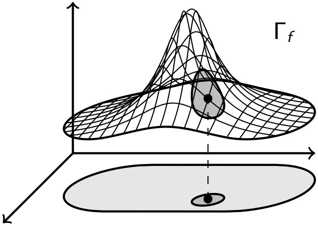
$\lim\limits_{gauche} = \lim\limits_{droite} \neq f(a)$

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de plusieurs variables, de domaine D_f.

• La **limite de f en un point** $\vec{a} \in D_f \cup \partial D_f$ est la valeur à laquelle tend $f(\vec{x})$ quand $\vec{x}$ s'approche de $\vec{a}$ par tous les chemins possibles dans D_f.

On la note

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}).}$$



La limite peut ne pas exister, mais si elle existe elle est unique.

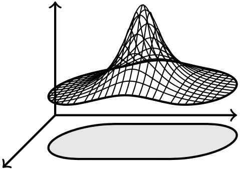
Fonctions continues

• La fonction f est **continue en** $\vec{a} \in D_f$ si

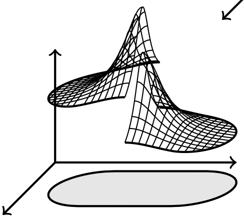
$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}).}$$

• La fonction f est **continue sur le sous-ensemble** $D \subset D_f$ si f est continue en tout point de D.

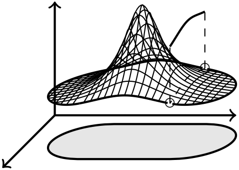
Le graphe d'une fonction continue n'a pas de "sauts" !



continue



non continue



non continue

Quelles fonctions sont continues ?

Théorème – *Toutes les fonctions de plusieurs variables obtenues comme somme, produit ou composée de fonctions continues d'une variable sont continues.*

Quelques fonctions continues –

- Les fonctions polynomiales de plusieurs variables sont continues sur $\mathbb{R}^n$.
- Les fractions rationnelles, les racines, les exponentielles et les logarithmes, les fonctions circulaires, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques sont continues sur leur domaine de définition.

Dans cette section:

- Rappels sur les fonctions d'une variable
- dérivées partielles
- fonctions (continûment) différentiables

Rappels sur les fonctions d'une variable

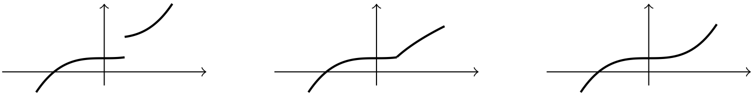
Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'une variable, la **dérivée** de f en $x \in D_f$ est la limite

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si elle existe et est finie. Dans ce cas, f est **dérivable en** x.
La fonction f est **dérivable sur** $D \subset D_f$ si elle est dérivable en tout point $x \in D$.

Propriété – *Une fonction dérivable est continue.*

Le contraire est faux:



non continue — continue, non dérivable — dérivable

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction.

- Les **dérivées partielles de** f **en** $\vec{x} \in D_f$ sont les limites

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n\right) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}}$$

pour $i = 1, \ldots, n$ (si ces limites existent).

- Les **dérivées partielles de** f sont les fonctions

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : \ \vec{x} \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n$$

définies sur l'ensemble de points $\vec{x}$ où les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ existent.

Fonctions (continûment) différentiables

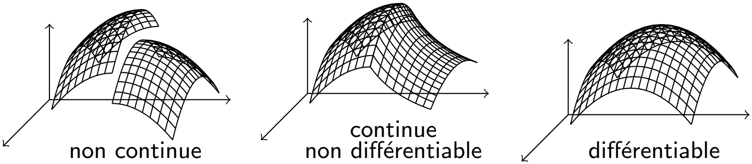
• La fonction f est **(continûment) différentiable sur** $D \subset D_f$, ou **de classe** C^1 **sur** D, si toutes les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

existent et sont des fonctions continues en tout point $\vec{x} \in D$.

Propriété – *Une fonction différentiable est continue.*

Le contraire est faux: le graphe d'une fonction différentiable n'a pas de "sauts" et en plus ne change pas son allure "brusquement"!



Exemples –

- Pour $\quad f(x,y) = xy^2 + 3x \quad$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- Pour $\quad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 + 3x \\ z^2 \end{pmatrix} \quad$ on a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

donc g est C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

- Pour $\quad h(r,\theta,\varphi) = \varphi^2 + r\sin\theta \quad$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 2\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

donc h est C^1 sur $[0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi]$.

Dans cette section:

- Dérivées directionnelles
- Croissance et décroissance des fonctions réelles

Dérivées directionnelles

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$.

Définition – Pour tout vecteur $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on appelle **dérivée directionnelle de f dans la direction** $\vec{v}$ la fonction

$$\boxed{\begin{array}{rccl} \partial_{\vec{v}} f : & D & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{x} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{array}}$$

Nota –
Dérivées partielles = dérivées directionnelles dans la direction des vecteurs

$$\vec{e_i} = (0, ..., 1, ..., 0),$$

où 1 est en $i$ème position,

c'est-à-dire $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{\vec{e_i}} f}$.

Exemples de dérivées directionnelles

Exemples – Cherchons la dérivée directionnelle des fonctions suivantes, dans la direction d'un vecteur générique $\vec{v}$.

- $f(x,y) = xy^2 + 3x$

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy.$$

Alors, pour tout vecteur de direction $\vec{v} = (u,v) \in \mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle de f est la fonction

$$\partial_{\vec{v}} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui vaut, au point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = (y^2 + 3)\, u + 2xy\, v.$$

- $g(x, y, z) = (xy^2 + 3x, yz^2)$

La fonction $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix}.$$

Pour tout $\vec{v} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée directionnelle $\partial_{\vec{v}} g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vaut donc

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} g(x, y, z) &= \begin{pmatrix} y^2 + 3 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 2xy \\ z^2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 2yz \end{pmatrix} w \\ &= \begin{pmatrix} (y^2 + 3)\, u + 2xy\, v \\ z^2\, v + 2yz\, w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

À noter que si on écrit $g = (g_1, g_2)$, on a

$$\partial_{\vec{v}} g = (\partial_{\vec{v}} g_1, \partial_{\vec{v}} g_2) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

- $h(r,\theta,\varphi) = \varphi^2 + r\sin\theta$

La fonction $h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ a dérivées partielles

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 2\varphi \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = r\cos\theta,$$

donc pour tout $\vec{v} = (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée directionnelle de h est la fonction

$$\partial_{\vec{v}} h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui vaut

$$\partial_{\vec{v}} h(r,\theta,\varphi) = \sin\theta\, u + 2\varphi\, v + r\cos\theta\, w.$$

Théorème – *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $\vec{x} \in D$ et tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, on a:*

- *Si* $\boxed{\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) > 0}$ *alors* f *est croissante au point* $\vec{x}$ *dans la direction de* $\vec{v}$.
- *Si* $\boxed{\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) < 0}$ *alors* f *est décroissante au point* $\vec{x}$ *dans la direction de* $\vec{v}$.

De plus:

- forte croissance $\Longleftrightarrow$ grande dérivée positive
- forte décroissance $\Longleftrightarrow$ grande dérivée négative

Nota – On ne peut rien dire sur la croissance de f si $\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = 0$!

Exercice

Énoncé – *La fonction* $f(x,y) = xy^2 + 3x$ *est-elle croissante ou décroissante au point* $(3,1)$*, dans les directions* $(1,1)$*,* $(1,2)$*,* $(1,-1)$ *et* $(1,-2)$ *?*

Réponse – Pour tout vecteur $\vec{v} = (u,v)$, on a

$$\partial_{\vec{v}} f(x,y) = \ (y^2+3)\,u + 2xy\,v$$

et donc

$$\partial_{\vec{v}} f(3,1) = \ 4\,u + 6\,v$$

d'où

- $\partial_{(1,1)} f(3,1) = 10 \quad \Rightarrow \quad f$ croissante en direction $(1,1)$
- $\partial_{(1,2)} f(3,1) = 16 \quad \Rightarrow \quad f$ croissante en direction $(1,2)$
- $\partial_{(1,-1)} f(3,1) = -2 \quad \Rightarrow \quad f$ décroissante en dir. $(1,-1)$
- $\partial_{(1,-2)} f(3,1) = -8 \quad \Rightarrow f \quad$ décroissante en dir. $(1,-2)$

Énoncé (suite) – *Parmi ces quatre directions, quelle est celle de plus forte croissance et celle de plus forte décroissance ?*

Réponse – Pour comparer la croissance d'une fonction en différentes directions, il faut calculer les différentes dérivées directionnelles avec des vecteurs ayant tous la même longueur, par exemple 1.

Directions croissantes –

- $\|(1,1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)} f(3,1) = \dfrac{10}{\sqrt{2}}$
- $\|(1,2)\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)} f(3,1) = \dfrac{16}{\sqrt{5}}$

Or $\quad \frac{10}{\sqrt{2}} < \frac{16}{\sqrt{5}} \quad$ car $\quad (10\sqrt{5})^2 = 500 < (16\sqrt{2})^2 = 512.$

Ainsi, au point $(3,1)$, le fonction f croit plus rapidement dans la direction $(1,2)$.

Directions décroissantes –

- $\|(1,-1)\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)} f(3,1) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

- $\|(1,-2)\| = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)} f(3,1) = -\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

On a $\quad -\frac{2}{\sqrt{2}} > -\frac{8}{\sqrt{5}} \quad$ car ceci se vérifie ssi $\quad \frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{8}{\sqrt{5}}$,

ce qui est vrai car $\quad (2\sqrt{5})^2 = 20 < (8\sqrt{2})^2 = 128$.

Ainsi, au point $(3,1)$, le fonction f décroit plus rapidement dans la direction $(1,-2)$.

Dans cette section:

- Gradient des fonctions réelles
- Interpretation géométrique du gradient

Gradient d'une fonction réelle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle différentiable sur $D \subset D_f$.

- Le **gradient de f en un point** $\vec{x} \in D$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\ \vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}}$$

où le symbole $\vec{\nabla}$ se lit **nabla**.

- Le **gradient de f** est la fonction vectorielle

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \equiv \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n}$$

Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ on a alors $\boxed{\partial_{\vec{v}} f = \langle \vec{\nabla} f, \vec{v} \rangle = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}}$.

Exemples de gradient

Exemples –

- $f(x,y) = xy^2 + 3x \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2+3 \\ 2xy \end{pmatrix}$

Par exemple: $\vec{\nabla} f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\nabla} f(3,2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

- $f(x,y,z) = \sin(xy) + \ln(x^2+z^2) \quad \Rightarrow$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\,\cos(xy) + \frac{2x}{x^2+z^2} \\ x\,\cos(xy) \\ \frac{2z}{x^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

Par exemple: $\vec{\nabla} f(0,\pi,1) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Interprétation géométrique du gradient

Théorème – *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de <u>deux variables</u>, différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Pour tout $\vec{x} \in D$ on a alors:*

• *Le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(\vec{x})$ est orthogonal à la ligne de niveau $L_a(f)$ avec $a = f(\vec{x})$.*

• *Le gradient $\overrightarrow{\nabla} f(\vec{x})$ indique la direction de la pente de plus forte croissante du graphe Γ_f en $\vec{x}$.*

Exemple: interpretation géométrique du gradient

Exemple – $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \Longrightarrow$

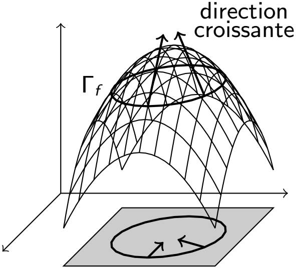
domaine $D_f = \overline{D}_O(1) =$ disque unitaire fermé

ligne de niveau $L_a(f) =$ cercle de rayon $\sqrt{1-a^2}$, où $a \in [0,1]$

f est différentiable sur $D = D_O(1) =$ disque unitaire ouvert, et

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}(x,y).$$

Pour tout $a \in]0,1[$, ce vecteur est orthogonal au cercle $L_a(f)$ au point (x,y) et est dirigé vers le centre du cercle.



2.2.4 – Différentielle

Dans cette section:

- Différentielle des fonctions
- Différentielle des fonctions réelles: dx, dy, dz
- En coordonnées cylindriques et sphériques: $d\rho$, $d\varphi$, dr, $d\theta$

Différentielle d'une fonction en un point

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur l'ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition, pour tout $\vec{x} \in D$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \partial_\bullet f(x) : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \vec{v} & \longmapsto & \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\, v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\, v_n \end{array}$$

est <u>linéaire dans la variable $\vec{v}$</u>.

Définition – Cette application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ s'appelle **différentielle de f au point $\vec{x}$**.

Il est d'usage de la noter $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

En somme, pour tout $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$\boxed{df_{\vec{x}}(\vec{v}) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; v_n \;= \partial_{\vec{v}} f(\vec{x}).}$$

Différentielle en un point: cas particuliers

Cas particuliers –

• Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction <u>réelle</u>, la différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit au moyen du gradient de f:

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \qquad \boxed{\quad df_x(\vec{v}) = \langle \overrightarrow{\nabla} f(x), \vec{v} \rangle \quad}$$

• Si $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction d'<u>une seule variable</u> x, la différentielle $df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ vaut:

$$\forall v \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{\quad df_x(v) = \Big(f_1'(x)\, v \ , \dots , \ f_m'(x)\, v \Big) \quad}$$

Exemples de différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad df_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $df_x(v) = (2x - 5x^4)\, v$.

- $f(x,y) = x^2y^3 - 7y \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est donnée par

$$df_{(x,y)}(u,v) = 2xy^3\, u + (3x^2y^2 - 7)\, v.$$

Par exemple:

$$df_{(x,y)}(2,1) = 4xy^3 + 3x^2y^2 - 7$$

$$df_{(1,1)}(u,v) = 2u - 4v$$

$$df_{(1,1)}(2,1) = 0 \qquad \text{(quelle coincidence !)}$$

- $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \end{array}$

$$df_{(x,y)}(u,v) = u \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2\, u + 2xy\, v \\ v \\ 2x\, u - 2y\, v \end{pmatrix}$$

- $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \end{array}$

$$\begin{aligned} df_{(x,y,z)}(u,v,w) &= u \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2xy \\ z^3 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 3yz^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2\, u + 2xy\, v \\ z^3\, v + 3yz^2\, w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Applications linéaires élementaires

Remarque –

• Les n applications linéaires (pour $i = 1, ..., n$)

$$\boxed{dx_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ \vec{v} = (v_1, ..., v_n) \longmapsto dx_i(\vec{v}) = v_i}$$

formant une *base* de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

• Par conséquent, toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit comme *combinaison linéaire* des dx_i:

$$L = a_1\, dx_1 + \cdots + a_n\, dx_n \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{R}.$$

• Il n'y a pas n applications linéaires

$$''dx_i'' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{pour } i = 1, ..., n)$$

qui forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, parce que cet espace a dimension $n \times m$!

Différentielle

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable sur $D \subset \mathbb{R}^n$. L'application

$$\boxed{\begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & ! \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \vec{x} & \longmapsto & df_{\vec{x}} \end{array}}$$

s'appelle **différentielle** de f et est notée df.

Corollaire – Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, alors:

- La différentielle $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en $\vec{x} \in D$ s'écrit

$$\boxed{df_{\vec{x}} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})\; dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\; dx_n.}$$

- La différentielle $df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ s'écrit

$$\boxed{df \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\; dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\; dx_n.}$$

Exemples: écriture usuelle des différentielles

Exemples –

- $f(x) = x^2 - x^5 \quad \Rightarrow \quad df_x = (2x - 5x^4)\, dx.$

Par exemple: $df_1 = -3\, dx.$

- $f(x, y) = x^2y^3 - 7y \quad \Rightarrow \quad df_{(x,y)} = 2xy^3\, dx + (3x^2y^2 - 7)\, dy.$

Par exemple: $df_{(1,1)} = 2\, dx - 4\, dy.$

- $f(x, y, z) = x^2y^3z - 7yz^2 \quad \Rightarrow$

$$df_{(x,y,z)} = 2xy^3z\ dx + (3x^2y^2z - 7z^2)\ dy + (x^2y^3 - 14yz)\ dz$$

Par exemple: $df_{(1,1,1)} = 2\ dx - 4\ dy - 13\ dz$

2) Pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\begin{aligned} df_{(x,y)} &= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\ dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\ dy \\ &= \frac{-2x}{1 - x^2 + 5y}\ dx + \frac{5}{1 - x^2 + 5y}\ dy \end{aligned}$$

3) Ainsi

$$df_{(2,0)} = \frac{-4}{1-4}\ dx + \frac{5}{1-4}\ dy = \frac{4}{3}\ dx - \frac{5}{3}\ dy$$

et

$$\begin{aligned} df_{(2,0)}(\vec{\imath}) &= df_{(2,0)}(1, 0) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = \tfrac{4}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{\jmath}) &= df_{(2,0)}(0, 1) = \tfrac{\partial f}{\partial y}(2, 0) = -\tfrac{5}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{v}) &= df_{(2,0)}(1, 1) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{3} = -\tfrac{1}{3} \\ df_{(2,0)}(\vec{u}) &= df_{(2,0)}(3, -3) = \tfrac{4}{3}\ 3 - \tfrac{5}{3}(-3) = 4 + 5 = 9 \end{aligned}$$

Exercice : dx, dy, dz, $d\rho$, $d\varphi$, dr et $d\theta$

Énoncé – *On note (x, y, z), (ρ, φ, z) et (r, θ, φ) les coordonnées cartesiennes, cylindriques et sphériques des points de $\mathbb{R}^3$. On rappelle que*

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{array}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{array}$$

Montrer que

$$i)\begin{cases} dx = \cos\varphi\ d\rho - \rho\sin\varphi\ d\varphi \\ \\ dy = \sin\varphi\ d\rho + \rho\cos\varphi\ d\varphi \\ \\ dz = dz \end{cases}$$

$$i')\begin{cases} d\rho = \cos\varphi\ dx + \sin\varphi\ dy \\ \\ \rho d\varphi = -\sin\varphi\ dx + \cos\varphi\ dy \\ \\ dz = dz \end{cases}$$

Formules de passage *cartésiennes* $\longleftrightarrow$ *cylindriques*

$$ii)\left\{\begin{array}{l} dx = \cos\varphi\ \sin\theta\ dr - r\sin\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\cos\varphi\cos\theta\ d\theta \\ \\ dy = \sin\varphi\ \sin\theta\ dr + r\cos\varphi\ \sin\theta\ d\varphi + r\sin\varphi\ \cos\theta\ d\theta \\ \\ dz = \cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \end{array}\right.$$

$$ii')\left\{\begin{array}{l} dr = \cos\varphi\ \sin\theta\ dx + \sin\varphi\ \sin\theta\ dy + \cos\theta\ dz \\ \\ r\sin\theta\ d\varphi = -\sin\varphi\ dx + \cos\varphi\ dy \\ \\ rd\theta = \cos\varphi\ \cos\theta\ dx + \sin\varphi\ \cos\theta\ dy + \sin\theta\ dz \end{array}\right.$$

Formules de passage *cartésiennes* $\longleftrightarrow$ *sphériques*

$$(iii)\begin{cases} dr = \sin\theta\ d\rho + \cos\theta\ dz \\ \\ d\varphi = d\varphi \\ \\ rd\theta = \cos\theta\ d\rho - \sin\theta\ dz \end{cases}$$

$$(iii')\begin{cases} d\rho = \sin\theta\ dr + \cos\theta\ d\theta \\ \\ d\varphi = d\varphi \\ \\ dz = r\cos\theta\ dr - r\sin\theta\ d\theta \end{cases}$$

Formules de passage *cylindriques* $\longleftrightarrow$ *sphériques*

Réponse – Il suffit d'écrire les différentielles des applications de changement de variables. Par exemple la différentielle du changement de variables *cylindriques* $\rightarrow$ *cartésiennes* donne les formules $i)$:

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial x}{\partial z}\, dz \\
&= \cos\varphi \; d\rho - \rho \sin\varphi \; d\varphi \\
dy &= \frac{\partial y}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial y}{\partial z}\, dz \\
&= \sin\varphi \; d\rho + \cos\varphi \; d\varphi \\
dz &= \frac{\partial z}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\, d\varphi + \frac{\partial z}{\partial z}\, dz \\
&= dz
\end{aligned}
$$

Les formules $i')$ s'obtiennent en inversant le système $i)$. On procède dela même façon our les autres formules.

Dans cette section:

- Rappel sur les applications linéaires et les matrices
- Matrice Jacobienne et déterminant Jacobien
- Jacobien des changements de variables

Rappel – Toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se représente come une matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ (avec m lignes et n colonnes) telle que, pour tout $\vec{v} = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
L(\vec{v}) &= A\ \vec{v} \quad \text{(produit matrice par vecteur)} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}\ v_1 + \cdots + a_{1n}\ v_n \\ \vdots \\ a_{m1}\ v_1 + \cdots + a_{mn}\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m
\end{aligned}$$

Matrice Jacobienne

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction diff. sur D.

• La **matrice Jacobienne de** f est la matrice $J_f \in \mathcal{M}_{mn}$ associée à df, c'est à dire telle que

$$\boxed{df_{\vec{x}}(\vec{v}) = J_f(\vec{x})\ \vec{v}} \qquad \text{pour tout } \vec{x} \in D \text{ et tout } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Si $(f_1, ..., f_m)$ sont les composantes de f, on a alors

$$\boxed{J_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}).}$$

• Si la matrice Jacobienne est carrée ($n = m$), son détérminant $\mathrm{Jac}\, f = \det J_f$ s'appelle **Jacobien de** f.

Exemples de matrices Jacobiennes

Exemples –

• Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 y,$

on a

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$$

une matrice ligne.

• Si $\quad \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 :\ t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (2t, t^3 + 1),$

on a

$$J_g(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$$

une matrice colonne, c'est-à-dire un vecteur.

• Si $\quad h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\quad (u, v) \mapsto h(u, v) = \big(h_1(u, v), h_2(u, v)\big) = (u^2 v, 3u),$

on a

$$J_h(u, v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, h(u, v) = \frac{\partial h_1}{\partial u}\frac{\partial h_2}{\partial v} - \frac{\partial h_2}{\partial u}\frac{\partial h_1}{\partial v} = -3u^2$$

• Si $\quad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z) = \sin z,$

on a

$$J_g(z) = \Big(g'(z)\Big) = \Big(\cos z\Big) \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$$

et

$$\mathrm{Jac}\, g(z) = g'(z) = \cos z \in \mathbb{R}$$

Exemple: Jacobien des changements de variables

- **Polaires :** $h(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$

$$J_h(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho, \varphi) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

- **Cylindriques :** $h(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$

$$J_h(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}\, h(\rho, \varphi, z) = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

- **Sphériques :** $\quad h(r,\theta,\varphi) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

$$J_h(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Jac}\, h &= \cos\theta\Big(-r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\Big) \\ &\qquad - r\sin\theta\Big(r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\Big) \\ &= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta \\ &= -r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Exercice

Énoncé – *Calculer le gradient, la différentielle et la matrice jacobienne de la fonction* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *donnée par*

$$f(x, y, z) = z \sin(xy).$$

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) \\ xz \cos(xy) \\ \sin(xy) \end{pmatrix}$$

$$df_{(x,y,z)} = yz \cos(xy)\ dx + xz \cos(xy)\ dy + \sin(xy)\ dz$$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \cos(xy) & xz \cos(xy) & \sin(xy) \end{pmatrix}$$

Exercice

Énoncé – *Calculer la différentielle et la matrice Jacobienne de la fonction* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *donnée par*

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \sin x \\ z \sin y \end{pmatrix}.$$

Réponse – Pour tout $\vec{v} = (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$df_{(x,y,z)}(u,v,w) = \begin{pmatrix} z \cos x \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ z \cos y \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin y \end{pmatrix} w$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & z \cos y & \sin y \end{pmatrix}$$

Dans cette section:

- Resumé sur les dérivées des fonctions réelles
- Resumé sur les dérivées des fonctions vectorielles

Resumé: dérivées des fonctions réelles

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction <u>réelle</u> diff. sur $D \subset \mathbb{R}^n$:

- **dérivées partielles** = fonctions réelles

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}}$$

- **dérivées directionelles** = fonctions réelles

$$\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}}$$

$$\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

- **gradient** = fonction vectorielle

$$\boxed{\vec{\nabla} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n} \qquad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- **différentielle** = fonction à valeur applications linéaires

$$\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$$

- **Jacobienne** = fonction à valeur matrices ligne

$$\boxed{J_f : D \longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R})}$$

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Resumé: dérivées des fonctions vectorielles

Si $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est fonction vectorielle diff. sur D:

- **dérivées partielles** = fonctions vectorielles
  $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$$
  $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)$$
- **dérivées directionelles** = fonctions vectorielles
  $$\boxed{\partial_{\vec{v}} f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$$
  $$\partial_{\vec{v}} f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$
- **gradient** "$\vec{\nabla} f$" n'est pas défini
- **différentielle** = fonction à valeur applications linéaires
  $$\boxed{df : D \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$$
  mais les "dx_i" n'existent pas
- **Jacobienne** = fonction à valeur dans les matrices
  $$\boxed{J_f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})}$$
  $$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Dans cette section:

- Dérivée de la somme et du produit de fonctions
- Dérivée de la composée de fonctions
- Transformation des dérivées partielles: $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \rho}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$

Dérivée de somme de fonctions et produit par scalaire

Proposition – *Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont différentiables, on a :*

- $$\boxed{\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}} \qquad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n$$

Par conséquent $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$ *(si $m=1$),*

$$d(f+g) = df + dg, \quad J_{f+g} = J_f + J_g$$

- $$\boxed{\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}} \qquad \textit{pour tout } i = 1, \ldots, n \qquad \textit{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Par conséquent $\vec{\nabla}(\lambda f) = \lambda \vec{\nabla} f$ *(si $m=1$),*

$$d(\lambda f) = \lambda\, df, \quad J_{\lambda f} = \lambda J_f$$

Dérivée du produit de fonctions

Proposition – *Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions* <u>*réelles*</u> *différentiables, on a la* **règle de Leibniz***:*

- $\boxed{\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\, g + f\, \dfrac{\partial g}{\partial x_i}}$ *pour tout* $i = 1, \ldots, n$

Par conséquent $\vec{\nabla}(fg) = \big(\vec{\nabla} f\big) g + f \big(\vec{\nabla} g\big),$

$$d(fg) = \big(df\big) g + f \big(dg\big),$$

$$J_{fg} = \big(J_f\big) g + f \big(J_g\big)$$

Exemple: règle de Leibniz

Exemple – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy^2\ e^{xy}$. Le calcul de la différentielle de f peut se faire directement au moyen de la formule

$$d\Big(xy^2\ e^{xy}\Big) = \frac{\partial\big(xy^2\ e^{xy}\big)}{\partial x}\ dx + \frac{\partial\big(xy^2\ e^{xy}\big)}{\partial y}\ dy$$

ou en passant par la règle de Leibniz

$$\begin{aligned} d\Big(xy^2\ e^{xy}\Big) &= d\big(xy^2\big)\ e^{xy} + xy^2\ d\big(e^{xy}\big) \\ &= \big(y^2\ dx + 2xy\ dy\big)\ e^{xy} \\ &\qquad + xy^2\ \big(y\ e^{xy}\ dx + x\ e^{xy}\ dy\big) \\ &= \big(y^2 + xy^3\big)\ e^{xy}\ dx + \big(2xy + x^2y^2\big)\ e^{xy}\ dy \end{aligned}$$

Dérivée des fonctions composées

Proposition – *Pour deux fonctions*

$$\begin{aligned} f &= (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \textit{différentiable en } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ g &= (g_1, \ldots, g_p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \quad \textit{différentiable en } \vec{y} = f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

la composée $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $\vec{x}$ et on a la **règle de la chaîne** *:*

- $$\boxed{\frac{\partial \big(g \circ f\big)_j}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\big(f(\vec{x})\big)\,\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial g_j}{\partial y_m}\big(f(\vec{x})\big)\,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\vec{x})}$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$ et tout $j = 1, \ldots, p$,.

Par conséquent, on a aussi :

$d\big(g \circ f\big)_{\vec{x}} = dg_{f(\vec{x})} \circ df_x$ *(composition d'applications linéaires)*

$J_{g \circ f}(\vec{x}) = J_g(f(\vec{x})) \cdot J_f(\vec{x})$ *(produit de matrices)*

La règle de la chaîne dans les cas usuels (1)

- **Composée à droite –**

Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) = z$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto g(z)$

$g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto g\big(f(x,y)\big)$

on a

$$\boxed{\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x,y) &= \frac{d\,g}{d\,z}\big(f(x,y)\big)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(x,y) &= \frac{d\,g}{d\,z}\big(f(x,y)\big)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{aligned} \right.}$$

$$d\big(g \circ f\big)_{(x,y)} = \tfrac{d\,g}{d\,z}\big(f(x,y)\big)\ df_{(x,y)}$$

$$J_{g \circ f}(x,y) = \tfrac{d\,g}{d\,z}\big(f(x,y)\big)\ J_f(x,y)$$

Exercice: règle de la chaîne pour la composée à droite

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $\quad F(x,y) = \ln f(x,y), \quad$ *calculer* $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Réponse – Si on pose $\quad g(z) = \ln z, \quad$ on a $F = g \circ f$ et donc

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \tfrac{d\,g}{d\,z}(f(x,y))\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy}{f(x,y)}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \tfrac{d\,g}{d\,z}(f(x,y))\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2 - 2y}{f(x,y)}$$

La règle de la chaîne dans les cas usuels (2)

- **Composée à gauche –**

Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y)$

$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \mapsto h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$

$f \circ h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (u,v) \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$

on a

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial (f \circ h)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial (f \circ h)}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(h(u,v)\big)\dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

$$d\big(f \circ h\big)_{(u,v)} = df_{h(u,v)} \circ dh_{(u,v)}$$

$$J_{f \circ h}(u,v) = J_f\big(h(u,v)\big)\ J_h(u,v)$$

Exercice: règle de la chaîne pour la composée à gauche

Énoncé – *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $G(u,v) = f(v, uv^2)$, *calculer* $\frac{\partial G}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial G}{\partial v}$.

Réponse – Si on pose $h(u,v) = (v, uv^2) = (x,y)$, c.à d. $\begin{cases} x = v \\ y = uv^2 \end{cases}$

on a $G = f \circ h$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, uv^2)\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v, uv^2)\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\
&= 2v\, uv^2 \cdot 0 + (v^2 - 2uv^2) \cdot v^2 \\
&= (1-2u)v^4 \\
\frac{\partial G(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(v, uv^2)\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(v, uv^2)\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\
&= 2v\, uv^2 \cdot 1 + (v^2 - 2uv^2) \cdot 2uv \\
&= 4u(1-u)v^3
\end{aligned}$$

La règle de la chaîne dans les cas usuels (3)

- **Composée avec une paramétrisation –**

Si $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto f(x, y)$

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$

$f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$

on a

$$\boxed{\frac{d\,\big(f \circ \gamma\big)(t)}{d\,t} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\gamma(t)\big)\ \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\gamma(t)\big)\ \dot{y}(t)}$$

$$d\big(f \circ \gamma\big)_t = df_{\gamma(t)} \circ d\gamma_t$$

$$J_{f\circ\gamma}(t) = J_f\big(\gamma(t)\big)\ J_\gamma(t)$$

Exercice: règle de la chaîne pour une paramétrisation

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dont on connait*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 - 2y.$$

Pour $H(t) = f(t^2, 3t)$, *calculer* $\frac{d\,H(t)}{d\,t}$.

Réponse – Si on pose $\gamma(t) = (t^2, 3t) = (x, y)$, c.à d. $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 3t \end{cases}$

on a $H = f \circ \gamma$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{d\,H(t)}{d\,t} &= \frac{d\,(f \circ \gamma)(t)}{d\,t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3t)\ \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3t)\ \dot{y}(t) \\
&= 2t^2\,3t \cdot 2t + (t^4 - 6t) \cdot 3 \\
&= 15t^4 - 18t
\end{aligned}$$

Énoncé – *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction* $f(x, y) = xy^2$.

1) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $g'(z) = \sqrt{z}$.
Calculer $\dfrac{\partial g(xy^2)}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial g(xy^2)}{\partial y}$.

Réponse – On veut calculer les dérivées de $g \circ f$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(xy^2)}{\partial x} &= g'(xy^2)\,\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} \\ &= \sqrt{xy^2}\;y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(xy^2)}{\partial y} &= g'(xy^2)\,\frac{\partial(xy^2)}{\partial y} \\ &= 2xy\,\sqrt{xy^2}\end{aligned}$$

2) Soit $(x,y) = h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ *un changement de variables dont on connait la matrice Jacobienne*

$$J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix},$$

et soit $\tilde{f} = f \circ h.$ *Calculer* $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v)$ *et* $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v)$.

Réponse – On applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u,v))\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ &= y(u,v)^2 \cdot 0 + 2x(u,v)y(u,v)\, v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(u,v))\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(h(u,v))\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ &= y(u,v)^2 \cdot 1 + 2x(u,v)y(u,v)\, 2uv \end{aligned}$$

Réponse (suite)–

En alternative, on peut passer par les matrices Jacobiennes. Puisque

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} J_{\tilde{f}}(u,v) &= J_f(h(u,v)) \cdot J_h(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} y(u,v)^2 & 2x(u,v)y(u,v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v^2 & 2uv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2 \cdot 0 + 2xy \cdot v^2 & \quad y^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 2uv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2v^2\, x(u,v)y(u,v) & \quad y(u,v)^2 + 4uv\, x(u,v)y(u,v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *une trajectoire dans* $\mathbb{R}^2$ *dépendante du paramètre* t*. Calculer la dérivée en* t *de la fonction* $t \mapsto f(x(t), y(t))$*.*

Réponse – On veut calculer la dérivée de la fonction $f \circ \gamma$, donc on applique la règle de la chaîne:

$$\begin{aligned} \frac{d\, f(x(t), y(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\, \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\, \dot{y}(t) \\ &= y(t)^2 \;\; \dot{x}(t) + 2\, x(t) y(t))\;\, \dot{y}(t) \end{aligned}$$

Exercice : transformation des dérivées partielles

Énoncé – *Soient* (x, y, z) *les coordonnées cartesiennes des points de* $\mathbb{R}^3$, (ρ, φ, z) *les coordonnées cylindriques et* (r, θ, φ) *les coordonnées sphériques. On rappelle que*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \rho \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{cases} r \in]0, \infty[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\\ \theta \in]0, \pi[\end{cases}$$

Montrer que les derivées partielles $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ *et* $\left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}$ *satisfont aux formules suivantes :*

$$(i)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\rho} &= \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} &= -\sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

$$(i')\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial\rho} - \sin\varphi\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial\rho} + \cos\varphi\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

$$
(ii)\left\{\begin{array}{rcl}
\frac{\partial}{\partial r} & = & \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial y}+\cos\theta\ \frac{\partial}{\partial z}\\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} & = & -\sin\varphi\ \frac{\partial}{\partial x}+\cos\varphi\ \frac{\partial}{\partial y}\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} & = & \cos\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial y}-\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial z}
\end{array}\right.
$$

$$
(ii')\left\{\begin{array}{rcl}
\frac{\partial}{\partial x} & = & \cos\varphi\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial r}-\sin\varphi\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\cos\varphi\cos\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\\
\frac{\partial}{\partial y} & = & \sin\varphi\sin\theta\ \frac{\partial}{\partial r}+\cos\varphi\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\sin\varphi\cos\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\\
\frac{\partial}{\partial z} & = & \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial r}-\sin\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{array}\right.
$$

$$
(iii) \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial \rho} + \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\frac{1}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial \rho} - \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(iii') \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \rho} &= \sin\theta\ \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \cos\theta\ \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}
\right.
$$

Réponse – Montrons (i). Pour cela on applique la règle de la chaîne à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(\rho, \varphi, z)$ est le changement de variables des coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \rho} \\
&= \cos\varphi\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -r\sin\varphi\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\varphi\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

d'où suivent les formules (i). Les formules (i') en découlent par inversion du système.

• Pour montrer les formules (ii), on applique cette méthode à la composée $\tilde{f} = f \circ h$ où $(x, y, z) = h(r, \theta, \varphi)$ est le changement de variables des coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes. On a alors:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial r} \\
&= \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial z} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\
&= -\rho \sin\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + \rho \cos\varphi\ \sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= r\cos\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\varphi\ \cos\theta\ \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta\ \frac{\partial f}{\partial z}
\end{aligned}$$

• On inverse le système (ii) pour obtenir (ii').

• On combine les (i) à (ii') pour obtenir (iii) et (iii').

Dans cette section:

- Dérivées d'ordre supérieur
- Théorème de Schwarz
- Matrice Hessienne
- Laplacien, fonctions harmoniques

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont à leur tour différentiables, on peut calculer leurs dérivées partielles.

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les **dérivées partielles d'ordre k de f** sont les fonctions qu'on obtient en dérivant f succéssivement k fois:

$$\boxed{\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}.}$$

Par exemple, si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est fonction de (x, y), on a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

• La fonction f est **de classe** C^k si ses dérivées d'ordre k existent et sont des fonctions continues. La fonction f est **lisse** ou **de classe** C^∞ si elle est C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème de Schwarz

Théorème – *Si les dérivées secondes* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *existent et sont continue en un point* $\vec{x}$*, pour tout* $i, j = 1, ..., n$*, alors*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x})} \quad \textit{pour tout } i \neq j.$$

Corollaire – *Si* f *est une fonction de classe* C^k *(ou lisse), alors toutes ses dérivées mixtes jusqu'à l'ordre* k *(ou* ∞*)*
ayant le même nombre de dérivées en chaque x_i*,*
coincident indépendement de l'ordre dans lequel elles sont calculées.

Exemple : dérivées secondes

Exemple – $\quad f(x,y) = x^3y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 & \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2y \end{cases} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y & \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^3 \end{cases} \end{cases}$$

L'on constate que les dérivées partielles sont continues (donc f est de classe C^2) et que les dérivées mixtes sont identiques.

Exercice

Énoncé – *Soient* $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *et soit* $c \in \mathbb{R}^*$*.*
Montrer que le fonction $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$ *est solution de l'***équation des ondes**

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0} \qquad \textit{pour tout } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Réponse – La fonction u est de classe C^2 car composée de fonctions C^2. On a

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= F'(x-ct)\ \tfrac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G'(x+ct)\ \tfrac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\
&= F'(x-ct) + G'(x+ct) \\
\tfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= F'(x-ct)\ \tfrac{\partial(x-ct)}{\partial t} + G'(x+ct)\ \tfrac{\partial(x+ct)}{\partial t} \\
&= -c\,F'(x-ct) + c\,G'(x+ct)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= F''(x-ct)\ \frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + G''(x+ct)\ \frac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\
&= F''(x-ct) + G''(x+ct),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= -c\,F''(x-ct)\ \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + c\,G''(x+ct)\ \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} \\
&= (-c)^2\,F''(x-ct) + c^2\,G''(x+ct).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

Matrice Hessienne

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 en $\vec{x}$.

• La **matrice Hessienne** de f en $\vec{x}$ est la matrice carrée de taille n contenant toutes les dérivées secondes de f en $\vec{x}$:

$$\boxed{H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x}) \end{pmatrix}}$$

Cette matrice est symétrique par le théorème de Schwarz.

• Son déterminant s'appelle le **Hessien** de f

$$\boxed{\mathrm{Hess}\, f(\vec{x}) = \det H_f(\vec{x})}$$

Exemple: matrice Hessienne

Exemple –

Pour $\quad g(x,y,z) = x\sin y + y\sin z, \qquad$ on a

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x\cos y + \sin z \\ y\cos z \end{pmatrix}$$

puis

$$H_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y & 0 \\ \cos y & -x\sin y & \cos z \\ 0 & \cos z & -y\sin z \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \det H_g(x,y,z) &= -\cos y\,\Big(-y\cos y\sin z - 0 \Big) \\ &= y\cos^2 y\sin z \end{aligned}$$

Énoncé – *Montrer que le Hessien de la fonction*

$$f(x,y) = \sin(x-y)$$

est nul en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse – On a

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x-y) \\ -\cos(x-y) \end{pmatrix}$$

puis

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x-y) & \sin(x-y) \\ \sin(x-y) & -\sin(x-y) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det H_f(x,y) = \big(-\sin(x-y)\big)^2 - \big(\sin(x-y)\big)^2 = 0$$

Laplacien

Définition – Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 au point $\vec{x} \in D$.

- Le **Laplacien** de f en $\vec{x}$ est la trace de la matrice Hessienne $H_f(\vec{x})$:

$$\boxed{\Delta f(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x})}$$

- La fonction f est dite **harmonique** si

$$\boxed{\Delta f(\vec{x}) = 0} \qquad \text{en tout point } \vec{x} \in D.$$

Interprétation géométrique du Laplacien

Proposition – *Soit* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^2*. Si*

- C *est un carré de taille* $h \times h$ *contenu dans* D*, et*
- $\mu(f, C)$ *est la valeur moyenne de* f *sur* C*,*

alors, pour tout point $(a, b) \in C$*, on a*

$$\boxed{\mu(f, C) = f(a, b) + \frac{h^2}{24}\,\Delta f(a, b) + O(h^4)}$$

N.B. Moyenne au Ch.3: $\quad \mu(f, C) = \dfrac{1}{h^2} \displaystyle\iint_C f(x, y)\, dx\, dy.$

Remarque – Cela signifie que la différence $f(a, b) - \mu(f, C)$ est <u>proportionnelle</u> à $\Delta f(a, b)$, et que la constante de proportionalité <u>ne dépend que de la taille du carré</u> où on calcule la moyenne $\mu(f, C)$.

Exercice

Énoncé – *Trouver les valeurs de* $c \in \mathbb{R}^*$ *pour lesquelles la fonction* $u(x,t) = x^2 - c^2 t^2$ *est harmonique.*

Réponse – On a

$$\overrightarrow{\nabla} u(x,t) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2c^2 t \end{pmatrix}$$

puis

$$H_u(x,t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2c^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\Delta u(x,t) = 2 - 2c^2,$$

donc $\Delta u(x,t) = 0$ si et seulement si $c = \pm 1$.

Exercice

Énoncé – *Soient* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *et* $F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$.

1) Déterminer le Laplacien de F *en tout point* $(x,y) \neq (0,0)$.

Réponse – Il s'agit de calculer $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
En utilisant la règle de la chaîne on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial y} \\
&= f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant aussi la règle de Leibniz, on trouve:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\
&= \frac{\partial f'(\sqrt{x^2+y^2})}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + f'\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\
&= f''\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + f'\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\\
&= f''\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\ \frac{x^2}{x^2+y^2} + f'\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\ \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},
\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} = f''\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\ \frac{y^2}{x^2+y^2} + f'\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\ \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
\Delta F(x,y) &= \tfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x^2} + \tfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2})\ \tfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \tfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \tfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}
$$

Énoncé (suite) –

2) Trouver les fonctions f telles que $\Delta F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Réponse – En termes de f, l'équation s'écrit

$$f''(\sqrt{x^2+y^2}) + f'(\sqrt{x^2+y^2})\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

et dépend de la seule variable réelle $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$.

• Finalement, on doit résoudre l'équation différentielle du 2ème ordre non homogène et à cœfficients non constants

$$\text{(E)} \qquad f''(r) + \frac{1}{r}\, f'(r) = r$$

• Pour cela, on transforme (E) en un système d'équations différentielles du 1er ordre:

$$\begin{cases} f'(r) = g(r) & \text{(E1)} \\ g'(r) + \frac{1}{r}\, g(r) = r & \text{(E2)} \end{cases}$$

On trouve g avec (E2) puis on reporte dans (E1) et on trouve f.

• Les solutions de (E2) sont de la forme $g = g_0 + g_p$, où g_0 est la solution générale de l'équation homogène associée

$$\text{(E2*)} \qquad g_0'(r) + \frac{1}{r}\, g_0(r) = 0$$

et g_p est une solution particulière de (E2) obtenue par la méthode de la variation de la constante.

- Explicitement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\text{E2*}) \quad g_0(r) = \lambda \ e^{-\int \frac{1}{r} \ dr} = \lambda \ e^{-\ln r} = \lambda \ e^{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\lambda}{r}$$

- On pose $g_p(r) = \frac{\lambda(r)}{r}$, ce qui donne $g_p'(r) = \frac{\lambda'(r)}{r} - \frac{\lambda(r)}{r^2}$:

$$(\text{E2}) \quad g_p'(r) + \frac{1}{r} \ g_p(r) = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda'(r)}{r} = r \quad \Leftrightarrow \quad \lambda'(r) = r^2$$

On peut choisir $\lambda(r) = \frac{r^3}{3}$, d'où $\quad g_p(r) = \frac{r^2}{3}$.

- On a donc $\quad g(r) = g_0(r) + g_p(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Enfin, les solutions de (E) sont celles de (E1) :

$$(\text{E1}) \quad f'(r) = \frac{\lambda}{r} + \frac{r^2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad f(r) = \lambda \ln(r) + \frac{r^3}{9} + \mu$$

pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Dans cette section:

- Dévéloppement de Taylor
- Approximation et erreur relative

Théorème de Taylor –
Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k autour d'un point $\vec{a}$ peut être approximée en tout point $\vec{x}$ proche de $\vec{a}$ par un polynôme de degré k en $\vec{x} - \vec{a}$, appellé **polynôme de Taylor**, *avec coefficients dépendant seulement des dérivées de f en $\vec{a}$.*

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ qui contient a, alors pour tout $x \in I$ on a

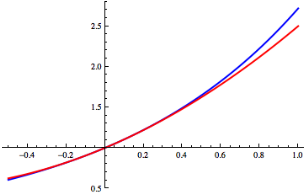
$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)\,(x-a)^2 + o\big((x-a)^2\big).$$

Par exemple, voici le graphe de

$$f(x) = e^x \quad \text{(en bleu)}$$

et celui de son polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 0$,

$$P(x) = 1 + x + x^2/2 \quad \text{(en rouge)}.$$



Formule de Taylor en deux variables

Théorème de Taylor – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur un disque $D \subset \mathbb{R}^2$ qui contient un point (a, b).
Alors, pour tout $(x, y) \in D$, on a

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \tfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b) \\ &+ \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + \tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}\,(x-a)(y-b) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2 \\ &\qquad + o\big(||(x-a, y-b)||^2\big) \end{aligned}}$$

où $o(h)$ est une fonction qui tend vers zéro plus vite de $h \to 0$.

Écritures alternatives:

$$\text{terme à l'ordre 1} \quad = df_{(a,b)}(x-a, y-b) = J_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix},$$

$$\text{terme à l'ordre 2} \quad = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x-a & y-b \end{pmatrix} H_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

Exemple

Exemple – Soit $\quad f(x,y) = \dfrac{x-1}{y-1} \quad$ et $\quad (a,b) = (0,0)$.

On calcule $\quad f(0,0) = 1, \quad$ puis

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y-1} & -\dfrac{x-1}{(y-1)^2} \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{(y-1)^2} \\ & \\ -\dfrac{1}{(y-1)^2} & \dfrac{2(x-1)}{(y-1)^3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi: $\quad \dfrac{x-1}{y-1} = 1 - x + y - xy + y^2 + o\big(||(x,y)||^2\big)$.

Exercice

Énoncé – *La pression P d'un gaz parfait est fonction de la temperature T et du volume V selon la loi*

$$P(T, V) = nR\,\frac{T}{V},$$

où n est la quantité de matière (moles) et R est la constante universelle d'un gaz parfait.

On voudrait connaitre la pression du gaz qui se trouve à l'état (T, V), mais la mesure de cet état nous donne les valeurs (T_0, V_0) avec une **erreure relative**

$$\left|\frac{T - T_0}{T_0}\right| < 0.005\,\% \qquad \textit{et} \qquad \left|\frac{V - V_0}{V_0}\right| < 0.002\,\%.$$

Quelle est l'erreure relative induite par cette mesure sur la valeur $P(V_0, T_0)$ de la pression?

Réponse – On cherche une borne supérieur pour $\left|\frac{P-P_0}{P_0}\right|$, où $P = P(T,V)$ et $P_0 = P(T_0, V_0)$.

Pour cela, on utilise le dévéloppement de Taylor de $P(T,V)$ à l'ordre 1, autour de (T_0, V_0):

$$\begin{aligned} P-P_0 &\simeq dP_{(T_0,V_0)}(T-T_0, V-V_0) \\ &= \tfrac{\partial P}{\partial T}(T_0,V_0)\ (T-T_0) + \tfrac{\partial P}{\partial V}(T_0,V_0)\ (V-V_0) \\ &= nR\,\tfrac{T-T_0}{V_0} - nR\,\tfrac{T_0(V-V_0)}{V_0^2}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{P-P_0}{P_0} \simeq nR\,\frac{T-T_0}{V_0\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} - nR\,\frac{T_0(V-V_0)}{V_0^2\,nR\,\frac{T_0}{V_0}} = \frac{T-T_0}{T_0} - \frac{V-V_0}{V_0}$$

d'où suit

$$\left|\frac{P-P_0}{P_0}\right| \leqslant \left|\frac{T-T_0}{T_0}\right| + \left|\frac{V-V_0}{V_0}\right| < 0.005\,\% + 0.002\,\% = 0.007\,\%.$$

2.6 – Extrema locaux

Dans cette section:

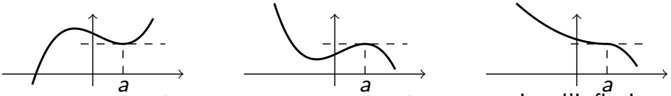
- Rappels sur les fonctions d'une variable
- Extrema locaux
- Points critiques et critère pour trouver les extrema locaux
- Points cols
- Points plats

Rappels sur les fonctions d'une variable

Rappel – Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et non constante, la croissance ou décroissance de f en a est décelée par le signe de $f'(a)$ (positif ou négatif).

• Que se passe-t-il si $\quad f'(a) = 0 \quad$ (*point critique*) ?

Si $f'(a) = 0$, la tangente au graphe de f est horizontale, on est dans l'un des cas suivants:



minimum local — maximum local — point d'inflexion

Pour savoir lequel, on regarde la convexité (*minimum local*) ou la concavité (*maximum local*) donnée par le signe de $f''(a)$ (positif ou négatif).

• Que se passe-t-il si $\quad f''(a) = 0 \quad$ (*point plat*) ?

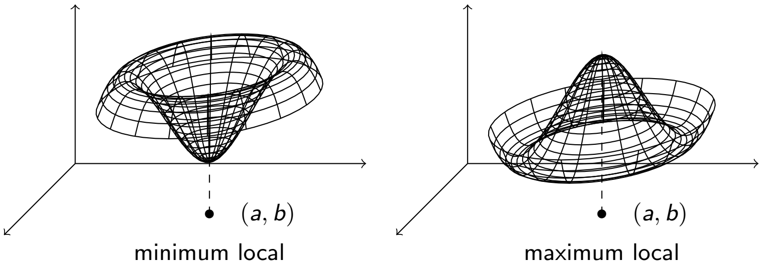
Si $f''(a) = 0$, on continue à dériver: si la première dérivée non nulle est d'ordre pair, on a un min ou un max local (selon le signe).
Si elle est d'ordre impair, on a un point d'inflexion.

Minima et maxima locaux

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'un point $(a, b) \in D_f$ est un **extremum local** de f s'il est

• soit un **minimum local**: $\boxed{f(a, b) < f(x, y)}$
pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b),

• soit un **maximum local**: $\boxed{f(a, b) > f(x, y)}$
pour tout (x, y) dans un voisinage de (a, b).



Points critiques et critère pour extrema locaux

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 au point (a, b).

Définition – (a, b) est un **point critique** de f si $\boxed{\vec{\nabla} f(a, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Proposition – *Si (a, b) est un point critique de f, le plan tangent au graphe de f au point $\big(a, b, f(a, b)\big)$ est horizontal.*

Théorème – *Soit (a, b) un point critique de f.*
Si $\boxed{\det H_f(a, b) > 0}$ *alors (a, b) est un extremum local :*

- *si* $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tr} H_f(a, b) > 0}$
  alors (a, b) est un minimum local,

- *si* $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tr} H_f(a, b) < 0}$
  alors (a, b) est un maximum local.

Exemple de minimum local

Exemple – Montrons que la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ a exactement un minimum local en $(0,0)$.

- Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) = (0,0)$$

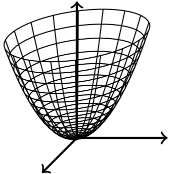
ainsi $(0,0)$ est le seul point critique de f.

- Cherchons sa nature:

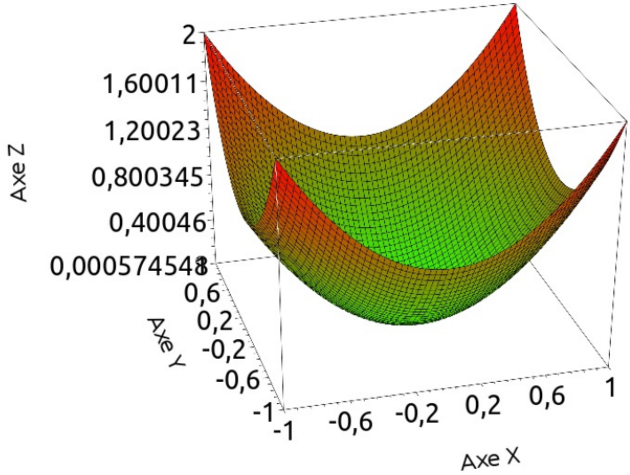
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \det H_f(0,0) = 4 > 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \end{cases}$$

ainsi $(0,0)$ est un minimum local.

- En effet, le graphe de f est:



Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

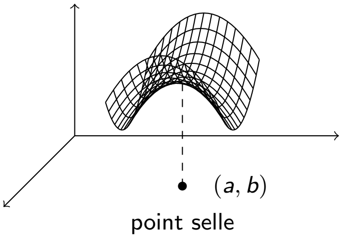


Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Points selle

En un point critique, la fonction f a un plan tangent horizontale. Si le point n'est pas un extremum local, quelle est la forme de f ?

Définition – Soit (a, b) un point critique de la fonction f.
Si en (a, b) la fonction f a un <u>minimum dans une direction</u> et un <u>maximum dans une autre</u>, le point (a, b) s'appelle **point col** ou **point selle**:



Théorème – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit (a, b) un point critique de f.

Si $\boxed{\det H_f(a, b) < 0}$ alors (a, b) est un point selle.

Exemple de point selle

Exemple – Montrons que la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$ a exactement un point selle en $(0,0)$.

- Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y) = (0,0)$$

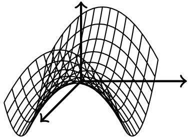
ainsi $(0,0)$ est le seul point critique de f.

- Cherchons sa nature:

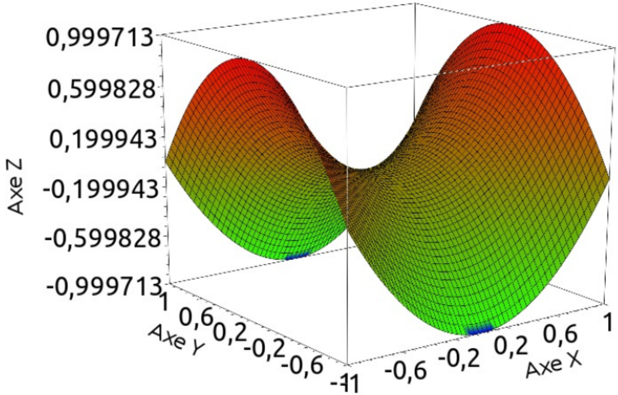
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det H_f(0,0) = -4 < 0$$

ainsi $(0,0)$ est un point col.

- En effet, le graphe de f est:



Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$



Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

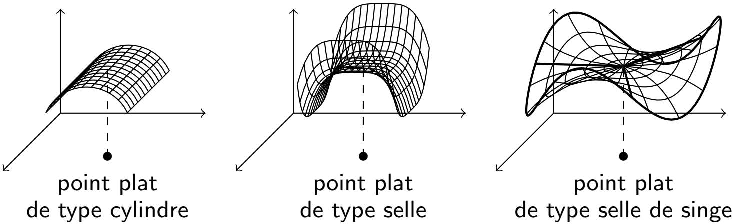
Points plats

Définition – Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 et soit (a, b) un point critique de f. Par exclusion, on dit que (a, b) est un **point plat** si

$$\boxed{\det H_f(a, b) = 0}$$

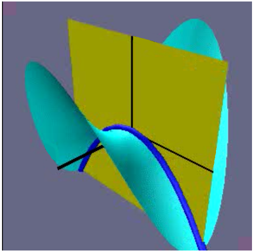
Un tel point se trouve au croisement de directions où f a

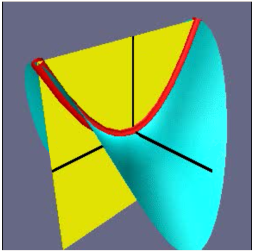
- soit au moins une direction plate (cylindre),
- soit un minimum et un maximum au même temps (selle),
- soit des inflexions (selle de singe).



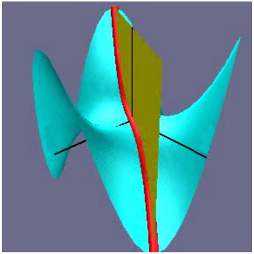
On distingue ces types avec les dérivées d'ordre supérieur à 2.

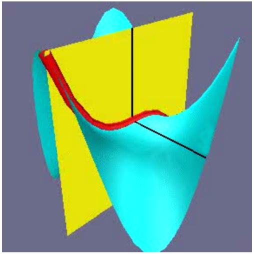
Points col et points plat





Un point col non plat ($z = x^2 - y^2$) ou plat ($z = x^4 - y^4$)





Un point plat à selle de singe ($z = x^3 - 3xy^2$)

Exercice

Énoncé – *Déterminer les points critiques de la fonction*

$$f(x,y) = 4(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2$$

et, si possible, leur nature.

Réponse – Cherchons d'abord les points critiques:

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 4x(x^2+y^2) \\ 8y - 4y(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} x(2-x^2-y^2) = 0 \\ y(2-x^2-y^2) = 0 \end{cases} \iff \left\langle \begin{array}{l} \text{soit } (x,y) = (0,0) \\ \text{soit } x^2+y^2 = 2 \end{array} \right.$$

Par conséquent, f a

- un <u>cercle de points critiques</u> d'équation $x^2+y^2=2$
- et un <u>point critique isolé</u> de coordonnées $(0,0)$.

Cherchons la nature de ces points critiques:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8-12x^2-4y^2 & -8xy \\ -8xy & 8-12y^2-4x^2 \end{pmatrix}$$

- Pour le point $(0,0)$, on a

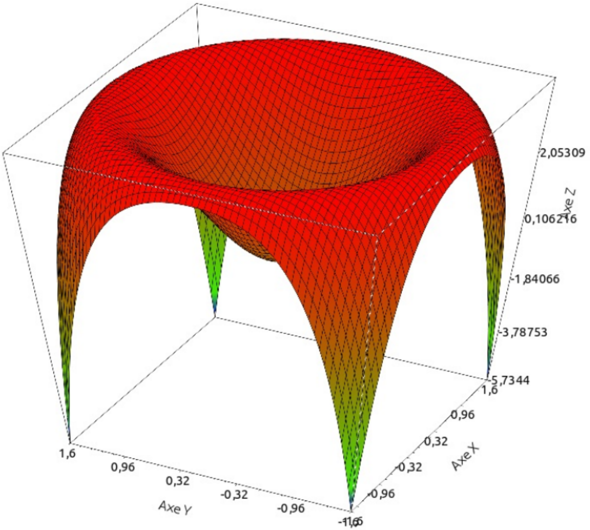
$$\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 64 > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 8 > 0$$

donc $(0,0)$ est un <u>minimum local</u>.

- Pour les points (x,y) tels que $x^2 + y^2 = 2$, on a

$$\det H_f(x,y) = \det \begin{pmatrix} -8x^2 & -8xy \\ -8xy & -8y^2 \end{pmatrix} = 0$$

donc tous les points du cercle $x^2 + y^2 = 2$ sont <u>plats</u>.



Graphe de $f(x, y) = 4(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2$

Chapitre 3
Intégrales multiples

3.1 – Intégrales de Riemann (rappels de TMB)

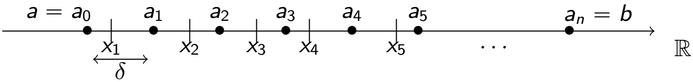
Dans cette section:

- Subdivisions, somme de Riemann et intégrale de Riemann d'une fonction d'une variable
- Aire sous le graphe d'une fonction
- Primitives et techniques d'intégration

Subdivision, somme et intégrale de Riemann

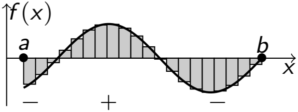
Rappels – Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable:

- **subdivision** de $[a, b]$: $\mathcal{S}_n = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$



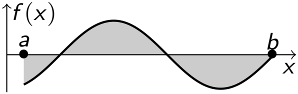
- **somme de Riemann de** f aux points $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$:

$$R_\delta(f; \{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\delta.$$



- **intégrale de Riemann de** f **sur** $[a, b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \text{tout } x_i}} R_\delta(f; \{x_i\})}$$

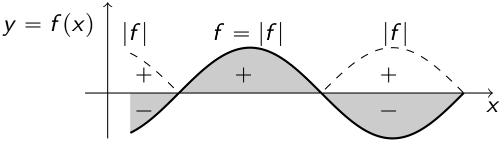


si la limite <u>existe</u>, est <u>finie</u>, et <u>ne dépend pas des x_i</u>.

L'intégrale donne l'aire sous le graphe

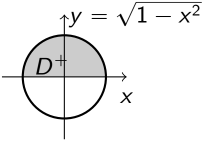
Rappels -

- $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{ aire ``algébrique'' sous le graphe de } f}$
- $\boxed{\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{ aire sous le graphe de } f}$ (positive)



Exemple: L'aire du disque

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$



se calcule comme une intégrale:

$$\mathrm{Aire}\,(D) = 2\,\mathrm{Aire}\,(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Primitives et techniques d'intégration

Pour connaitre l'intégral, il suffit de connaitre une primitive:

- Une **primitive de f sur** $[a,b]$ est une fonction F dérivable telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. On note $F(x) = \int f(x) dx$.

- **Théorème fondamental:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

- **Intégration par changement de variable:** $x = h(t)$

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(h(t)\big)\; h'(t)\,dt,$$

où h est un difféomorphisme (bijection dérivable avec réciproque h^{-1} dérivable).

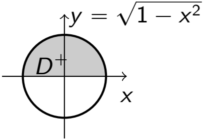
- **Intégration par parties:**

$$\int f(x)\; g'(x)\,dx = f(x)\; g(x) - \int f'(x)\; g(x)\,dx.$$

Problème – Pas d'analogue pour les fonctions de plusieurs variables!

Exemple: aire d'un disque

Aire d'un disque –



$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$

$$\mathrm{Aire}\,(D) = 2\mathrm{Aire}\,(D^+) = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx$$

Calcul par changement de variable: $x = \sin t$ pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, car $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Alors $dx = \cos t\ dt$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}\,(D) &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt \\ &= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\ dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left(0 + \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

Dans cette section:

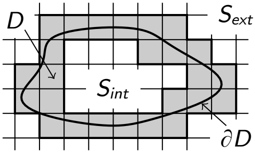
- Subdivisions des domaines du plan
- Sommes de Riemann des fonctions de deux variables
- Intégrale double
- Volume sous le graphe d'une fonction
- Théorème de Fubini
- Théorème du changement de variables

Subdivisions d'un domaine du plan

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble <u>borné</u>, avec bord ∂D <u>lisse</u> (au moins par morceaux).

Définition – Pour tout $\delta > 0$, on appelle **subdivision de** D l'ensemble $\mathcal{S}_\delta$ des carrés K_i de coté δ du plan qui couvrent D dans n'importe quel grillage de pas δ.
En particulier, on considère deux recouvrements:

- un **à l'extérieur** $\mathcal{S}_\delta^{ext}$,
- un **à l'intérieur** $\mathcal{S}_\delta^{int}$.



Puisque D est borné, les subdivisions contiennent un nombre fini de carrés, et on a $\mathcal{S}_\delta^{int} \subset \mathcal{S}_\delta^{ext}$.

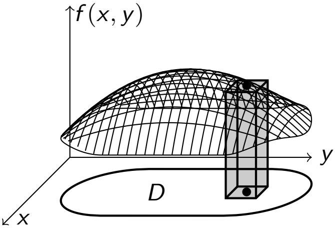
Les carrés dans $\mathcal{S}_\delta^{ext} \backslash \mathcal{S}_\delta^{int}$ couvrent exactement le bord ∂D.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

Définition – Pour tout choix de points $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$, on appelle **sommes de Riemann de** f associées aux subdivisions $\mathcal{S}_\delta^{ext/int}$ et aux points $\{(x_i, y_i)\}$ les sommes

$$R_\delta^{ext/int}(f, \{(x_i, y_i)\}) = \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta^{ext/int}} f(x_i, y_i)\ \delta^2,$$

où chaque terme $f(x_i, y_i)\ \delta^2$ représente le **volume algébrique** ($= \pm$ volume) du parallélepipède de base K_i et hauteur $f(x_i, y_i)$.



Intégrale double

Théorème – *Si les limites* $\lim\limits_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\})$ *existent et elles sont indépendantes du choix des points* $(x_i, y_i) \in K_i \cap D$*, alors elles coincident.*

Définition – Dans ce cas:

• on appelle **intégrale double de f sur D** cette limite:

$$\iint\limits_D f(x, y)\; dx\; dy = \lim_{\delta \to 0} R_\delta^{ext/int}(f; \{(x_i, y_i)\}).$$

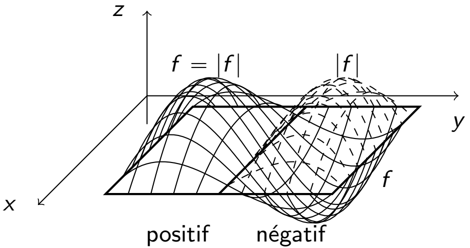
• on dit que f **est intégrable sur D selon Riemann** si l'intégrale $\iint\limits_D f(x, y)\; dx\; dy$ est finie ($=$ nombre, pas $\pm\infty$).

Proposition – *Toute fonction f <u>continue</u> est intégrable selon Riemann sur un ensemble D <u>borné</u> à <u>bord lisse</u> (par morceaux).*

Signification géométrique de l'intégrale double

Corollaire –

- $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \textit{volume “algébrique” sous le graphe de } f.$
- $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy = \textit{volume sous le graphe de } f.$



Volume d'une boule – Le volume de la boule

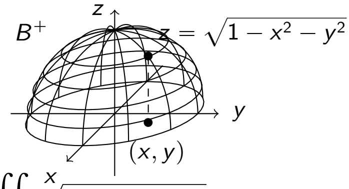
$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\right\}$$

est deux fois le volume de la demi-boule

$$B^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0\right\},$$

qui se trouve sous le graphe de la fonction

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}.$$



On a alors

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\; dx\, dy$$

où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\right\}$ est le disque unitaire.

Propriétés des intégrales doubles

Propriétés – 1) *Pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\iint_D \left(\lambda f + \mu g\right) dx\, dy = \lambda \iint_D f\, dx\, dy + \mu \iint_D g\, dx\, dy.$$

2) *Si* $D = D_1 \cup D_2$ *et* $D_1 \cap D_2 =$ *courbe ou point ou* $\emptyset$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dx\, dy.$$

3) $$\left| \iint_D f(x,y)\, dx\, dy \right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

4) *Si* $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in D$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \leqslant \iint_D g(x,y)\, dx\, dy.$$

Théorème de Fubini sur un rectangle – *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $D = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle. Alors on a*

$$\boxed{\begin{aligned} \iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy \end{aligned}}$$

Notation – $\displaystyle \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$

Corollaire – $\displaystyle \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy$

Exemple 2: calcul d'intégrales doubles

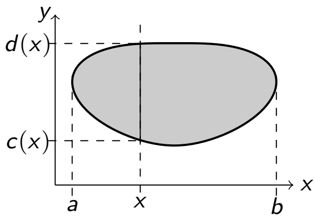
Exemples –

- $$\iint\limits_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x\cos y\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx\ \int_0^{\pi/2}\cos y\,dy$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\sin y\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

- $$\iint\limits_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2y-1)\,dy$$
$$= \int_{-1}^1 dx\,\left[\frac{1}{2}x^2y^2 - y\right]_{y=0}^{y=1}$$
$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2-1\right)\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^1 = -\frac{5}{3}$$

Lemme – *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné quelconque.*

- *Pour tout $(x, y) \in D$ il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$.*
- *Pour tout $x \in [a, b]$ il existe $c(x), d(x) \in \mathbb{R}$ tels que $c(x) \leqslant y \leqslant d(x)$.*



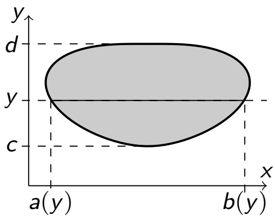
Au final:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ y \in [c(x), d(x)] \right\}$$

Théorème de Fubini sur D – *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors*

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right) dx}$$

Alternative –



L'ensemble D est décrit par

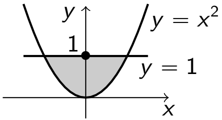
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d],\ x \in [a(y), b(y)] \right\}$$

Théorème de Fubini sur D –

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right) dy}$$

Exemple 3: calcul d'intégrale double

Exemple – Soit D la partie du plan xOy délimitée par l'arc de parabole $y = x^2$ en bas, et la droite $y = 1$ en haut.



On peut décrire D comme

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1],\ y \in [x^2, 1]\big\}.$$

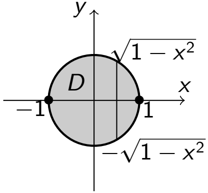
Par conséquent:

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 y \ dx \ dy &= \int_{-1}^{1} x^2 \ dx \ \int_{x^2}^{1} y \ dy \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 \ \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(x^2 - x^6) \ dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7}x^7\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{4}{21}
\end{aligned}$$

Exemple 4: volume de la boule

Exemple – Rappelons que le volume de la boule unitaire est

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$$



où $D = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\big\}$.

On peut décrire D comme l'ensemble

$$D = \Big\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[-1,1],\ y\in\big[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\big]\,\Big\}.$$

- Voici donc le calcul du volume de la boule:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\\ &= 2\int_{-1}^{1} dx\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\,dy.\end{aligned}$$

- On pose $\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \sin t$ pour avoir $\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}} = |\cos t|$.

- $y = \sqrt{1-x^2}\ \sin t \qquad dy = \sqrt{1-x^2}\ \cos t\, dt$
- $-\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad -1 \leqslant \sin t \leqslant 1$

  $\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \quad$ et $\quad \sqrt{1 - \frac{y^2}{1-x^2}} = \cos t$

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}\,(B) &= 2\int_{-1}^{1} dx\ \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\frac{y^2}{1-x^2}}\, dy \\ &= 2\int_{-1}^{1}\ dx\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-x^2}\ \cos t\ \sqrt{1-x^2}\ \cos t\ \ dt \\ &= 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)\ dx\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt \end{aligned}$$

- puisque $\quad 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = \pi$ (voir ex. précédent)

$$\mathrm{Vol}\,(B) = \pi\ \int_{-1}^{1} (1-x^2)\ dx = \pi\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4\pi}{3}.$$

Changement de variables

Définition – Un **changement de variables**

$$(x,y) = h(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

est un difféomorphisme $h : \tilde{D} \to D : (u,v) \mapsto h(u,v) = (x,y)$, c'est-à-dire une bijection de classe C^1 avec réciproque $h^{-1} : D \to \tilde{D} : (x,y) \mapsto h^{-1}(x,y) = (u,v)$ de classe C^1.

Théorème – *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction des variables (x,y) et $(x,y) = h(u,v)$ un changement de variables. Alors*

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v)\,\Big|\det J_h(u,v)\Big|\,du\,dv}$$

où $\tilde{f}(u,v) = f\big(h(u,v)\big)$, $\tilde{D} = \big\{(u,v) \mid h(u,v) \in D\big\}$
et $\det J_h(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$ *est le Jacobien de h.*

Passage en polaire – $\boxed{dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi}$

Exemple 5: volume d'une boule en polaires

Volume de la boule en coordonnées polaires – On calcul

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2 \iint_{D=\{x^2+y^2\leqslant 1\}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

en coordonnées polaires $\quad (x,y) = h(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

- Puisque $x^2+y^2=\rho^2$, on a :

$$\tilde{D} = \Big\{(\rho,\varphi) \in \ [0,\infty[\times[0,2\pi[\ \Big|\ \rho \leqslant 1\Big\} = \ [0,1]\times[0,2\pi[$$

- on utilise $dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$, $\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\rho^2}$ et Fubini:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = 2\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\,d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\ \rho\,d\rho$$

- enfin, on pose $\quad t = 1-\rho^2 \quad$ donc $\quad dt = -2\rho\,d\rho$:

$$\mathrm{Vol}\,(B) = -\frac{4\pi}{2}\int_1^0 t^{1/2}\ dt = 2\pi\int_0^1 t^{1/2}\ dt = 2\pi\frac{2}{3}\Big[t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Dans cette section:

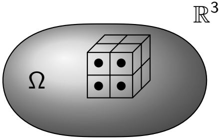
- Subdivisions des solides
- Sommes de Riemann des fonctions de trois variables
- Intégrales triples
- Théorème de Fubini
- Théorème du changement de variables

Intégrale triple

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble borné avec bord $\partial\Omega$ lisse (par morceaux), et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de trois variables.

Définition –

• On choisit une **subdivision** $\mathcal{S}_\delta$ de Ω en petits cubes K_i de taille δ^3, avec δ qui tend vers zéro.



• On définit l'**intégrale triple de f sur** Ω comme la limite (quand elle existe) de la **somme de Riemann** associée à $\mathcal{S}_\delta$ et à des points $(x_i, y_i, z_i) \in K_i \cap \Omega$ quelconque:

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{\delta \to 0} \sum_{K_i \in \mathcal{S}_\delta} f(x_i, y_i, z_i)\, \delta^3.$$

• On dit que f est **intégrable** si son intégrale est finie.

Proposition – *Toute fonction f continue est intégrable selon Riemann sur un ensemble Ω borné à bord lisse (par morceaux).*

Signification géométrique et propriétés

Signification géométrique – *Le graphe de f est une* <u>*hyper-surface*</u> *de* $\mathbb{R}^4$ (difficile à dessiner)*:*

- $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$ <u>*quadri-volume*</u> *"algébrique" sous le graphe de f.*
- $\displaystyle\iiint_\Omega |f(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz =$ <u>*quadri-volume*</u> *sous le graphe de f.*

Propriétés – 1) *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a*

$$\iiint_\Omega \big(\lambda f + \mu g\big)\,dx\,dy\,dz = \lambda \iiint_\Omega f\,dx\,dy\,dz + \mu \iiint_\Omega g\,dx\,dy\,dz.$$

2) *Si $\Omega_1 \cap \Omega_2 =$ surface ou courbe ou point ou $\varnothing$, alors*

$$\iiint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega_1} f\,dx\,dy\,dz + \iiint_{\Omega_2} f\,dx\,dy\,dz.$$

etc

Théorème de Fubini

Théorème de Fubini – *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.*

- *Si Ω est un parallélépipède, alors*

$$\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$$

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g \text{volume}\, dz\ f(x, y, z)}$$

(on intègre dans l'ordre qu'on veut)

- *Si Ω est un ensemble borné quelconque, alors:*

$$\Omega = \Big\{(x,y,z) \Big| \, x \in [a, b],\ \ y \in [c(x), d(x)],\ \ z \in [e(x,y), g(x,y)]\Big\}$$

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{e(x,y)}^{g(x,y)} dz\ f(x, y, z)}$$

(l'ordre d'intégration est forcé)

Exemple 1: calcul d'intégrales triples

Exemple – $\Omega = [0,1]\times[1,2]\times[2,3] \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint_\Omega (x^2 - 2yz)\, dx\, dy\, dz \quad = \int_2^3 dz \int_1^2 dy \int_0^1 dx\ (x^2 - 2yz)$$

$$= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left[\, \frac{1}{3}x^3 - 2xyz \,\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \int_2^3 dz \int_1^2 dy \left(\frac{1}{3} - 2yz\right) \quad = \int_2^3 \left[\, \frac{1}{3}y - y^2 z \,\right]_{y=1}^{y=2} dz$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{2}{3} - 4z - \frac{1}{3} + z\right) dz \quad = \int_2^3 \left(\frac{1}{3} - 3z\right) dz$$

$$= \left[\, \frac{1}{3}z - \frac{3}{2}z^2 \,\right]_2^3 \quad = \frac{3}{3} - \frac{27}{2} - \frac{2}{3} + \frac{12}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{15}{2} \quad = -\frac{43}{6}$$

Exemple 2: calcul d'intégrales triples

Exemple – On veut calculer $\displaystyle\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz$

où Ω est le cylindre plein de hauteur 3 et de base le disque

$$D = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant 1,\ z=0\Big\}.$$

- D'abord, on décrit explicitement Ω :

$$\begin{aligned}\Omega &= \Big\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 3\Big\}\\ &= \Big\{(x,y,z)\mid x\in[-1,1],\ y\in\big[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}\big],\ z\in[0,3]\Big\}\end{aligned}$$

- Ensuite on applique Fubini:

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^3 dz \iint_D (1-2yz)\,dx\,dy\\ &= \int_0^3 dz \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\ (1-2yz)\end{aligned}$$

Exemple (suite) –

$$\iiint\limits_{\Omega} (1-2yz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2yz)\,dy$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^{1} \Big[y - y^2 z\Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^{1} \Big(\sqrt{1-x^2} - (1-x^2)z + \sqrt{1-x^2} + (1-x^2)z\Big)\,dx$$

$$= \int_0^3 dz \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\ dt$$

$$= 3\pi$$

Définition – Un **changement de variables**

$$\vec{x} = (x, y, z) = h(u, v, w) = \big(x(\vec{u}), y(\vec{u}), z(\vec{u})\big)$$

est un difféomorphisme $\quad h : \tilde{\Omega} \to \Omega : \vec{u} \mapsto h(\vec{u}) = \vec{x}$
(bijection C^1 avec réciproque $h^{-1}(\vec{x}) = \vec{u}$ aussi C^1).

Théorème – *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de $\vec{x}$ et $\vec{x} = h(\vec{u})$ un changement de variables. Alors*

$$\boxed{\iiint\limits_{\Omega} f(\vec{x})\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\tilde{\Omega}} f\big(h(\vec{u})\big)\, \Big|\det J_h(\vec{u})\Big|\, du\, dv\, dw}$$

où $\quad \tilde{\Omega} = \big\{\vec{u} \mid h(\vec{u}) \in \Omega\big\}$ *et* $\quad \det J_h(\vec{u}) \quad$ *est le Jacobien de h.*

Passage en coordonnées cylindriques et sphériques –

$$\boxed{dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta}$$

Exemple 3: intégrale par changement de variables

Exemple – Considérons à nouveau $\displaystyle\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz$

où Ω est le cylindre de hauteur 3 et de base le disque D.

- En coordonnées cylindriques, on a

$$\Omega = \left\{\, (\rho,\varphi,z) \mid \rho \in\,]0,1],\ \varphi \in [0,2\pi[,\ \ z \in [0,3] \,\right\}$$

- Puisque $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$, on a

$$\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho \ \int_0^{2\pi} (1-2\rho\sin\varphi z)\ d\varphi$$

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 \rho\,d\rho \left[\,\varphi + 2\rho\cos\varphi z\,\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}$$

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 \Big(2\pi + 2\rho z - 2\rho z\Big)\ \rho\,d\rho$$

$$= \int_0^3 dz \int_0^1 2\pi\ \rho\,d\rho \quad = 3\ \pi\ \left[\,\rho^2\,\right]_0^1 \quad = 3\pi$$

Dans cette section:

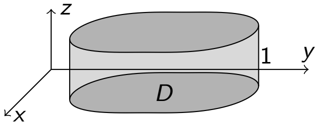
- Aire d'un domaine du plan
- Volume d'un solide
- Quantités totale et moyenne
- Centre de masse et moment d'inértie

Motivation pour la définition générale d'aire

Remarque – Si D est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, l'intégrale

$$\iint\limits_D dx\ dy$$

représente le volume sous le graphe de la fonction $f(x, y) = 1$.



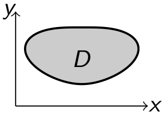
Ce solide Ω est un cylindre de hauteur $H = 1$ et de base D:

$$\iint\limits_D dx\ dy = \mathrm{Vol}\,(\Omega) = \mathrm{Aire}\,(D) \times H = \mathrm{Aire}\,(D).$$

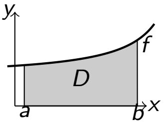
Aire d'un domaine du plan

Définition – L'**aire** d'un domaine D borné de $\mathbb{R}^2$ est

$$\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \iint_D dx\,dy}$$



Proposition – *Si D est la portion du plan sous le graphe d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ positive, c'est-à-dire si*



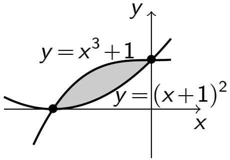
$$D = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [0, f(x)]\},$$

alors: $$\boxed{\mathrm{Aire}\,(D) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

- En effet: $$\iint_D dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercice: aire d'un domaine du plan

Énoncé – Calculer l'aire du domaine borné $D \subset \mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 2x + 1$ et $y = x^3 + 1$.



Réponse – D'abord on dessine D et on trouve les deux points d'intersection des courbes: $(-1, 0)$ et $(0, 1)$.

On a donc

$$D = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ x^2 + 2x + 1 \leqslant y \leqslant x^3 + 1 \Big\}.$$

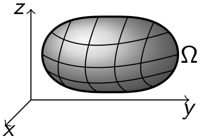
Ensuite on applique Fubini:

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}\,(D) &= \iint_D dx\,dy \quad = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2+2x+1}^{x^3+1} dy \\ &= \int_{-1}^{0} \big(x^3 + 1 - x^2 - 2x - 1 \big)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

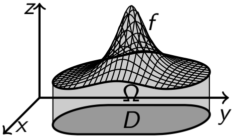
Volume d'un solide

Définition – Le **volume** d'un solide Ω borné de $\mathbb{R}^3$ est

$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz}$$



Proposition – *Si Ω est l'espace sous le graphe d'une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire si*



$$\Omega = \big\{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ z \in [0, f(x,y)]\big\},$$

alors:
$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(\Omega) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

- Car $\displaystyle \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_0^{f(x,y)} dz = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$

Exemple 1: volume d'une boule en sphériques

Volume de la boule en coordonnées sphériques – En coordonnées sphériques, la boule unité B s'écrit

$$B = \Big\{(r,\theta,\varphi) \mid r \in [0,1],\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi[\Big\}.$$

Puisque $dx\,dy\,dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\,(B) &= \iiint_B dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi[\times[0,\pi]} r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^1 r^2\, dr \ \int_0^{2\pi} d\varphi \ \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{3}\ 2\pi\ \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}\ (1+1) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Quantités totale et moyenne

Définition – En physique, si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ représente une *concentration* de matière (une *densité volumique*), ou une *densité* de courant ou d'énergie, alors on appelle

- **quantité totale** de matière / courant / énergie en Ω le nombre

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

- **quantité moyenne** de matière / courant / énergie en Ω le nombre

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Exemple 2: moyenne

Exemple – Un matériau est réparti dans un cube $\Omega = [0, R]^3$ selon la densité volumique $f(x, y, z) = \frac{x+y}{(z+1)^2}$.

- La quantité totale du matériau est alors

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^R dx \int_0^R (x+y)\, dy \int_0^R \frac{1}{(z+1)^2} dz$$
$$= \int_0^R \Big[xy + \frac{1}{2}y^2\Big]_{y=0}^{y=R} dx \, \Big[-\frac{1}{z+1}\Big]_0^R$$
$$= \int_0^R \Big(Rx + \frac{1}{2}R^2\Big) dx \Big(1 - \frac{1}{R+1}\Big)$$
$$= \Big[\frac{1}{2}Rx^2 + \frac{1}{2}R^2 x\Big]_0^R \frac{R}{R+1} = \frac{R^4}{R+1}.$$

- Puisque $\mathrm{Vol}(\Omega) = R^3$, la quantité moyenne est

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\Omega)} \iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{R^3} \frac{R^4}{R+1} = \frac{R}{R+1}.$$

Barycentre

Définition – Si $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ denote la *densité de masse* d'un matériau contenu dans Ω, on appelle

• **masse totale** le nombre $\quad M = \iiint_D \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

La masse (*inertielle*) M d'un solide soumis à une force quantifie sa résistence à une *accéleration linéaire*.

• **centre de masse** (ou **centre d'inertie**, ou **barycentre**) le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_\Omega x\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_\Omega y\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_\Omega z\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Le centre de masse d'un solide sousmis à une force est le point qui se déplace comme comme si le solide y était concentré.

Moment d'inertie

Définition (suite) – Si $r(x, y, z)$ est la distance d'un point (x, y, z) à un point fixé P ou à une droite Δ:

• le **moment d'inertie** par rapport à P ou à Δ est le nombre

$$\frac{1}{M} \iiint_{\Omega} r^2(x, y, z)\, \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Le moment d'inertie d'un solide sousmis à une force quantifie sa résistence à la rotation autour de P ou Δ (à une *accéleration angulaire*).

Nota – Un matériau est dit **homogène** si sa densité de masse μ est constante. Dans ce cas, sa masse dedans Ω est donnée par l'intégrale

$$M = \mu \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz = \mu\, \mathrm{Vol}\,(\Omega),$$

et les formules du centre de masse et du moment d'inértie se modifient en conséquence.

Exemple 3: centre de masse

Exemple – On cherche à déterminer le centre de masse du demi-cylindre homogène ($\mu = 1$)

$$\Omega = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ z \in [0, H],\ y \geqslant 0\big\}.$$

• Il est naturel de travailler en coordonnées cylindriques et d'écrire le demi-cylindre comme

$$\tilde{\Omega} = \big\{(\rho, \varphi, z) \mid \rho \in [0, R],\ \varphi \in [0, \pi],\ z \in [0, H]\big\}.$$

• Le calcul de la masse totale donne

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz &&= \iiint_{\tilde{\Omega}} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\ &= \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^H dz &&= \frac{\pi R^2 H}{2}. \end{aligned}$$

- Le centre de masse G a pour coordonnées cartésiennes

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\tilde{\Omega}} (\rho \cos\varphi) \ \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \frac{1}{M} \int_0^R \rho^2 \, d\rho \ \int_0^{\pi} \cos\varphi \, d\varphi \ \int_0^H dz = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M} \int_0^R \rho^2 \, d\rho \ \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \ \int_0^H dz = \frac{2}{\pi R^2 H} \ \frac{R^3}{3} \ 2 \ H = \frac{4R}{3\pi} \\
z_G &= \frac{1}{M} \iiint\limits_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M} \int_0^R \rho \, d\rho \ \int_0^{\pi} d\varphi \ \int_0^H z \, dz = \frac{2}{\pi \ R^2 H} \ \frac{R^2}{2} \ \pi \ \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}
\end{aligned}
$$

Ainsi $G = \left(0, \frac{4R}{3\pi}, \frac{H}{2}\right)$.

Exercice 1: quantité totale et moyenne

Énoncé – *De la farine s'éparpille au sol selon la densité*

$$f(x,y) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2}, \quad \text{où } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Trouver la quantité totale et moyenne de farine éparpillée sur un disque D de rayon $R > 0$ centré en l'origine.

Réponse – En coord. polaires, on a $f(\rho,\varphi) = \dfrac{1}{(\rho+1)^2}$ et $D = \{ (\rho,\varphi) \mid \rho \in [0,R],\ \varphi \in [0,2\pi[\}$. Ainsi:

$$\text{Quantité totale} = \iint_D \frac{1}{(\rho+1)^2}\ \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^R \left(\frac{\rho+1}{(\rho+1)^2} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \right) d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^R \left(\frac{1}{\rho+1} - \frac{1}{(\rho+1)^2} \right) d\rho$$

$$= 2\pi \Big[\ln(\rho+1) + \frac{1}{\rho+1} \Big]_0^R = 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right).$$

Au final:

$$\text{Quantité totale} = 2\pi \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right).$$

Puisque

$$\mathrm{Aire}\,(D) = \iint\limits_D \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^2}{2}\, 2\pi = \pi R^2,$$

on a

$$\begin{aligned} \text{Quantité moyenne} \quad &= \frac{1}{\mathrm{Aire}\,(D)} \iint\limits_D \frac{1}{(\rho+1)^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi \\ &= \frac{2}{R^2} \left(\ln(R+1) - \frac{R}{R+1} \right). \end{aligned}$$

Exercice – *Calculer le centre de masse du solide Ω composé de la demi-boule B et du cylindre C suivants:*

$$\begin{aligned} B &= \Big\{ (r, \theta, \varphi) \ \Big| \ r \in [0, R], \ \theta \in [\pi/2, \pi], \ \varphi \in [0, 2\pi] \Big\} \\ C &= \Big\{ (\rho, \varphi, z) \ \Big| \ \rho \in [0, R], \ \varphi \in [0, 2\pi], \ z \in [0, R] \Big\}, \end{aligned}$$

et avec la densité de masse $\mu(x, y, z) = z^2$.

Réponse – Puisque $\Omega = B \cup C$, et $B \cap C =$ courbe, le centre de masse G a coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M_\Omega} \iiint_\Omega x \, \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad \text{(idem pour } y_G \text{ et } z_G\text{)},$$

où $\quad M_\Omega = M_B + M_C \quad$ et $\quad \displaystyle\iiint_\Omega = \iiint_B + \iiint_C.$

• Les intégrales se calculent:
en coordonnées sphériques sur B, où $\mu(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos^2 \theta$,
en coordonnées cylindriques sur C, où $\mu(\rho, \varphi, z) = z^2$.

- Calcul de la masse de Ω:

$$\begin{aligned}
M_B &= \iiint_B r^2 \cos^2\theta \; r^2 \sin\theta \; dr\, d\varphi\, d\theta \\
&= \int_0^R r^4\, dr \;\int_0^{2\pi} d\varphi \;\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{R^5}{5} 2\pi \Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta \Big]_{\pi/2}^{\pi} \quad = \frac{2\pi R^5}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_C &= \iiint_C z^2\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz \\
&= \int_0^R \rho\, d\rho \;\int_0^{2\pi} d\varphi \;\int_0^R z^2\, dz \quad = \frac{R^2}{2}\; 2\pi\; \frac{R^3}{3} \quad = \frac{\pi R^5}{3}
\end{aligned}$$

Au final: $\quad M_\Omega = M_B + M_C = \left(\dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{3} \right) \pi R^5 = \dfrac{7\pi R^5}{15}.$

• Puisque $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$ et $\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = 0$, on a:

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_{\Omega} x \, \mu(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 \, dr \ \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta \\
&\qquad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2 \, d\rho \ \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \ \int_0^R z^2 \, dz \qquad = 0 \\
y_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_{\Omega} y \, \mu(x,y,z) \, dx \, dy \, dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5 \, dr \ \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \ \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta \\
&\qquad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho^2 \, d\rho \ \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \ \int_0^R z^2 \, dz \qquad = 0
\end{aligned}
$$

Enfin:

$$
\begin{aligned}
z_G &= \frac{1}{M_\Omega} \iiint\limits_{\Omega} z\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R r^5\,dr \;\int_0^{2\pi} d\varphi \;\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3\theta \sin\theta\,d\theta \\
&\qquad + \frac{1}{M_\Omega} \int_0^R \rho\,d\rho \;\int_0^{2\pi} d\varphi \;\int_0^R z^3\,dz \\
&= \frac{15}{7\pi R^3} \left(\frac{R^6}{6}\; 2\pi \left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta \right]_{\pi/2}^{\pi} + \frac{R^2}{2}\, 2\pi\, \frac{R^4}{4} \right) \\
&= \frac{15\pi R^6}{7\pi R^3} \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{15R^3}{7}\; \frac{2}{12} \\
&= \frac{5R^3}{14}.
\end{aligned}
$$

• En conclusion, le barycentre G de Ω a pour coordonnées

$$G = (0, 0, 5R^3/14)$$

Puisque $5R^3/14 > 0$, il se trouve dans la partie cylindrique.

• Le barycentre se trouve à l'intérieur de Ω si

$$5R^3/14 \leqslant R$$

c'est-à-dire si $R \leqslant \sqrt{14/5}$.