FORMULAIRE SUR LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

1. **Définitions :**

$$\text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad D = \mathbb{R}, \quad I = [+1, +\infty[.$$

$$\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad D = \mathbb{R}, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$\text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad D = \mathbb{R}, \quad I =]-1, +1[.$$

$$\coth x = \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad D = \mathbb{R}^*, \quad I =]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[.$$

2. **Valeurs particulières :**

$$\cos(0) = 1, \qquad \sin(0) = 0, \qquad \tan(0) = 0, \qquad \cot(0) = \pm\infty$$

3. **Identité hyperbolique :** $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1.$

4. **Expression de** $\text{sh}x$ **et** $\text{th}x$ **en fonction de** $\text{ch}x$ **et de** $\text{ch}x$ **et** $\coth x$ **en fonction de** $\text{sh}x$ **:**

$$\text{sh}x = \pm\sqrt{\text{ch}^2x - 1} \qquad \text{ch}x = \sqrt{\text{sh}^2x + 1}$$

$$\text{th}x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} \qquad \cot x = \pm\sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 x}}$$

5. **Relation avec l'exponentiel :** $\text{ch}x + \text{sh}x = e^x$ et $\text{ch}x - \text{sh}x = e^{-x}$.

6. **Formule de puissance :** $(\text{ch}x + \text{sh}x)^n = \text{ch}(nx) + \text{sh}(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. **Formules d'addition :**

$$\text{ch}(x+y) = \text{ch}x\text{ch}y + \text{sh}y\text{sh}x \qquad \text{ch}(x-y) = \text{ch}x\text{ch}y - \text{sh}y\text{sh}x$$

$$\text{sh}(x+y) = \text{sh}x\text{ch}y + \text{sh}y\text{ch}x \qquad \text{sh}(x-y) = \text{sh}x\text{ch}y - \text{sh}y\text{ch}x$$

$$\text{th}(x+y) = \frac{\text{th}x + \text{th}y}{1 + \text{th}x\text{th}y} \qquad \text{th}(x-y) = \frac{\text{th}x - \text{th}y}{1 - \text{th}x\text{th}y}$$

8. **Formules de duplication :**

$$\text{ch}(2x) = \text{ch}^2x + \text{sh}^2x \qquad \text{sh}(2x) = 2\text{sh}x\text{ch}x \qquad \text{th}(2x) = \frac{2\text{th}x}{1 + \text{th}^2x}$$

9. **Formules de linéarisation :**

$$\text{ch}^2x = \frac{\text{ch}(2x) + 1}{2} \qquad \text{sh}^2x = \frac{\text{ch}(2x) - 1}{2} \qquad \text{th}^2x = \frac{\text{ch}(2x) - 1}{\text{ch}(2x) + 1}$$

10. **Formules de factorisation :**

$$\text{ch}x - \text{ch}y = 2\text{sh}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\text{sh}x + \text{sh}y = 2\text{sh}\left(\frac{x+y}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

11. **Formules relatives aux variables opposés :**

$$\text{ch}(-x) = \text{ch}x \qquad \text{sh}(-x) = -\text{sh}x \qquad \text{th}(-x) = -\text{th}x \qquad \coth(-x) = -\coth x.$$