Fascicule d'exercices pour l'UE Maths 2B

Printemps 2024

A. Frabetti <frabetti@math.univ-lyon1.fr>

N. Jacquemot <nadege.jacquemot@univ-lyon1.fr>

Table des matières

TD 1 – CHAMPS SCALAIRES ET CHAMPS DE VECTEURS

Exercice 1 – Champs scalaires, surfaces de niveau

Considerons le champ scalaire de $\mathbb{R}^3$

$$\phi(x,y,z) = -\frac{K}{x^2+y^2},$$

où $K > 0$ est une constante.

a) Exprimer ϕ en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et en coordonnées sphériques (r, θ, φ).

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, trouver les surfaces de niveau a de ϕ en séparant les cas $a \geqslant 0$ et $a < 0$, et dessiner celles de niveau $a = -1$ et $a = -2$. [*Utiliser l'expression de ϕ en coordonnées cylindriques.*]

c) Dessiner le graphe du champ ϕ comme fonction de la seule variable ρ.

Exercice 2 – Champs de vecteurs

Trouver le domaine de définition et dessiner quelques valeurs des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

c) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{e_\varphi}$

e) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\,\vec{e_\varphi}$

f) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

g) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

h) $\vec{V}(r,\theta,\varphi) = r\,\vec{e_\theta} + r\,\vec{e_\varphi}$

Exercice 3 – Dessin des champs de vecteurs

Relier chaque champ vectoriel à son dessin.

a) $\vec{V}(x,y) = -y\,\vec{\imath}$

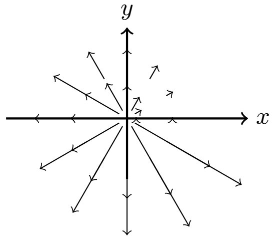
b) $\vec{V}(x,y) = -x\,\vec{\jmath}$

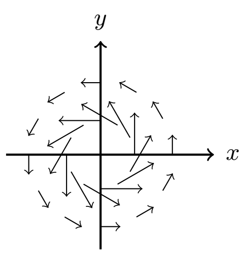
c) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}$

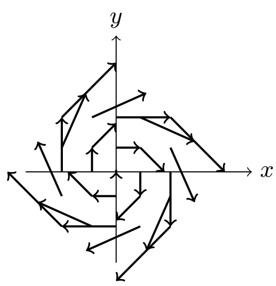
d) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \varphi\,\vec{e_\rho}$

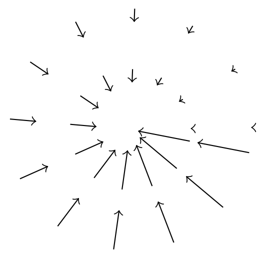
e) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \frac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$

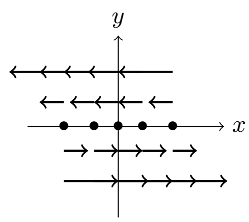
f) $\vec{V}(\rho,\varphi) = -\varphi\,\vec{e_\rho}$

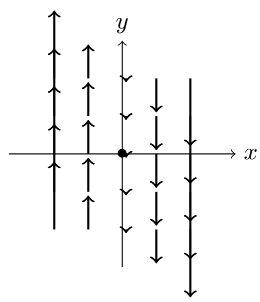
A)


B)


C)


D)


E)


F)


TD 2 – CHAMPS DE VECTEURS ET LIGNES DE CHAMP

Exercice 4 – Changement de coordonnées pour les champs de vecteurs
Exprimer les champs vectoriels suivants en coordonnées polaires (dans le plan) ou bien cylindriques et sphériques (dans l'espace) :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath}$

c) $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Exercice 5 – Lignes de champ
Trouver les lignes de champ des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

b) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

c) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

e) $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{G\,M}{r^2}\,\vec{e_r}$ (champ gravitationnel)

Exercice 6 – Lignes de champ [Exercices supplémentaires d'entrainement]
Trouver les lignes de champ des champs vectoriels suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = x^2\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ (trouver la courbe paramétrée par le temps t et son équation cartésienne)

b) $\vec{V}(x,y) = x^2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ (trouver la courbe paramétrée par le temps t et son équation cartésienne)

c) $\vec{V}(x,y) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath}$ (trouver la courbe paramétrée par le temps t et son équation cartésienne)

d) $\vec{V}(x,y) = y^2\,\vec{\imath} + x^2\,\vec{\jmath}$ (trouver seulement l'équation cartésienne de la courbe)

e) $\vec{V}(x,y) = y^2\,\vec{\imath} - x^2\,\vec{\jmath}$ (trouver seulement l'équation cartésienne de la courbe)

f) $\vec{V}(x,y) = 3y^2\,\vec{\imath} + 2x\,\vec{\jmath}$ (trouver seulement l'équation cartésienne de la courbe)

g) $\vec{V}(x,y) = \dfrac{1}{x}\,\vec{\imath} + \dfrac{1}{y}\,\vec{\jmath}$ (trouver la courbe paramétrée par le temps t et son équation cartésienne)

Exercice 7 – Gradient et Laplacien en coordonnées polaires [Facultatif]
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 donnée en coordonnées cartesiennes et soit $\tilde{f}(\rho,\varphi) = f(x,y)$ son expression en coordonnées polaires, où $x = \rho\cos\varphi$ et $y = \rho\sin\varphi$.

Trouver l'expression en coordonnées polaires du gradient $\tilde{\nabla}$ et du Laplacien $\tilde{\Delta}$, définis par les identitées

$$a)\quad \tilde{\nabla}\tilde{f}(\rho,\varphi) = \nabla f(x,y) \qquad \text{et} \qquad b)\quad \tilde{\Delta}\tilde{f}(\rho,\varphi) = \Delta f(x,y).$$

TD 3 – CHAMPS CONSERVATIFS

Exercice 8 – Rotationnel

Calculer le rotationnel des champs de vecteurs suivants :

a) $\vec{E}(x,y,z) = xy^2\ \vec{\imath} + 2x^2yz\ \vec{\jmath} + 3yz^2\ \vec{k}$

b) $\vec{E}(x,y,z) = \sin(xyz)\ \vec{\imath} + \cos(xyz)\ \vec{\jmath}$

c) $\vec{E}(x,y,z) = yz\ \vec{\imath} + xz\ \vec{\jmath} + xy\ \vec{k}$

d) $\vec{E}(x,y,z) = xyz\ \vec{\imath}$

e) $\vec{E}(\rho,\varphi,z) = \rho^2\sin\varphi\ \vec{e_\rho} + \rho^2(z^2+1)\ \vec{e_\varphi} + \rho^2\ \vec{k}$

f) $\vec{E}(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\varphi\ \vec{e_r} + r^2\ \vec{e_\theta} + r^2\sin\theta\ \vec{e_\varphi}$

Remarque : si $\vec{A}(x,y) = A_x(x,y)\,\vec{\imath} + A_y(x,y)\,\vec{\jmath}$ est un champ sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de z et n'a pas de composante en direction $\vec{k}$, alors le champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ n'a qu'une composante en direction $\vec{k}$ et il est de la forme

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}(x,y) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

La preuve est un simple calcul direct à partir de la formule générale de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$.

Exercice 9 – Champs de gradient

Un champ de vecteurs $\vec{V}$ est un *champ de gradient* si $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)$ pour une fonction f qui s'appelle *potentiel scalaire* de $\vec{V}$. Dire si les champs suivants sont des champs de gradient (en utilisant le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas déterminer un potentiel scalaire.

a) $\vec{V}(x,y) = (y,x)$

b) $\vec{V}(x,y) = (x+y, x-y)$

c) $\vec{V}(x,y) = ye^{xy}\ \vec{\imath} - xe^{xy}\ \vec{\jmath}$

d) $\vec{V}(x,y) = \cos x\ \vec{\imath} + \sin y\ \vec{\jmath}$

e) $\vec{V}(x,y) = (y + \frac{1}{x}, x + \frac{1}{y})$

f) $\vec{V}(x,y) = (3x^2y+2x+y^3)\vec{\imath} + (x^3+3xy^2-2y)\vec{\jmath}$

g) $\vec{V}(x,y,z) = \frac{2}{x}\ \vec{\imath} + \frac{1}{y}\ \vec{\jmath} - \frac{1}{z}\ \vec{k}$

h) $\vec{V}(x,y,z) = (yz, -zx, xy)$

i) $\vec{V}(x,y,z) = (x^2-yz)\vec{\imath} + (y^2-zx)\vec{\jmath} + (z^2-xy)\vec{k}$

Exercice 10 – Champ central

Un *champ central* dans $\mathbb{R}^3$ est un champ de la forme

$$\vec{V}(x_1,x_2,x_3) = f(r)\ \vec{x}$$

où

$\vec{x} = x_1\ \vec{\imath} + x_2\ \vec{\jmath} + x_3\ \vec{k} = (x_1,x_2,x_3)$ est le vecteur position,

$r = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ est la distance du point de l'origine, et

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une application dérivable.

Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer son potentiel quand $f(r) = e^r$.

Exercice 11 – Rotationnel [Facultatif]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{U}, \vec{V}$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^3$. Montrer les relations suivantes :

(1) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\alpha\ \vec{V}) = \alpha\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\ \vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \wedge \vec{V} + f\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) = \vec{0}$ si f est de classe C^2.

TD 4 – CHAMPS INCOMPRESSIBLES

Exercice 12 – Divergence
Calculer la divergence des champs de vecteurs suivants :

a) $\vec{V}(x, y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$
b) $\vec{V}(x, y) = (x + 1)\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}$
c) $\vec{V}(x, y) = y\ \vec{\imath} + x\ \vec{\jmath}$
d) $\vec{V}(\rho, \varphi) = \rho\ \vec{e_\varphi}$
e) $\vec{V}(\rho, \varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\ \vec{e_\varphi}$
f) $\vec{V}(x, y, z) = \vec{\imath} + 2\ \vec{\jmath} + \vec{k}$
g) $\vec{V}(x, y, z) = \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath} + \vec{k}$
h) $\vec{V}(r, \theta, \varphi) = r\ \vec{e_\theta} + r\ \vec{e_\varphi}$

Exercice 13 – Divergence
Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a-t-on div $\vec{V} = 0$ pour les champs de vecteurs $\vec{V}$ suivants :
i) $\vec{V}(x, y, z) = xz\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + (f(z) - z^2/2)\,\vec{k}$
ii) $\vec{V}(x, y, z) = xf(y)\,\vec{\imath} - f(y)\,\vec{\jmath}$
iii) $\vec{V}(x, y, z) = xf(x)\,\vec{\imath} - y\,\vec{\jmath} - zf(x)\,\vec{k}$

Exercice 14 – Divergence
Pour les champs de vecteurs $\vec{E}$ suivants, définis sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$, calculer la divergence en fonction de $\rho = \|\vec{OM}\|$ où $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
a) $\vec{E}(M) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$
b) $\vec{E}(M) = \|\vec{OM}\| \cdot \vec{OM}$
c) $\vec{E}(M) = \left(\frac{\|\vec{OM}\|^2+1}{\|\vec{OM}\|}\right) \cdot \vec{OM}$

Exercice 15 – Champs à potentiel vectoriel
Un champ de vecteurs $\vec{B}$ admet un *potentiel vectoriel* s'il existe un champ vectoriel $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. Dire si les champs suivants admettent un potentiel vectoriel (utiliser le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas en trouver un.
a) $\vec{B}(x, y, z) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$
b) $\vec{B}(x, y, z) = x\ \vec{\imath} + yz\ \vec{\jmath} - x\ \vec{k}$
c) $\vec{B}(x, y, z) = 2xyz\ \vec{\imath} - y^2z\ \vec{\jmath}$

Exercice 16 – Divergence [Facultatif]
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\vec{U}, \vec{V}$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^3$. Montrer les relations suivantes :

(1) $\mathrm{div}\,(\vec{U} + \vec{V}) = \mathrm{div}\,\vec{U} + \mathrm{div}\,\vec{V}$
(2) $\mathrm{div}\,(\alpha\ \vec{V}) = \alpha\ \mathrm{div}\,\vec{V}$
(3) $\mathrm{div}\,(f\ \vec{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \cdot \vec{V} + f\ \mathrm{div}\,\vec{V}$
(4) $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}) = 0$

TD 5 – CHAMPS DE VECTEURS PÉRIODIQUES ET SYMÉTRIQUES

Exercice 17 – Champ périodique [Facultatif]
Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x, y) = \cos(x)\,\sin(y)\;\vec{\imath} + \sin(x)\,\cos(y)\;\vec{\jmath}.$$

a) Trouver le domaine de définition du champ $\vec{V}$ et montrer que $\vec{V}$ est continu et même lisse.

b) Montrer que les valeurs de $\vec{V}$ sur le carré $D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ donnent les valeurs de $\vec{V}$ sur tout son domaine de définition (c'est-à-dire que $\vec{V}$ est *périodique* et D est un *domaine de périodicité*).

c) Dessiner les vecteurs $\vec{V}(x, y)$ pour

$$x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi \qquad \text{et} \qquad y = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}.$$

Compléter le dessin des vecteurs de $\vec{V}$ sur D en sachant que $\vec{V}$ est périodique et continu.

d) En suivant les flèches, dessiner les lignes de champs qui partent des points $(0, \pi/4)$, $(\pi/2, 0)$ et $(\pi, \pi/4)$. Que se passe-t-il au point $(\pi/2, \pi/2)$? Que se passe-t-il si on démarre au point $(3\pi/2, \pi/2)$?

e) Le champ $\vec{V}$ est-il conservatif ? S'il l'est, calculer un potentiel scalaire.

f) Le champ $\vec{V}$ est-il incompressible ? S'il l'est, calculer un potentiel vectoriel.

Exercice 18 – Champ périodique et symétrique [Facultatif]
Considérons le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x, y) = \frac{\cos x}{y}\;\vec{\imath} - \frac{\sin x}{y^2}\;\vec{\jmath}.$$

a) Trouver le domaine de définition du champ $\vec{V}$ et montrer que $\vec{V}$ est continu (et lisse).

b) Montrer que $\vec{V}$ est périodique dans la variable x et que la bande $D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^*$ est un domaine de périodicité.

c) En sachant que la fonction $\sin x$ est impaire et que la fonction $\cos x$ est paire, montrer qu'il suffit de connaitre les valeurs de $\vec{V}$ pour $y > 0$, car les valeurs en $-y < 0$ se trouvent alors comme

$$\vec{V}(x, -y) = -\vec{V}(-x, y).$$

(C'est-à-dire que $\vec{V}$ est *symétrique* par rapport à une *symétrie centrale*, ou rotation d'angle π).

d) Dessiner les vecteurs $\vec{V}(x, y)$ pour

$$x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{7\pi}{4},\ 2\pi \qquad \text{et} \qquad y = 1,\ 2,\ 1/2.$$

Compléter le dessin des vecteurs de $\vec{V}$ sur D en sachant que $\vec{V}$ est périodique et continu.

e) En suivant les flèches, dessiner les lignes de champs qui partent des points $(0, 1)$, $(\pi/2, 1)$, $(\pi, 1)$, $(5\pi/4, 1)$ et $(3\pi/2, 1)$.

f) Le champ $\vec{V}$ est-il conservatif ? S'il l'est, calculer un potentiel scalaire.

g) Le champ $\vec{V}$ est-il incompressible ? S'il l'est, calculer un potentiel vectoriel.

TD 6 – COURBES ET CIRCULATION

Exercice 19 – Circulation le long d'une courbe

Dessiner les courbes C^+ indiquées, trouver une paramétrisation si elle n'est pas déja donnée et calculer la circulation des champs de vecteurs $\vec{V}$ le long de C^+.

a) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ cycloïde paramétrée par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\vec{V}(x,y) = (x^2+1)\,\vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ courbe plane fermée $\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ x : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y : 1 \to 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x : 0 \to 1 \end{cases}$.

c) $\vec{V}(x,y) = \dfrac{y\,\vec{\imath} - x\vec{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad C^+ =$ cercle paramétré par $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

d) $\vec{V}(\rho,\varphi,z) = \rho\, z\, \vec{e_\varphi}$, $\quad C^+ =$ cercle $\begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ z = H \end{cases}$ orienté dans le sens antihoraire sur le plan $x0y$.

e) $\vec{V}(x,y,z) = x^2 z\,\vec{\imath} - \dfrac{y}{x}\,\vec{\jmath} + \dfrac{xz^2}{y^2}\,\vec{k}$, $\quad C^+ =$ courbe paramétré par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, avec $t \in]\,0, T]$.

f) $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{x}{y}\,\vec{\imath} + zy\,\vec{\jmath}$, $\quad C^+ =$ arc d'hyperbole $\begin{cases} z = y - x \\ xy = 1 \\ y : 1 \to 2 \end{cases}$.

Exercice 20 – Circulation de $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$

Calculer la circulation des champs de gradient le long des courbes indiquées, en utilisant le théorème $\displaystyle\int_{A,\ C^+}^{B} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi \cdot \vec{d\ell} = \phi(B) - \phi(A)$.

a) $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$ avec $\phi(x,y,z) = \ln(xy + z^2)$, $\quad C^+ =$ courbe qui relie le point $(5,1,0)$ au point $(3,2,1)$.

b) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique** produit par une charge Q placée en $r = 0$

C_1^+ = courbe qui relie le point $A = (6,0,0)$ au point $B = (0,0,3)$,

C_2^+ = cercle centré en O de rayon R.

[*Quel est le potentiel $\phi(r)$ de $\vec{E}(r)$? Chercher dans les notes de cours ou le calculer.*]

c) $\vec{B}(\rho,\varphi,z) = \dfrac{\mu_0\, I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$ = **champ magnétique** produit par un courant d'intensité I dans un fil droit de direction $\vec{k}$.

C_1^+ = arc de cercle de rayon R centré sur le fil, reliant le point $A = (R,0,0)$ au point $B = (0,R,0)$

C_2^+ = cercle de rayon R qui ne fait pas le tour du fil.

[*Quel est le potentiel scalaire $\phi(\varphi)$ de $\vec{B}(\rho)$ si on ne fait pas le tour complet autour du fil ? Chercher dans les notes de cours ou le calculer.*]

TD 7 – SURFACES, FLUX ET THÉORÈME DE STOKES

Exercice 21 – Flux à travers une surface
Dessiner les surfaces S^+ indiquées, trouver une paramétrisation si elle n'est pas déja donnée et calculer le flux des champs de vecteurs à travers S^+.

a) $\vec{V}(x,y,z) = y^3\,\vec{\jmath} + 2(z-x^2)\,\vec{k}$,

$$S^+ = \text{parapluie de Whitney} \quad \begin{cases} x^2 = y^2 z \\ x,y,z \in [0,1] \end{cases} \quad \text{paramétré par} \quad \begin{cases} f(u,v) = (uv, v, u^2) \\ u,v \in [0,1] \end{cases}.$$

b) $\vec{V}(x,y,z) = x^2 z\,\vec{\imath} + xy^2\,\vec{\jmath} + x(y-z)\,\vec{k}$, $\quad S^+ = \text{carré} \begin{cases} z = 3 \\ x,y \in [0,1] \end{cases}$ avec paramètres (x,y).

c) $\vec{V}(r,\theta,\varphi) = \varphi\,\vec{e_r} + r\,\vec{e_\theta}$,

$$S^+ = \text{calotte de sphère} \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x,y,z \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{avec paramètres} = \text{coordonnées sphériques } (\theta,\varphi).$$

d) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique**, $\quad S^+$ = calotte de sphère de l'exercice précédent.

Exercice 22 – Flux de $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}$
Calculer le flux du rotationnel des champs de vecteurs suivants, de l'une des deux possibles manières (ou les deux) :

— soit en calculant le rotationnel, en décrivant S^+ et en utilisant la définition du flux,

— soit en trouvant le bord de S^+ et en appliquant le **théorème de Stokes** $\displaystyle\iint_{S^+} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{U}\cdot\vec{dS} = \oint_{\partial S^+} \vec{U}\cdot\vec{d\ell}$.

a) $\vec{U}(x,y) = (2x-y)\,\vec{\imath} + (x+y)\,\vec{\jmath}$, $\quad S^+$ = disque $\quad x^2+y^2 \leqslant R^2 \quad$ orienté par $\vec{n} = \vec{k}$.

b) $\vec{A}(\rho,\varphi,z) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln\rho\,\vec{k}$

= **potentiel vectoriel du champ magnétique** $\quad \vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$,

$$S^+ = \text{cylindre (ouvert)} \begin{cases} x^2+y^2 = R^2 \\ z \in [0,H] \end{cases} \quad \text{avec } \vec{n} \text{ entrant.}$$

TD 8 – FLUX ET THÉORÈME DE GAUSS

Exercice 23 – Flux à travers une surface fermée
Calculer le flux des champs de vecteurs suivants, à travers les surfaces fermées indiquées, dans l'une des deux possibles manières (ou les deux) :

— soit en décrivant S^+ et en utilisant la définition du flux,

— soit en trouvant la divergence du champ et le domaine Ω délimité par S^+, et en appliquant le **théorème de Gauss** $\displaystyle\oiint_{\partial\Omega^+} \vec{V}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{V}\, dx\, dy\, dz$.

a) $\vec{V}(x,y,z) = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$,

S = boite cylindrique fermée $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2 = R^2 \\ z \in [0,H] \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2 \leqslant R^2 \\ z = 0 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2 \leqslant R^2 \\ z = H \end{array}\right.$

orientée par $\vec{n}$ entrant.

b) $\vec{V}(x,y,z) = z^2 y\,\vec{\imath} + xy\,\vec{k}$, S = statue du David de Michelangelo à Florence, orientée par $\vec{n}$ entrant.

c) Calculer le flux du **champ gravitationnel** $\vec{\mathcal{G}}(r) = -\dfrac{GM}{r^2}\,\vec{e_r}$ produit par le soleil, à travers la surface de la planète Terre, orientée par $\vec{n}$ entrant.

Exercice 24 – Flux [Facultatif]
Calculer le flux des champs de vecteurs suivants, en utilisant la définition ou un théorème approprié (Stokes ou Gauss) :

a) $\vec{V}(x,y,z) = yz\,\vec{\imath} - xz\,\vec{\jmath} - z(x^2+y^2)\,\vec{k}$,

S^+ = hélicoïde (escalier en colimaçon) paramétré par $\left\{\begin{array}{l} f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi) \\ r \in [0,1], \quad \varphi \in [0,2\pi] \end{array}\right.$.

b) $\vec{V}(x,y,z) = y^2\,\vec{\imath} + z\,\vec{k}$, S^+ = triangle $\left\{\begin{array}{l} x+y+z = 1 \\ x,y,z \geqslant 0 \end{array}\right.$ avec paramètres $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ v = x+y \end{array}\right.$.

[*Noter que les bornes des variables x, y et z sont liées sur S. Par exemple, si on choisit $x \in [0,1]$ comme variable indépendante, alors on a $y \in [0,1-x]$ et $z = 1-(x+y)$, ou bien $z \in [0,1-x]$ et $y = 1-(x+z)$.*]

c) $\vec{V} = \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{U}$ où $\vec{U}(x,y) = (2xy - x^2)\,\vec{\imath} + (x+y^2)\,\vec{\jmath}$,

S^+ = surface plane délimitée par $\left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ x : 0 \to 1 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x = y^2 \\ y : 1 \to 0 \end{array}\right.$.

d) $\vec{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r}$ = **champ électrique**, en sachant que $\vec{E} = -\vec{\operatorname{grad}}\,\Phi$ où $\Phi(r) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r}$

S^+ = cube de coté R centré en $(3R,3R,3R)$ orienté par $\vec{n}$ sortant.

e) $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\dfrac{1}{\rho}\,\vec{e_\varphi}$ = **champ magnétique**, en sachant que $\vec{B} = \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{A}$ où $\vec{A}(\rho) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\,\ln(\rho)\,\vec{k}$,

S^+= écran vertical $\left\{\begin{array}{l} \rho = \varphi + 1 \\ \varphi \in [0,2\pi] \\ z \in [0,H] \end{array}\right.$ avec $\vec{n}$ sortant.