

TD 3 – CHAMPS CONSERVATIFS

Exercice 8 – Rotationnel

Calculer le rotationnel des champs de vecteurs suivants :

a) $\vec{E}(x, y, z) = xy^2 \vec{i} + 2x^2yz \vec{j} + 3yz^2 \vec{k}$

d) $\vec{E}(x, y, z) = xyz \vec{i}$

b) $\vec{E}(x, y, z) = \sin(xyz) \vec{i} + \cos(xyz) \vec{j}$

e) $\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \rho^2 \sin \varphi \vec{e}_\rho + \rho^2(z^2 + 1) \vec{e}_\varphi + \rho^2 \vec{k}$

c) $\vec{E}(x, y, z) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$

f) $\vec{E}(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \varphi \vec{e}_r + r^2 \vec{e}_\theta + r^2 \sin \theta \vec{e}_\varphi$

Remarque : si $\vec{A}(x, y) = A_x(x, y) \vec{i} + A_y(x, y) \vec{j}$ est un champ sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de z et n'a pas de composante en direction \vec{k} , alors le champ de vecteurs $\text{rot } \vec{A}$ n'a qu'une composante en direction \vec{k} et il est de la forme

$$\text{rot } \vec{A}(x, y) = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

La preuve est un simple calcul direct à partir de la formule générale de $\text{rot } \vec{A}$.

Corrigé

Pour calculer le rotationnel, on utilise la formule du “pseudo-déterminant” en coordonnées cartésiennes et les formules du formulaire en coordonnées cylindriques et sphériques.

a) $\vec{E}(x, y, z) = xy^2 \vec{i} + 2x^2yz \vec{j} + 3yz^2 \vec{k}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y}(3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz) \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial x}(3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2) \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) \right) \\ &= (3z^2 - 2x^2y) \vec{i} - (0 - 0) \vec{j} + (4xyz - 2xy) \vec{k} \end{aligned}$$

b) $\vec{E}(x, y, z) = \sin(xyz) \vec{i} + \cos(xyz) \vec{j}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(\cos(xyz)) \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xyz)) \right) \\ &\quad + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\cos(xyz)) - \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xyz)) \right) \\ &= xy \sin(xyz) \vec{i} + xy \cos(xyz) \vec{j} + (-yz \sin(xyz) - xz \cos(xyz)) \vec{k} \end{aligned}$$

c) $\vec{E}(x, y, z) = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz) \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz) \right) \\ &= (x - x) \vec{i} - (y - y) \vec{j} + (z - z) \vec{k} = \vec{0} \end{aligned}$$

d) $\vec{E}(x, y, z) = xyz \vec{i}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(0) \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz) \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz) \right) \\ &= xy \vec{j} - xz \vec{k} \end{aligned}$$

e) $\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \rho^2 \sin \varphi \vec{e}_\rho + \rho^2(z^2 + 1) \vec{e}_\varphi + \rho^2 \vec{k}$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho^2) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho^2(z^2 + 1)) \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho^2 \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2) \right) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^3(z^2 + 1)) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho^2 \sin \varphi) \right) \vec{k} \\ &= (0 - 2\rho^2 z) \vec{e}_\rho + (0 - 2\rho) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} (3\rho^2(z^2 + 1) - \rho^2 \cos \varphi) \vec{k} \end{aligned}$$

$$f) \vec{E}(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \varphi \vec{e}_r + r^2 \vec{e}_\theta + r^2 \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin^2 \theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2) \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 \sin \varphi) - \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \sin \theta) \right) \vec{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^3) - \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin \varphi) \right) \vec{e}_\varphi \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} (2r^2 \cos \theta \sin \theta - 0) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} r^2 \cos \varphi - 3r^2 \sin \theta \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} (3r^2) \vec{e}_\varphi \\ &= 2r \cos \theta \vec{e}_r + r \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \theta} - 3 \sin \theta \right) \vec{e}_\theta + 3r \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Exercice 9 – Champs de gradient

Un champ de vecteurs \vec{V} est un *champ de gradient* si $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)$ pour une fonction f qui s'appelle *potentiel scalaire* de \vec{V} . Dire si les champs suivants sont des champs de gradient (en utilisant le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas déterminer un potentiel scalaire.

a) $\vec{V}(x, y) = (y, x)$

b) $\vec{V}(x, y) = (x + y, x - y)$

c) $\vec{V}(x, y) = ye^{xy} \vec{i} - xe^{xy} \vec{j}$

d) $\vec{V}(x, y) = \cos x \vec{i} + \sin y \vec{j}$

e) $\vec{V}(x, y) = (y + \frac{1}{x}, x + \frac{1}{y})$

f) $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3) \vec{i} + (x^3 + 3xy^2 - 2y) \vec{j}$

g) $\vec{V}(x, y, z) = \frac{2}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j} - \frac{1}{z} \vec{k}$

h) $\vec{V}(x, y, z) = (yz, -zx, xy)$

i) $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz) \vec{i} + (y^2 - zx) \vec{j} + (z^2 - xy) \vec{k}$

Corrigé

Le **Lemme de Poincaré** dit que sur tout sous-ensemble D du domaine de définition de \vec{V} qui est **simplement connexe**, on a l'équivalence

$$\vec{V} \text{ admet un potentiel sur } D \quad \text{si et seulement si} \quad \operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}.$$

On utilise ce théorème de deux façons :

- Si $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$, alors \vec{V} admet un potentiel sur tout sous-ensemble simplement connexe D de son domaine de définition.
- Si $\operatorname{rot} \vec{V} \neq \vec{0}$, alors \vec{V} n'admet pas de potentiel, sur n'importe quel sous-ensemble du domaine de définition de \vec{V} .

On rappelle aussi que **avoir un potentiel sur D** et **être un champ conservatif sur D** sont synonymes, et signifient tous les deux qu'il existe une fonction réelle f telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$.

N.B. En physique, cela signifie plutôt qu'il existe un champ scalaire ϕ tel que $\vec{V} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi$. N'oubliez pas de vérifier dans quel sens est utilisé le mot *potentiel*.

Si \vec{V} admet un potentiel f , pour le trouver il faut intégrer l'équation $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$.

a) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (y, x) = y \vec{i} + x \vec{j}$ sur \mathbb{R}^2 , on a (cf. la Remarque plus haut) :

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} (x) - \frac{\partial}{\partial y} (y) \right) \vec{k} = (1 - 1) \vec{k} = \vec{0}.$$

Puisque le domaine de définition de \vec{V} est tout le plan \mathbb{R}^2 , qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que \vec{V} est conservatif sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Cherchons un potentiel f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, c'est-à-dire

$$y\vec{i} + x\vec{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) dans la seule variable x et on obtient la primitive de $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ par rapport à x , qui est déterminée à moins d'une valeur constante en x , c'est-à-dire, ici, une fonction de la seule variable y :

$$f(x, y) = \int y dx = xy + g(y),$$

d'où, par dérivation, on déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + g'(y) \quad (3).$$

Si on identifie les deux expressions (3) = (2) de $\frac{\partial f}{\partial y}$ on a alors

$$x + g'(y) = x \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = \text{const.}$$

Finalement, on peut choisir comme potentiel de \vec{V} la fonction $f(x, y) = xy$, obtenue en prenant $g(y) = \text{const} = 0$, et tous les potentiels de \vec{V} sont de la forme

$$f(x, y) = xy + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

b) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (x + y, x - y) = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ sur \mathbb{R}^2 , on a :

$$\text{rot } \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - y) - \frac{\partial}{\partial y}(x + y) \right) \vec{k} = (1 - 1) \vec{k} = \vec{0}.$$

Puisque le domaine de définition de \vec{V} est tout le plan \mathbb{R}^2 , qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que \vec{V} est conservatif sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Cherchons un potentiel f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, c'est-à-dire

$$(x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x + y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - y & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x, y) = \int (x + y) dx = \frac{1}{2}x^2 + xy + g(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + g'(y) \stackrel{(2)}{=} x - y \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = -y \quad \Longrightarrow \quad g(y) = -\int y dy = -\frac{1}{2}y^2 + c.$$

Finalement, on peut choisir comme potentiel de \vec{V} la fonction $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2$, et tous les potentiels de \vec{V} sont de la forme

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

c) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = ye^{xy} \vec{i} - xe^{xy} \vec{j}$ sur \mathbb{R}^2 , on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(-xe^{xy}) - \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) \right) \vec{k} \\ &= (-e^{xy} - xy e^{xy} - e^{xy} - xy e^{xy}) \vec{k} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Puisque le rotationnel de \vec{V} n'est pas identiquement nul, par le Lemme de Poincaré on conclut que \vec{V} n'est pas conservatif, il n'admet pas de potentiel scalaire.

d) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = \cos x \vec{i} + \sin y \vec{j}$ sur \mathbb{R}^2 , on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos x) \right) \vec{k} = (0 - 0) \vec{k} = \vec{0}.$$

Puisque le domaine de définition de \vec{V} est tout le plan \mathbb{R}^2 , qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que \vec{V} est conservatif sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Cherchons un potentiel f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, c'est-à-dire

$$\cos x \vec{i} + \sin y \vec{j} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \quad \iff \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin y & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x, y) = \int \cos x \, dx = \sin x + g(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y) \stackrel{(2)}{=} \sin y \quad \implies \quad g(y) = \int \sin y \, dy = -\cos y + c.$$

Finalement, on peut choisir comme potentiel de \vec{V} la fonction $f(x, y) = \sin x - \cos y$, et tous les potentiels de \vec{V} sont de la forme

$$f(x, y) = \sin x - \cos y + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

e) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = \left(y + \frac{1}{x}\right) \vec{i} + \left(x + \frac{1}{y}\right) \vec{j}$ sur \mathbb{R}^2 , on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(x + \frac{1}{y}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(y + \frac{1}{x}\right) \right) \vec{k} = (1 - 1) \vec{k} = \vec{0}.$$

Cette fois, le domaine de définition de \vec{V} n'est pas tout le plan \mathbb{R}^2 , parce que les sous-ensembles où $x = 0$ ou bien $y = 0$ ne sont pas admis. Puisque ces deux sous-ensembles de \mathbb{R}^2 correspondent aux deux axes, respectivement Oy et Ox , le domaine de définition de \vec{V} est l'*union disjointe* (c'est-à-dire l'union d'ensembles qui ont intersection nulle) des quatre quadrants

$D_1 = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$ $D_2 = \{(x, y) \mid x < 0, y > 0\}$ $D_3 = \{(x, y) \mid x < 0, y < 0\}$ $D_4 = \{(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$	
--	--

Le domaine $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ n'est pas simplement connexe, car il n'est pas connexe. Mais chaque sous-ensemble D_i , avec $i = 1, 2, 3, 4$, est simplement connexe. Par le Lemme de Poincaré on conclut que \vec{V} est conservatif sur chaque domaine D_i , c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \dots, 4$.

Cherchons f_i tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f_i$ sur D_i , c'est-à-dire une fonction telle que pour tout $(x, y) \in D_i$ on a

$$\left(y + \frac{1}{x}\right) \vec{i} + \left(x + \frac{1}{y}\right) \vec{j} = \frac{\partial f_i}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \vec{j} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x} = y + \frac{1}{x} & (1) \\ \frac{\partial f_i}{\partial y} = x + \frac{1}{y} & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f_i(x, y) = \int \left(y + \frac{1}{x}\right) dx = xy + \ln|x| + g_i(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = x + g'_i(y) \stackrel{(2)}{=} x + \frac{1}{y} \implies g'_i(y) = \frac{1}{y} \implies g_i(y) = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + c_i.$$

Finalement, sur chaque D_i on peut choisir comme potentiel de \vec{V} la fonction

$$f_i(x, y) = xy + \ln|x| + \ln|y| + c_i = xy + \ln|xy| + c_i$$

pour tout choix de $c_i \in \mathbb{R}$. Selon le domaine D_i choisi, ce qui varie d'une fonction à l'autre sont les valeurs absolues $|x|$ et $|y|$ et aussi la constante, qui n'a aucune raison d'être la même d'un domaine à l'autre :

$$\begin{aligned} D_1 = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0\} &\implies f_1(x, y) = xy + \ln(xy) + c_1 \\ D_2 = \{(x, y) \mid x < 0, y > 0\} &\implies f_2(x, y) = xy + \ln(-xy) + c_2 \\ D_3 = \{(x, y) \mid x < 0, y < 0\} &\implies f_3(x, y) = xy + \ln(xy) + c_3 \\ D_4 = \{(x, y) \mid x > 0, y < 0\} &\implies f_4(x, y) = xy + \ln(-xy) + c_4. \end{aligned}$$

f) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y) = (3x^2y + 2x + y^3) \vec{i} + (x^3 + 3xy^2 - 2y) \vec{j}$ sur \mathbb{R}^2 , on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^3 + 3xy^2 - 2y) - \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y + 2x + y^3) \right) \vec{k} \\ &= (3x^2 + 3y^2 - 3x^2 - 3y^2) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Puisque le domaine de définition de \vec{V} est tout le plan \mathbb{R}^2 , qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que \vec{V} est conservatif sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Cherchons un potentiel f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, c'est-à-dire

$$(3x^2y + 2x + y^3) \vec{i} + (x^3 + 3xy^2 - 2y) \vec{j} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2x + y^3 & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 - 2y & (2) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x, y) = \int (3x^2y + 2x + y^3) dx = x^3y + x^2 + xy^3 + g(y)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 + g'(y) \stackrel{(2)}{=} x^3 + 3xy^2 - 2y \implies g'(y) = -2y \implies g(y) = -\int 2y dy = -y^2 + c.$$

Finalement, les potentiels de \vec{V} sont de la forme

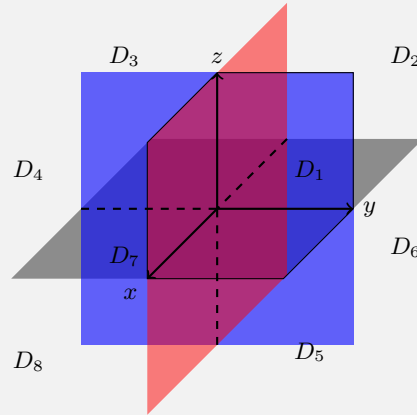
$$f(x, y) = x^3y + xy^3 + x^2 - y^2 + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

g) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = \frac{2}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j} - \frac{1}{z} \vec{k}$ sur \mathbb{R}^3 , on a :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{1}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{y} \right) \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2}{x} \right) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{x} \right) \right) \vec{k} \\ &= (0 - 0) \vec{i} - (0 - 0) \vec{j} + (0 - 0) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Cette fois, le domaine de définition de \vec{V} n'est pas tout l'espace \mathbb{R}^3 , parce que les sous-ensembles où $x = 0$, $y = 0$ ou bien $z = 0$ ne sont pas admis. Puisque ces trois sous-ensembles de \mathbb{R}^3 correspondent aux trois plans contenant les axes à deux à deux, respectivement les plans yOz , xOz et xOy , le domaine de définition de \vec{V} est l'union disjointe des huit quadrants

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\} \\ D_2 &= \{(x, y, z) \mid x < 0, y > 0, z > 0\} \\ D_3 &= \{(x, y, z) \mid x < 0, y < 0, z > 0\} \\ D_4 &= \{(x, y, z) \mid x > 0, y < 0, z > 0\} \\ D_5 &= \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z < 0\} \\ D_6 &= \{(x, y, z) \mid x < 0, y > 0, z < 0\} \\ D_7 &= \{(x, y, z) \mid x < 0, y < 0, z < 0\} \\ D_8 &= \{(x, y, z) \mid x > 0, y < 0, z < 0\} \end{aligned}$$



Le domaine $D = \bigcup_{i=1}^8 D_i$ n'est pas simplement connexe, car il n'est pas connexe. Mais chaque sous-ensemble D_i , avec $i = 1, 2, \dots, 8$, est simplement connexe. Par le Lemme de Poincaré on conclut que \vec{V} est conservatif sur chaque domaine D_i , c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $i = 1, \dots, 8$.

Cherchons f_i tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f_i$ sur D_i , c'est-à-dire une fonction telle que pour tout $(x, y, z) \in D_i$ on a

$$\frac{2}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j} + \frac{1}{z} \vec{k} = \frac{\partial f_i}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f_i}{\partial z} \vec{k} \iff \begin{cases} \frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{2}{x} & (1) \\ \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{1}{y} & (2) \\ \frac{\partial f_i}{\partial z} = -\frac{1}{z} & (3) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f_i(x, y, z) = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln |x| + g_i(y, z)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial g_i(y, z)}{\partial y} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{y} \implies g_i(y, z) = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y| + h_i(z).$$

Donc

$$f_i(x, y, z) = 2 \ln |x| + \ln |y| + h_i(z)$$

et on dérive par rapport à z :

$$\frac{\partial f_i}{\partial z} = h_i'(z) \stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{z} \implies h_i(z) = \int \left(-\frac{1}{z}\right) dz = -\ln |z| + c_i.$$

Finalement, sur chaque D_i on peut choisir comme potentiel de \vec{V} la fonction

$$f_i(x, y, z) = 2 \ln |x| + \ln |y| - \ln |z| + c_i = \ln \left| \frac{x^2 y}{z} \right| + c_i$$

pour tout choix de $c_i \in \mathbb{R}$. Selon le domaine D_i choisi, ce qui varie d'une fonction à l'autre sont les valeurs absolues $|x|$ et $|y|$ et aussi la constante c_i .

h) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = yz \vec{i} - zx \vec{j} + xy \vec{k}$ sur \mathbb{R}^3 , on a :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(-zx) \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-zx) - \frac{\partial}{\partial y}(yz) \right) \vec{k} \\ &= (x + x) \vec{i} + (y - y) \vec{j} + (-z - z) \vec{k} \neq \vec{0}. \end{aligned}$$

Puisque le rotationnel de \vec{V} n'est pas identiquement nul, par le Lemme de Poincaré on conclut que \vec{V} n'est pas conservatif, il n'admet pas de potentiel scalaire.

i) Pour le champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, z) = (x^2 - yz) \vec{i} + (y^2 - zx) \vec{j} + (z^2 - xy) \vec{k}$ sur \mathbb{R}^3 , on a :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - xy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - zx) \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(z^2 - xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - yz) \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - zx) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - yz) \right) \vec{k} \\ &= (-x + x) \vec{i} + (-y + y) \vec{j} + (-z + z) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Puisque le domaine de définition de \vec{V} est tout \mathbb{R}^3 , qui est simplement connexe, par le Lemme de Poincaré on conclut que \vec{V} est conservatif sur \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Cherchons un potentiel f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, c'est-à-dire

$$(x^2 - yz) \vec{i} + (y^2 - zx) \vec{j} + (z^2 - xy) \vec{k} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - yz & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = y^2 - zx & (2) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = z^2 - xy & (3) \end{cases}$$

On intègre (1) en x :

$$f(x, y, z) = \int (x^2 - yz) dx = \frac{1}{3} x^3 - xyz + g(y, z)$$

et on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xz + \frac{\partial g(y, z)}{\partial z} \stackrel{(2)}{=} y^2 - zx \implies \frac{\partial g(y, z)}{\partial z} = y^2 \implies g(y, z) = \int y^2 dz = \frac{1}{3} y^3 + h(z).$$

Donc

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3} x^3 - xyz + \frac{1}{3} y^3 + h(z)$$

et on dérive par rapport à z :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -xy + h'(z) \stackrel{(3)}{=} z^2 - xy \implies h_i(z) = \int z^2 dz = \frac{1}{3}z^3 + c_i.$$

Finalement, les potentiels de \vec{V} sont de la forme

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - xyz + c, \quad \text{avec } c \in \mathbb{R} \text{ une constante quelconque.}$$

Exercice 10 – Champ central

Un *champ central* dans \mathbb{R}^3 est un champ de la forme

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = f(r) \vec{x}$$

où

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{est le vecteur position,} \\ r &= \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \text{est la distance du point de l'origine, et} \\ f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{est une application dérivable.} \end{aligned}$$

Montrer qu'un champ central est toujours un champ de gradient et calculer son potentiel quand $f(r) = e^r$.

Corrigé

Un champ central s'exprime bien en coordonnées sphériques : le vecteur position est $\vec{x} = r \vec{e}_r$ donc

$$\vec{V}(r, \theta, \varphi) = \vec{V}(r) = f(r) r \vec{e}_r.$$

Son rotationnel est nul, car

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r f(r))}{\partial \varphi} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial(r f(r))}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi = \vec{0}.$$

Le domaine de définition de \vec{V} est tout \mathbb{R}^3 , car il est bien défini en dehors de l'origine (quand $r \neq 0$), et dans l'origine, même si \vec{e}_r n'est pas défini, le champ \vec{V} est défini car il vaut zéro, puisque $r = 0$. Alors, par le Lemme de Poincaré, le champ \vec{V} est un champ de gradient.

Un potentiel de \vec{V} est un champ scalaire $g(r, \theta, \varphi)$ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} g$, c'est-à-dire

$$r f(r) \vec{e}_r = \frac{\partial g}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \iff \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial r} = r f(r) & (1) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 & (2) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0 & (3) \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) disent que la fonction g ne dépend pas de φ et de θ , donc $g(r, \theta, \varphi) = g(r)$ s'obtient en intégrant l'équation (1).

Si $f(r) = e^r$, on a $\frac{\partial g}{\partial r} = r e^r$ et l'éq. (1) s'intègre par parties :

$$g(r) = \int r e^r dr = r e^r - \int e^r dr = r e^r - e^r = (r - 1) e^r,$$

à moins d'une constante.

Exercice 11 – Rotationnel [Facultatif]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et \vec{U}, \vec{V} deux champs de vecteurs différentiables définis sur \mathbb{R}^3 . Montrer les relations suivantes :

- (1) $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$
- (2) $\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) = \alpha \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$
- (3) $\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V} + f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$
- (4) $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}$ si f est de classe C^2 .

Corrigé

Posons $\vec{U} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} + U_z \vec{k}$ et $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$. Alors :

- (1) La somme des champs de vecteurs est donnée par la somme des vecteurs en tout point, c'est-à-dire

$$\vec{U} + \vec{V} = (U_x + V_x) \vec{i} + (U_y + V_y) \vec{j} + (U_z + V_z) \vec{k},$$

et on calcule séparément les composantes du rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) = \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) \right)_x \vec{i} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) \right)_y \vec{j} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) \right)_z \vec{k}.$$

La première composante est

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) \right)_x &= \frac{\partial(U_z + V_z)}{\partial y} - \frac{\partial(U_y + V_y)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ &= \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \right)_x + \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_x, \end{aligned}$$

et également pour les autres on a

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) \right)_y &= \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \right)_y + \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_y \\ \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) \right)_z &= \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \right)_z + \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_z, \end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{U} + \vec{V}) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$.

- (2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un nombre, on a

$$\alpha \vec{V} = \alpha V_x \vec{i} + \alpha V_y \vec{j} + \alpha V_z \vec{k},$$

et le rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) = \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) \right)_x \vec{i} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) \right)_y \vec{j} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) \right)_z \vec{k}$$

a composantes

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) \right)_x &= \frac{\partial(\alpha V_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\alpha V_y)}{\partial z} \\ &= \alpha \frac{\partial V_z}{\partial y} - \alpha \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ &= \alpha \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_x, \end{aligned}$$

et également

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) \right)_y &= \alpha \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_y \\ \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) \right)_z &= \alpha \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_z, \end{aligned}$$

donc $\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{V}) = \alpha \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$.

(3) Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, le produit de f par \vec{V} est calculé en tout point et s'écrit

$$f \vec{V} = f V_x \vec{i} + f V_y \vec{j} + f V_z \vec{k},$$

et son rotationnel s'écrit

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) = \left(\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) \right)_x \vec{i} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) \right)_y \vec{j} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) \right)_z \vec{k}.$$

Ses composantes se calculent en appliquant la règle de Leibniz à la dérivée d'un produit de fonctions :

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) \right)_x &= \frac{\partial(f V_z)}{\partial y} - \frac{\partial(f V_y)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} V_z + f \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} V_y - f \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y} V_z - \frac{\partial f}{\partial z} V_y + f \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_x, \end{aligned}$$

et également

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) \right)_y &= \frac{\partial f}{\partial z} V_x - \frac{\partial f}{\partial x} V_z + f \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_y \\ \left(\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) \right)_z &= \frac{\partial f}{\partial x} V_y - \frac{\partial f}{\partial y} V_x + f \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_z, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} V_z - \frac{\partial f}{\partial z} V_y + f \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_x \right) \vec{i} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial z} V_x - \frac{\partial f}{\partial x} V_z + f \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_y \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x} V_y - \frac{\partial f}{\partial y} V_x + f \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \right)_z \right) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} V_z - \frac{\partial f}{\partial z} V_y \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} V_x - \frac{\partial f}{\partial x} V_z \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} V_y - \frac{\partial f}{\partial y} V_x \right) \vec{k} + f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}. \end{aligned}$$

Or, le produit vectoriel de $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$ et $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ vaut exactement

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} V_z - \frac{\partial f}{\partial z} V_y \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} V_x - \frac{\partial f}{\partial x} V_z \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} V_y - \frac{\partial f}{\partial y} V_x \right) \vec{k},$$

donc $\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V} + f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$.

(4) Puisque

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k},$$

les composantes de

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) \right)_x \vec{i} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) \right)_y \vec{j} + \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) \right)_z \vec{k}$$

sont

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f)\right)_x &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f)\right)_y &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f)\right)_z &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \end{aligned}$$

si la fonction f est de classe C^2 , par le Théorème de Schwarz.