TD 4 – CHAMPS INCOMPRESSIBLES

Exercice 12 – Divergence
Calculer la divergence des champs de vecteurs suivants :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$
b) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$
c) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$
d) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{e_\varphi}$
e) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\,\vec{e_\varphi}$
f) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}$
g) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + \vec{k}$
h) $\vec{V}(r,\theta,\varphi) = r\,\vec{e_\theta} + r\,\vec{e_\varphi}$

Corrigé

On utilise les formules de div $\vec{A}$ du formulaire, en choisissant celle adaptée aux coordonnées :

a) $\vec{V}(x,y) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

$$\operatorname{div}\vec{V}(x,y) = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(1)}{\partial y} = 0.$$

b) $\vec{V}(x,y) = (x+1)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

$$\operatorname{div}\vec{V}(x,y) = \frac{\partial(x+1)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} = 1 + 1 = 2.$$

c) $\vec{V}(x,y) = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$

$$\operatorname{div}\vec{V}(x,y) = \frac{\partial(y)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$$

d) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \rho\,\vec{e_\varphi}$

$$\operatorname{div}\vec{V}(\rho,\varphi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\cdot 0)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho)}{\partial \varphi} = 0 + 0 = 0.$$

e) $\vec{V}(\rho,\varphi) = \vec{e_\rho} + \rho\,\vec{e_\varphi}$

$$\operatorname{div}\vec{V}(\rho,\varphi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\cdot 1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} + 0 = \frac{1}{\rho}.$$

f) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

$$\operatorname{div}\vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(2)}{\partial y} + \frac{\partial(1)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

g) $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + \vec{k}$

$$\operatorname{div}\vec{V}(x,y,z) = \frac{\partial(1)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(1)}{\partial z} = 0 + 1 + 0 = 1.$$

h) $\vec{V}(r,\theta,\varphi) = r\,\vec{e_\theta} + r\,\vec{e_\varphi}$

$$\operatorname{div}\vec{V}(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\cdot 0)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\cdot r)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r)}{\partial \varphi} = 0 + \frac{r\cos\theta}{r\sin\theta} + 0 = \cot\theta.$$

Exercice 13 – Divergence

Pour quelle fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a-t-on $\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0$ pour les champs de vecteurs $\overrightarrow{V}$ suivants :

i) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xz\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + (f(z) - z^2/2)\,\vec{k}$

ii) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xf(y)\,\vec{\imath} - f(y)\,\vec{\jmath}$

iii) $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xf(x)\,\vec{\imath} - y\,\vec{\jmath} - zf(x)\,\vec{k}$

Corrigé

i) Pour $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xz\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + (f(z) - z^2/2)\,\vec{k}$ on a

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(f(z) - z^2/2)}{\partial z} = z + 1 + f'(z) - z = f'(z) + 1,$$

alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad f'(z) + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f'(z) = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad f(z) = -z + a \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) Pour $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xf(y)\,\vec{\imath} - f(y)\,\vec{\jmath}$ on a

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial(xf(y))}{\partial x} - \frac{\partial f(y)}{\partial y} = f(y) - f'(y),$$

alors

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f'(y) = f(y) \quad \Longleftrightarrow \quad f(y) = be^y \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}.$$

iii) Pour $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xf(x)\,\vec{\imath} - y\,vj - zf(x)\,\vec{k}$ on a

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V}(x,y,z) = \frac{\partial(xf(x))}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial(zf(x))}{\partial z} = f(x) + xf'(x) - 1 - f(x) = xf'(x) - 1,$$

alors

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overrightarrow{V} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad xf'(x) - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad f(x) = \ln|x| + c \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exercice 14 – Divergence

Pour les champs de vecteurs $\overrightarrow{E}$ suivants, définis sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, calculer la divergence en fonction de $\rho = \|\vec{OM}\|$ où $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) $\overrightarrow{E}(M) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$

b) $\overrightarrow{E}(M) = \|\vec{OM}\| \cdot \vec{OM}$

c) $\overrightarrow{E}(M) = \left(\frac{\|\vec{OM}\|^2+1}{\|\vec{OM}\|}\right) \cdot \vec{OM}$

Corrigé

Cela revient à écrire le champ $\overrightarrow{E}$ en coordonnées polaires $\rho = \|\vec{OM}\|$, qui donne la distance de M au centre, et φ l'angle de rotation. Le vecteur position est alors $\vec{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = \rho\,\vec{e_\rho}$ et on a :

a) $\overrightarrow{E}(M) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = \dfrac{\rho\,\vec{e_\rho}}{\rho} = \vec{e_\rho}$, donc $\quad \operatorname{div} \overrightarrow{E}(\rho) = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho \cdot 1)}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}.$

b) $\overrightarrow{E}(M) = \|\vec{OM}\| \cdot \vec{OM} = \rho^2 \, \vec{e_\rho}$, donc $\quad \operatorname{div} \overrightarrow{E}(\rho) = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho \cdot \rho^2)}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho^3}{\partial \rho} = \dfrac{3\rho^2}{\rho} = 3\rho.$

c) $\overrightarrow{E}(M) = \left(\frac{\|\vec{OM}\|^2+1}{\|\vec{OM}\|}\right) \cdot \vec{OM} = \dfrac{\rho^2+1}{\rho}\,\rho\,\vec{e_\rho} = (\rho^2+1)\,\vec{e_\rho}$, donc

$$\operatorname{div} \overrightarrow{E}(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho(\rho^2+1)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho^3+\rho}{\partial \rho} = \frac{3\rho^2+1}{\rho}.$$

Exercice 15 – Champs à potentiel vectoriel

Un champ de vecteurs $\overrightarrow{B}$ admet un *potentiel vectoriel* s'il existe un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$. Dire si les champs suivants admettent un potentiel vectoriel (utiliser le Lemme de Poincaré), et si c'est le cas en trouver un.

a) $\overrightarrow{B}(x,y,z) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$
b) $\overrightarrow{B}(x,y,z) = x\,\vec{\imath} + yz\,\vec{\jmath} - x\,\vec{k}$
c) $\overrightarrow{B}(x,y,z) = 2xyz\,\vec{\imath} - y^2 z\,\vec{\jmath}$

Corrigé

Soit $\overrightarrow{B}$ un champ de vecteurs avec domaine de définition $D_{\overrightarrow{B}} \subset \mathbb{R}^3$. Pour résoudre cet exercice on utilise deux résultats de cours :

1) Le Lemme de Poincaré (version II) dit que si $\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0$, alors pour tout sous-ensemble $D \subset D_{\overrightarrow{B}}$ *contractile* il existe un champ de vecteurs $\overrightarrow{A}$ défini sur D tel que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$. Donc $\overrightarrow{A}$ est *un* potentiel vectoriel de $\overrightarrow{B}$.

2) Si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$ sur D, alors on a aussi $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi) = \overrightarrow{B}$ pour tout champ scalaire ϕ défini sur D.

De plus, *tous* les potentiels vectoriels de $\overrightarrow{B}$ sur D sont de la forme $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$.

a) Pour $\overrightarrow{B}(x,y,z) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ on a $\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0$. Donc, par le Lemme de Poincaré II, $\overrightarrow{B}$ admet un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ défini sur tout sous-ensemble contractile du domaine de définition de $\overrightarrow{B}$. Puisque $D_{\overrightarrow{B}} = \mathbb{R}^3$ est lui-même contractile, on déduit qu'il existe un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ défini sur $\mathbb{R}^3$.

Cherchons-le : un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ inconnu s'écrit sous la forme

$$\overrightarrow{A}(x,y,z) = f(x,y,z)\,\vec{\imath} + g(x,y,z)\,\vec{\jmath} + h(x,y,z)\,\vec{k},$$

où f, g, h sont trois fonctions inconnues, et on a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Pour le champ $\overrightarrow{B}(x,y,z) = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, on a donc

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y} - \dfrac{\partial g}{\partial z} = -1 & (1) \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial z} = -1 & (2) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1 & (3) \end{cases} \qquad (*)\ .$$

Il existe une infinité de fonctions f, g et h qui vérifient ce système, il nous suffit d'en trouver trois. Puisque chaque fonction est déterminée par ses trois dérivées partielles, il nous faudrait $3 \times 3 = 9$ informations pour les déterminer complètement (à moins d'une constante), alors qu'on n'a que 3 contraintes dans le système $(*)$. On a donc $9-3=6$ *choix possibles* pour déterminer trois fonctions f, g et h qui décrivent un potentiel vectoriel de $\overrightarrow{B}$. Ces 6 choix sont arbitraires, chacun peut choisir les conditions qu'il veut, pourvu qu'elles soient compatibles avec le système $(*)$.

Par exemple, choisissons $\boxed{h=0}$ (ce qui fixe 3 choix), plus $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=0}$, $\boxed{\frac{\partial g}{\partial y}=0}$ et $\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}=0}$. Il nous reste à calculer f et g telles que

$$\frac{\partial g}{\partial z}=1 \quad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=1 \quad (2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=1 \quad (3).$$

Puisqu'on a assumé que g ne dépend pas de x et de y, on a

$$(1) \qquad g(z)=\int dz=z,$$

et puisqu'on a assumé que f ne dépend pas de x on a

$$(2) \qquad f(y,z)=\int dz+F(y)=z+F(y),$$

où $F(y)$ est une fonction inconnue telle que

$$(3) \qquad \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}=F'(y)=1 \quad \Longleftrightarrow \quad F(y)=\int dy=y,$$

et qui donne donc $f(y,z)=z+y$. Au final, les potentiels vectoriels de $\overrightarrow{B}$ sur $\mathbb{R}^3$ sont donnés par

$$\overrightarrow{A}(x,y,z)=(y+z)\,\vec{\imath}+z\,\vec{\jmath}+\overrightarrow{\text{grad}}\,\phi(x,y,z)$$

pour tout champ scalaire $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

b) Pour $\overrightarrow{B}(x,y,z)=x\;\vec{\imath}+yz\;\vec{\jmath}-x\;\vec{k}$ on a

$$\text{div}\,\overrightarrow{B}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial(yz)}{\partial y}-\frac{\partial x}{\partial z}=1+z.$$

Puisque $\text{div}\,\overrightarrow{B}\neq 0$, par le Lemme de Poincaré II le champ $\overrightarrow{B}$ n'admet pas de potentiel vectoriel, même pas sur un sous-enemble contractile de son domaine de définition.

c) Pour $\overrightarrow{B}(x,y,z)=2xyz\;\vec{\imath}-y^2z\;\vec{\jmath}$, on a

$$\text{div}\,\overrightarrow{B}=\frac{\partial x}{\partial 2xyz}-\frac{\partial(y^2z)}{\partial y}=2yz-2yz=0.$$

Donc, par le Lemme de Poincaré II, $\overrightarrow{B}$ admet un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ défini sur tout sous-ensemble contractile du domaine de définition de $\overrightarrow{B}$. Puisque $D_{\overrightarrow{B}}=\mathbb{R}^3$ est lui-même contractile, on déduit qu'il existe un potentiel vectoriel $\overrightarrow{A}$ défini sur $\mathbb{R}^3$.

Cherchons-le sous la forme

$$\overrightarrow{A}(x,y,z)=f(x,y,z)\,\vec{\imath}+g(x,y,z)\,\vec{\jmath}+h(x,y,z)\,\vec{k},$$

où f,g,h vérifient alors le système

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}=\overrightarrow{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y}-\dfrac{\partial g}{\partial z}=2xyz & (1)\\ \dfrac{\partial h}{\partial y}-\dfrac{\partial f}{\partial z}=y^2z & (2)\\ \dfrac{\partial g}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=0 & (3)\end{cases}.$$

Si on choisit $\boxed{h=0}$, on obtient le système

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -2xyz \quad (1), \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -y^2 z \quad (2), \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (3).$$

Cette fois, on ne peut pas choisir $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ comme condition de choix, car cela voudrait dire que g ne dépend pas de y alors que sa dérivée $\frac{\partial g}{\partial z}$ dépend bien de y d'après (1). Ne sachant pas quelle condition imposer à g, on repose à plus tard le choix. Pour l'instant, on a donc

$$(1) \qquad g(x,y,z) = -\int 2xyz\, dz + G(x,y) = -xyz^2 + G(x,y),$$

où $G(x,y)$ est une fonction inconnue. Par contre, le choix $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0}$ et bien compatible avec (2) et (3) et on a

$$(2) \qquad f(y,z) = -\int y^2 z\, dz + F(y) = -\frac{1}{2} y^2 z^2 + F(y),$$

où $F(y)$ est une fonction inconnue. Pour fixer les deux fonctions $G(x,y)$ et $F(y)$, on a encore l'équation (3) et deux choix à faire : puisque

$$(3) \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -yz^2 + \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = -yz^2 + F'(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = F'(y),$$

on peut choisir la condition $\boxed{F'(y) = 0}$ (compatible avec tout), qui donne d'un coté

$$F(y) = \text{constante au choix, par ex. } 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(y,z) = -\frac{1}{2} y^2 z^2,$$

et de l'autre

$$(3) \qquad \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G(x,y) = G(y) \quad \text{ne dépend pas de } x.$$

Enfin, il nous reste un choix : pour simplifier, on peut prendre $\boxed{G(y) = 0}$, ce qui donne

$$g(x,y,z) = -xyz^2.$$

Au final, les potentiels vectoriels de $\overrightarrow{B}$ sur $\mathbb{R}^3$ sont donnés par

$$\overrightarrow{A}(x,y,z) = -\frac{1}{2} y^2 z^2\, \vec{\imath} - xyz^2\, \vec{\jmath} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \phi(x,y,z)$$

pour tout champ scalaire $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Exercice 16 – Divergence [Facultatif]

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}$ deux champs de vecteurs différentiables définis sur $\mathbb{R}^3$. Montrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \mathrm{div}\,(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) = \mathrm{div}\,\overrightarrow{U} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{V} \\
&(2) \quad \mathrm{div}\,(\alpha\ \overrightarrow{V}) = \alpha\ \mathrm{div}\,\vec{V} \\
&(3) \quad \mathrm{div}\,(f\ \overrightarrow{V}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{V} + f\ \mathrm{div}\,\vec{V} \\
&(4) \quad \mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{V}) = 0
\end{aligned}$$

Corrigé

Posons $\overrightarrow{U} = U_x\,\vec{\imath} + U_y\,\vec{\jmath} + U_z\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} + V_z\,\vec{k}$. Alors :

(1) La somme des champs de vectors est donnée par la somme des vecteurs en tout point, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = (U_x + V_x)\,\vec{\imath} + (U_y + V_y)\,\vec{\jmath} + (U_z + V_z)\,\vec{k},$$

donc on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) &= \frac{\partial}{\partial x}(U_x + V_x) + \frac{\partial}{\partial y}(U_y + V_y) + \frac{\partial}{\partial z}(U_z + V_z) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}U_x + \frac{\partial}{\partial x}V_x + \frac{\partial}{\partial y}U_y + \frac{\partial}{\partial y}V_y + \frac{\partial}{\partial z}U_z + \frac{\partial}{\partial z}V_z \\
&= \operatorname{div}\overrightarrow{U} + \operatorname{div}\overrightarrow{V}.
\end{aligned}$$

(2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un nombre, on a

$$\alpha\,\overrightarrow{V} = \alpha\,V_x\,\vec{\imath} + \alpha\,V_y\,\vec{\jmath} + \alpha\,V_z\,\vec{k},$$

donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\alpha\,\overrightarrow{V}) &= \frac{\partial(\alpha\,V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha\,V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha\,V_z)}{\partial z} \\
&= \alpha\,\frac{\partial V_x}{\partial x} + \alpha\,\frac{\partial V_y}{\partial y} + \alpha\,\frac{\partial V_z}{\partial z} \\
&= \alpha\operatorname{div}\vec{V}.
\end{aligned}$$

(3) Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction, le produit de f par $\overrightarrow{V}$ est calculé en tout point et s'écrit

$$f\,\overrightarrow{V} = f\,V_x\,\vec{\imath} + f\,V_y\,\vec{\jmath} + f\,V_z\,\vec{k},$$

donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\,\overrightarrow{V}) &= \frac{\partial(f\,V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(f\,V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(f\,V_z)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\,V_x + f\,\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,V_y + f\,\frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,V_z + f\,\frac{\partial V_z}{\partial z} \\
&= \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f \cdot \vec{V} + f\operatorname{div}\vec{V}.
\end{aligned}$$

(4) Puisque

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k},$$

on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{V}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 V_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z\partial y} \\
&= \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z\partial y}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

si le champ $\overrightarrow{V}$ est de classe C^2, c'est-à-dire ses coefficients V_x, V_y, V_z sont des fonctions réelles de classe C^2, car d'après le Théorème de Schwarz on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ pour toute fonction f de classe C^2.