

TD 6 – COURBES ET CIRCULATION

Exercice 19 – Circulation le long d'une courbe

Dessiner les courbes C^+ indiquées, trouver une paramétrisation si elle n'est pas déjà donnée et calculer la circulation des champs de vecteurs \vec{V} le long de C^+ .

a) $\vec{V}(x, y) = y \vec{i} - \vec{j}$, $C^+ =$ cycloïde paramétrée par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\vec{V}(x, y) = (x^2 + 1) \vec{j}$, $C^+ =$ courbe plane fermée $\left\{ \begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ x : 1 \rightarrow 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y : 1 \rightarrow 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x : 0 \rightarrow 1 \end{array} \right.$.

c) $\vec{V}(x, y) = \frac{y \vec{i} - x \vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $C^+ =$ cercle paramétré par $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

d) $\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \rho z \vec{e}_\varphi$, $C^+ =$ cercle $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = H \end{array} \right.$ orienté dans le sens antihoraire sur le plan xOy .

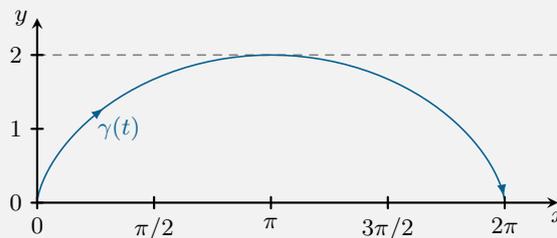
e) $\vec{V}(x, y, z) = x^2 z \vec{i} - \frac{y}{x} \vec{j} + \frac{xz^2}{y^2} \vec{k}$, $C^+ =$ courbe paramétré par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, avec $t \in]0, T]$.

f) $\vec{V}(x, y, z) = \frac{x}{y} \vec{i} + zy \vec{j}$, $C^+ =$ arc d'hyperbole $\left\{ \begin{array}{l} z = y - x \\ xy = 1 \\ y : 1 \rightarrow 2 \end{array} \right.$.

Corrigé

a) Dessin de la cycloïde paramétrée par $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= (0, 0) \\ \gamma(\pi) &= (\pi, 2) \\ \gamma(2\pi) &= (2\pi, 0) \end{aligned}$$



Vitesse de la courbe : $\gamma'(t) = (1 - \cos t) \vec{i} + \sin t \vec{j}$

Champ $\vec{V}(x, y) = y \vec{i} - \vec{j}$ le long de γ : $\vec{V}(\gamma(t)) = (1 - \cos t) \vec{i} - \vec{j}$

Circulation de \vec{V} le long de γ : puisque $\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(t + \cos t \sin t)$, on a

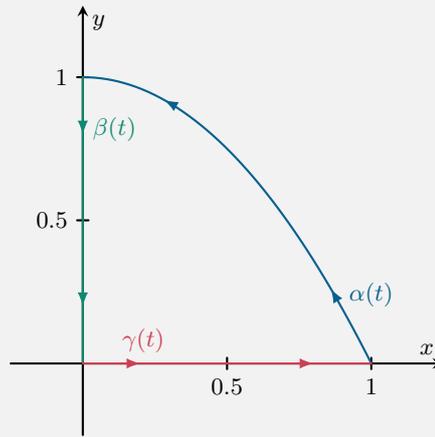
$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} ((1 - \cos t)^2 - \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t - \sin t) dt \\ &= [t - 2 \sin t + \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + \cos t]_0^{2\pi} = \frac{3}{2} 2\pi = 3\pi. \end{aligned}$$

b) Dessin et paramétrisation de la courbe C^+ : $\left\{ \begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ x : 1 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y : 1 \rightarrow 0 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x : 0 \rightarrow 1 \end{array} \right\} :$

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (1-t, 1-(1-t)^2) \\ &= (1-t, 2t-t^2), \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

$$\beta(t) = (0, 1-t), \quad t \in [0, 1]$$

$$\gamma(t) = (t, 0), \quad t \in [0, 1]$$



Vitesse des trois courbes :

$$\alpha'(t) = -\vec{i} + (2-2t)\vec{j}$$

$$\beta'(t) = -\vec{j}$$

$$\gamma'(t) = \vec{i}$$

Champ $\vec{V}(x, y) = (x^2 + 1)\vec{j}$ le long de C^+ :

$$\vec{V}(\alpha(t)) = ((1-t)^2 + 1)\vec{j} = (2-2t+t^2)\vec{j}$$

$$\vec{V}(\beta(t)) = \vec{j}$$

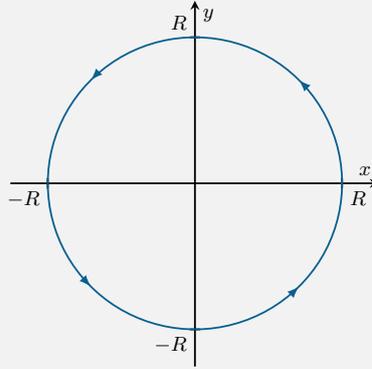
$$\vec{V}(\gamma(t)) = (t^2 + 1)\vec{j}$$

Circulation du champ \vec{V} le long de C^+ :

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\alpha} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\beta} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_0^1 \vec{V}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt + \int_0^1 \vec{V}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt + \int_0^1 \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 (2-2t)(2-2t+t^2) dt - \int_0^1 dt + 0 \\ &= \int_0^1 (4-8t+6t^2-2t^3-1) dt \\ &= \int_0^1 (3-8t+6t^2-2t^3) dt \\ &= [3t-4t^2+2t^3-\frac{1}{2}t^4]_0^1 \\ &= 3-4+2-\frac{1}{2} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Dessin du cercle C^+ paramétré par $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= (R, 0) \\ \gamma(\pi/2) &= (0, R) \\ \gamma(\pi) &= (-R, 0) \\ \gamma(3\pi/2) &= (0, -R)\end{aligned}$$



Vitesse de la courbe : $\gamma'(t) = -R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j}$

Champ $\vec{V}(x, y) = \frac{y \vec{i} - x \vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ le long de γ : sur le cercle on a

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \implies \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2} = R,$$

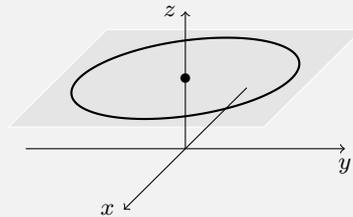
par conséquent

$$\vec{V}(\gamma(t)) = \frac{R \sin t \vec{i} - R \cos t \vec{j}}{R} = \sin t \vec{i} - \cos t \vec{j}.$$

Circulation de \vec{V} le long de C^+ :

$$\begin{aligned}\oint_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-R \sin^2 t - R \cos^2 t) dt \\ &= -R \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -R \int_0^{2\pi} dt \\ &= -R [t]_0^{2\pi} = -2\pi R.\end{aligned}$$

d) Cercle C^+ : $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = H \end{cases}$ orienté dans le sens antihoraire sur le plan xOy .



Paramétrisation du cercle : $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, H)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Champ $\vec{V}(\rho, \varphi, z) = \rho z \vec{e}_\varphi$ le long de γ : sur le cercle on a $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = R$ et $z = H$, par conséquent

$$\vec{V}(\gamma(t)) = RH \vec{e}_\varphi.$$

Comme ce vecteur est en coordonnées cylindriques, on calcule la vitesse de γ aussi en coordonnées cylindriques :

$$\gamma'(t) = -R \sin t \vec{i} + R \cos t \vec{j} = R(-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}) = R \vec{e}_\varphi.$$

Ceci est équivalent à paramétrer le cercle en coordonnées cylindriques avec

$$\rho(t) = R, \quad \varphi(t) = t, \quad z(t) = H$$

et à dériver le vecteur position $\gamma(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho(t) + z(t) \vec{k}$ à partir des dérivées

$$\rho'(t) = 0, \quad \varphi'(t) = 1, \quad z'(t) = 0$$

$$\vec{e}_\rho'(t) = \varphi'(t) \vec{e}_\varphi(t), \quad \vec{e}_\varphi'(t) = -\varphi'(t) \vec{e}_\rho(t), \quad \vec{k}'(t) = \vec{0},$$

ce qui donne

$$\gamma'(t) = \rho'(t) \vec{e}_\rho(t) + \rho(t) \vec{e}_\rho'(t) + z'(t) \vec{k} = R \vec{e}_\varphi.$$

Au final on peut calculer le produit scalaire de $\vec{V}(\gamma(t)) = RH \vec{e}_\varphi$ et de $\gamma'(t) = R \vec{e}_\varphi$ dans le repère orthonormal $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ comme somme des produits composante par composante, et on obtient la circulation de \vec{V} le long de C^+ paramétré par γ :

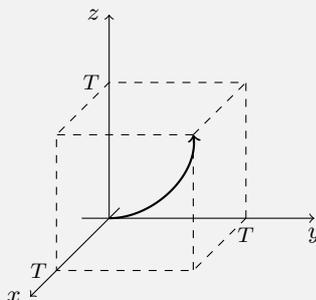
$$\oint_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = R^2 H \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R^2 H.$$

e) Courbe C^+ paramétrée par

$$\gamma(t) = (t, t^2, t^3), \quad t \in]0, T].$$

Vitesse

$$\gamma'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}.$$



Champ $\vec{V}(x, y, z) = x^2 z \vec{i} - \frac{y}{x} \vec{j} + \frac{xz^2}{y^2} \vec{k}$ le long de γ :

$$\vec{V}(\gamma(t)) = t^2 t^3 \vec{i} - \frac{t^2}{t} \vec{j} + \frac{t(t^3)^2}{(t^2)^2} \vec{k} = t^5 \vec{i} - t \vec{j} + t^3 \vec{k}$$

Circulation de \vec{V} le long de C^+ paramétrée par γ :

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_0^T \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^T (t^5 - 2t^2 + 3t^5) dt = \int_0^T (4t^5 - 2t^2) dt \\ &= \left[\frac{4}{6} t^6 - \frac{2}{3} t^3 \right]_0^T = \frac{2}{3} T^6 - \frac{2}{3} T^3 = \frac{2}{3} T^3 (T^3 - 1). \end{aligned}$$

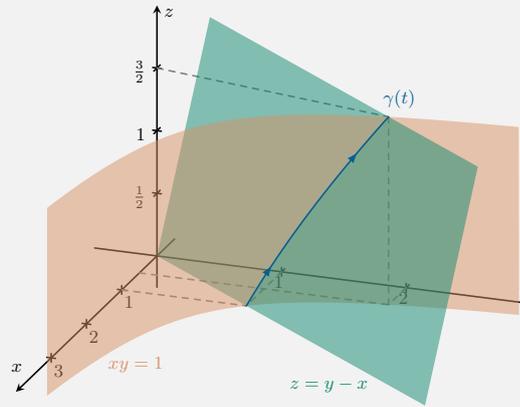
Remarque : Étant donné que $t = 0$ n'est pas dans l'intervalle de définition de $\gamma(t)$, on peut se demander pourquoi cette borne inférieure ne pose pas de problème dans l'intégrale ci-dessus. Or, bien que \vec{V} ne soit pas défini à l'origine, les deux termes problématiques, y/x et xz^2/y^2 , ont des limites bien définies dans le cas particulier où l'on s'approche de l'origine en suivant la courbe $\gamma(t)$ en sens inverse,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) z^2(t)}{y^2(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t^6}{t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} t^3 = 0 \quad .$$

f) L'arc d'hyperbole C^+ d'équations

$$z = y - x, \quad xy = 1, \quad \text{avec } y \in [1, 2]$$

est à l'intersection de l'hyperboloïde de profil $xy = 1$ et du plan $z = y - x$.



Paramétrisation de C^+ : on pose $y = t$ et on obtient

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{t}, t, t - \frac{1}{t} \right), \quad \text{avec } t \in [1, 2].$$

Vitesse : $\gamma'(t) = -\frac{1}{t^2} \vec{i} + \vec{j} + \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \vec{k}$.

Champ $\vec{V}(x, y, z) = \frac{x}{y} \vec{i} + zy \vec{j}$ le long de γ :

$$\vec{V}(\gamma(t)) = \frac{1/t}{t} \vec{i} + t \left(t - \frac{1}{t} \right) \vec{j} = \frac{1}{t^2} \vec{i} + (t^2 - 1) \vec{j}.$$

Circulation de \vec{V} le long de γ :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} &= \int_1^2 \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_1^2 \left(-\frac{1}{t^4} + t^2 - 1 \right) dt \\ &= \int_1^2 (-t^{-4} + t^2 - 1) dt \\ &= \left[-\frac{1}{-4+1} t^{-4+1} + \frac{1}{3} t^3 - t \right]_1^2 \\ &= \left[\frac{1}{3} \frac{1}{t^3} + \frac{1}{3} t^3 - t \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} 2^3 - 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} + 8 - 1 - 1 \right) - 1 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1+48}{8} \right) - 1 \\ &= \frac{49}{24} - 1 = \frac{49-24}{24} = \frac{25}{24}. \end{aligned}$$

Exercice 20 – Circulation de $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$

Calculer la circulation des champs de gradient le long des courbes indiquées, en utilisant le théorème

$$\int_{A, C^+}^B \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{\ell} = \phi(B) - \phi(A).$$

a) $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ avec $\phi(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$, C^+ = courbe qui relie le point $(5, 1, 0)$ au point $(3, 2, 1)$.

b) $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$ = **champ électrique** produit par une charge Q placée en $r = 0$

C_1^+ = courbe qui relie le point $A = (6, 0, 0)$ au point $B = (0, 0, 3)$,

C_2^+ = cercle centré en O de rayon R .

[Quel est le potentiel $\phi(r)$ de $\vec{E}(r)$? Chercher dans les notes de cours ou le calculer.]

c) $\vec{B}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi$ = **champ magnétique** produit par un courant d'intensité I dans un fil droit de direction \vec{k} .

C_1^+ = arc de cercle de rayon R centré sur le fil, reliant le point $A = (R, 0, 0)$ au point $B = (0, R, 0)$

C_2^+ = cercle de rayon R qui ne fait pas le tour du fil.

[Quel est le potentiel scalaire $\phi(\varphi)$ de $\vec{B}(\rho)$ si on ne fait pas le tour complet autour du fil ? Chercher dans les notes de cours ou le calculer.]

Corrigé

a) La circulation du champ de gradient $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$, avec potentiel

$$\phi(x, y, z) = \ln(xy + z^2),$$

le long d'une courbe quelconque C^+ qui relie le point $A(5, 1, 0)$ au point $B(3, 2, 1)$, vaut

$$\begin{aligned} \int_{C^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{\ell} &= \phi(B) - \phi(A) = \phi(3, 2, 1) - \phi(5, 1, 0) \\ &= \ln(6 + 1) - \ln(5 + 0) = \ln\left(\frac{7}{5}\right). \end{aligned}$$

b) Le **champ électrostatique**

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r, \quad r \neq 0$$

est bien conservatif sur son domaine de définition $D_{\vec{E}} = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, parce que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ et $D_{\vec{E}}$ est simplement connexe (voir livret, section 4.4 page 44, l'exemple analogue à page 51 et aussi la fiche TD 4).

Le potentiel scalaire $\phi(r)$ de $\vec{E}(r)$, tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ (au sens physique), est le **potentiel de Coulomb** (voir livret page 32)

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad r \neq 0.$$

Alors, la circulation de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ le long d'une courbe C_1^+ qui relie le point $A(6, 0, 0)$, qui se trouve à distance $r_A = 6$ de l'origine O , au point $B(0, 0, 3)$, qui se trouve à distance $r_B = 3$ de

l'origine O , vaut

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= - \int_{C_1^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{\ell} = \phi(r_A) - \phi(r_B) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-2}{6} \\ &= -\frac{Q}{24\pi\epsilon_0}. \end{aligned}$$

De même, la circulation de \vec{E} le long d'une courbe *fermée*, comme le cercle C_2^+ , est nulle :

$$\oint_{C_2^+} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \oint_{C_2^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

c) Le champ magnétostatique

$$\vec{B}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi, \quad \rho \neq 0$$

est décrit en détail dans l'exercice à page 57 du livret de cours.

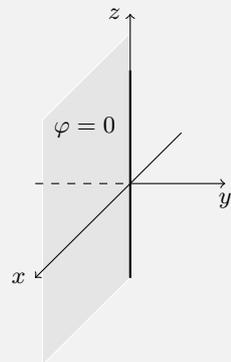
Ce champ est défini sur l'ensemble $D_{\vec{B}} = \mathbb{R}^3 \setminus \text{axe } Oz$, qui n'est pas simplement connexe.

Comme $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$, par le Lemme de Poincaré I le champ \vec{B} admet un potentiel scalaire *sur tout sous-ensemble simplement connexe de $D_{\vec{B}}$* .

Les sous-ensembles simplement connexes de $D_{\vec{B}}$ les plus grands possibles sont donnés par \mathbb{R}^3 privé d'un demi-plan vertical contenant l'axe Oz .

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi = 0\}$, égal à \mathbb{R}^3 privé du demi-plan déterminé par l'angle $\varphi = 0$, est un tel sous-ensemble simplement connexe de $D_{\vec{B}}$.

Mais on peut également considérer tout ensemble $\mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi = \varphi_0\}$ égal à \mathbb{R}^3 privé du demi-plan déterminé par l'angle φ_0 fixé (par exemple $\varphi_0 = \pi/2$ ou $\varphi_0 = \pi$).



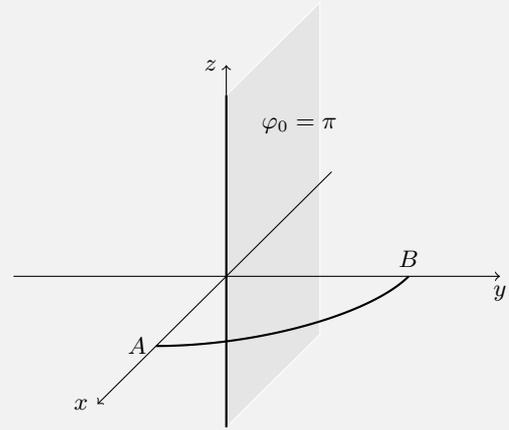
Un potentiel scalaire de \vec{B} , tel que $\vec{B} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$, sur l'ensemble $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\varphi = \varphi_0\}$ est (voir livret de cours page 58)

$$\phi(\varphi) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi + \varphi_0), \quad \varphi \in]0, 2\pi[\quad (\text{et toujours } \rho \neq 0).$$

À noter que le champ scalaire ϕ ne dépend pas explicitement de ρ mais seulement de l'angle φ de rotation autour de l'axe Oz .

Alors, pour calculer la circulation de \vec{B} le long de l'arc de cercle C_1^+ de rayon R centré en l'origine, reliant le point $A(R, 0, 0)$ au point $B(0, R, 0)$, on se place dans un sous-espace de $D_{\vec{B}}$ simplement connexe qui contient cet arc de cercle.

Par exemple, \mathbb{R}^3 privé du demi-plan à angle $\varphi_0 = \pi$.



Puisque $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = \pi/2$ et $\varphi_0 = \pi$, on a alors

$$\begin{aligned} \int_{C_1^+} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= - \int_{C_1^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{\ell} = \phi(\varphi_A) - \phi(\varphi_B) \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi_A + \varphi_0 - \varphi_B - \varphi_0) \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} (\varphi_A - \varphi_B) \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4}. \end{aligned}$$

Enfin, la circulation de \vec{B} le long d'un cercle *fermé* qui ne fait pas le tour de l'axe Oz , se calcule sur un sous-ensemble simplement connexe de $D_{\vec{B}}$ qui contient entièrement ce cercle (qui existe, puisque le cercle ne fait pas le tour de l'axe Oz), et est donc nulle :

$$\oint_{C_2^+} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = - \oint_{C_2^+} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{\ell} = 0.$$