

UCBL – L1 PCSI – UE TMB

Techniques Mathématiques de Base

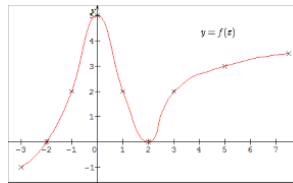
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard Lyon 1

Réécrit et modifié par Ulysse Serres, sur la base du fascicule original d'Alessandra Frabetti, successivement modifié par Léon-Matar Tine et Louis Dupaigne.

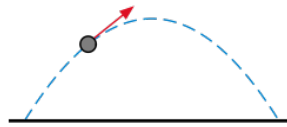
TMB 2025-2026

Objectifs du cours

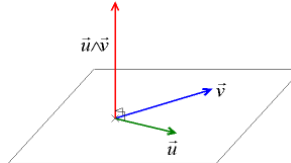
Etude de fonctions



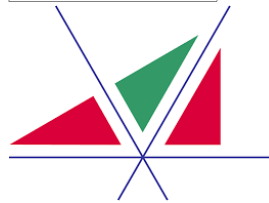
Équations différentielles



Bases du calcul vectoriel



Symétries



Outils : nombres complexes, graphes, dérivées, primitives, vecteurs, matrices, géométrie cartésienne...

Programme du cours

Partie I : Fonctions et équations différentielles

Ch. 1 – Nombres complexes, polynômes complexes

Ch. 2 – Fonctions, graphes, réciproques

Ch. 3 – Dérivées, extrema locaux, développements limités

Ch. 4 – Primitives, intégrales, calcul d'aires

Ch. 5 – Équations différentielles

Partie II : Vecteurs, transformations linéaires et géométrie

Ch. 6 – Systèmes linéaires et matrices

Ch. 7 – Éléments succincts d'algèbre linéaire

Ch. 8 – Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

TMB – Chapitre 1

Nombres complexes

Dans ce chapitre :

- 1.1 Définition, premières propriétés
- 1.2 Changement de coordonnées, exponentielle complexe
- 1.3 Racines d'un nombre complexe, polynômes complexes

5

1.1 – Définition, premières propriétés

Dans cette section :

- Définition des nombres complexes : forme algébrique
- Plan complexe, coordonnées cartésiennes
- Partie réelle, partie imaginaire, conjugué
- Module, argument, coordonnées polaires

6

Définition des nombres complexes : forme algébrique

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est une extension de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Dans $\mathbb{C}$, il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$. ($i \in \mathbb{C}$ mais $i \notin \mathbb{R}$)

Définition : Un **nombre complexe** est un nombre qui s'écrit sous la forme $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On écrit $z \in \mathbb{C}$ pour exprimer le fait que z est un nombre complexe.

Exemples : $3 + 2i$, $0 = 0 + 0i$ (**zéro**), $1 = 1 + 0i$ (**un**), $i = 0 + 1i$.

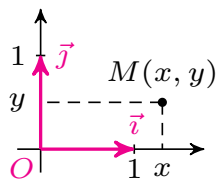
- On écrit $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ l'**ensemble des nombres complexes**. Il contient deux sous-ensembles remarquables :
 - les nombres **réels** : $\mathbb{R} = \{x = x + 0i \mid x \in \mathbb{R}\}$;
 - les nombres **imaginaires purs** : $i\mathbb{R} = \{iy = 0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.
- L'expression $z = x + iy$ s'appelle la forme **algébrique** (ou **cartésienne**) du nombre complexe z .
- L'ensemble $\mathbb{C}$ se représente comme un plan (voir page suivante).

7

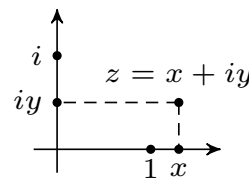
Plan complexe, coordonnées cartésiennes

À tout point $M(x, y)$ du plan cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$ (et inversement). De cette manière, on identifie l'ensemble $\mathbb{C}$ avec le plan (noté aussi $\mathbb{R}^2$) muni du repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le complexe z est appelé **affixe** de M (ou, de manière équivalente, affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$), (x, y) sont appelées les **coordonnées cartésiennes** de z



Plan cartésien : $(\mathbb{R}^2, (O, \vec{i}, \vec{j}))$



Plan complexe : $\mathbb{C}$

Attention : $i \neq \vec{i}$: $\vec{i}$ est un vecteur unitaire du plan alors que $i \in \mathbb{C}$ est tel que $i^2 = -1$.

Exemples :

- $z = 2 + 3i$ est l'affixe du point $M(2, 3)$ (ou du vecteur $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$)
- $z = i$ est l'affixe du point $M(0, 1)$ (ou du vecteur $\overrightarrow{OM} = 0\vec{i} + 1\vec{j} = \vec{j}$)
- $z = 1$ est l'affixe du point $M(1, 0)$ (ou du vecteur $\overrightarrow{OM} = 1\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{i}$)
- Les **nombres réels** forment l'axe des abscisses. On les note $z = x$, où $x \in \mathbb{R}$.
- Les **nombres imaginaires purs** forment l'axe des ordonnées. On les note $z = iy$, où $y \in \mathbb{R}$

8

Opérations élémentaires sur les nombres complexes I

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes

Définition : On a l'égalité $z = z'$ si et seulement si leurs coordonnées cartésiennes sont égales, c'est-à-dire si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Définition : On **additionne** les deux nombres complexes z et z' à l'aide de leurs coordonnées cartésiennes de la manière suivante :

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

On a de même $z - z' = (x - x') + i(y - y')$.

Exercice (règle du parallélogramme) : représenter dans le plan cartésien $z = 1 + 2i$, $z' = 2 + i$, $z'' = z + z'$. Que pensez-vous du quadrilatère dont les affixes des sommets sont O , z , z'' et z' ?

Définition : On **multiplie** le nombre complexe z par $\lambda \in \mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\lambda z = \lambda x + i\lambda y$$

Propriétés : Si M et M' sont deux points du plan d'affixes respectives z et z' , alors

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z$,
- le milieu du segment $[MM']$ a pour affixe $\frac{z + z'}{2}$,
- le vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ a pour affixe $z + z'$,
- le vecteur $\lambda \overrightarrow{OM}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a pour affixe λz .

9

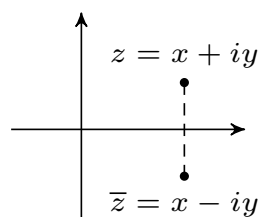
Partie réelle, partie imaginaire, conjugué

Définition : Pour un nombre complexe $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,

- x est la **partie réelle** de z et on écrit $x = \operatorname{Re}(z)$
- y est la **partie imaginaire** de z et on écrit $y = \operatorname{Im}(z)$

Exemple : Pour $z = 3 - 2i$, on a $\operatorname{Re}(z) = 3$, $\operatorname{Im}(z) = -2$ et $(3, -2)$ sont les coordonnées cartésiennes de z .

Définition : le **nombre complexe conjugué** de z est défini par $\bar{z} = x - iy$.
 $\bar{z}$ est donc le point symétrique de z par rapport à l'axe des abscisses.



Exemple : Pour $z = 2 + i$, on a $\bar{z} = 2 - i$. Que vaut le conjugué de $\bar{z}$?

Propriétés :

- le conjugué d'un nombre réel est lui-même (exemple : $z = \sqrt{2}$, $\bar{z} = \sqrt{2}$),
- le conjugué d'un nombre imaginaire pur est son opposé (exemple : $z = 5i$, $\bar{z} = -5i$).

10

Opérations élémentaires sur les nombres complexes II

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes ($x, x', y, y' \in \mathbb{R}$)

Définition : On **multiplie** les deux nombres complexes z et z' à l'aide de leurs coordonnées cartésiennes de la manière suivante :

$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$$

En effet,

$$\begin{aligned} zz' &= (x + iy)(x' + iy') \\ &= xx' + x(iy') + (iy)x' + (iy)(iy') \\ &= xx' + x(iy') + (iy)x' + i^2 yy' \\ &= xx' + ixy' + iyx' - yy' && (\text{car } i^2 = -1) \\ &= (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{aligned}$$

Application : Exprimer le rapport $\frac{z}{z'}$ en coordonnées cartésiennes.

Idée : On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}'$ pour utiliser le fait que $z'\bar{z}'$ est un nombre réel. On obtient :

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'} = \frac{(x + iy)(x' - iy')}{(x' + iy')(x' - iy')} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2}$$

Exemple :
$$\frac{2}{2 - i} = \frac{2(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{4 + 2i}{2^2 + 1^2} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$$

11

Propriétés des opérations élémentaires

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes ($x, x', y, y' \in \mathbb{R}$). Alors :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ si $z' \neq 0$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = x$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = y$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ et, si $z \neq 0$, $\overline{z^{-n}} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\bar{z}^n} = \bar{z}^{-n}$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$
- $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$ (En effet, $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - x(iy) + (iy)x - (iy)^2 = x^2 + y^2$ qui est un nombre réel positif.)

12

Exemples : opérations en coordonnées cartésiennes

Soient $z = 2(3 + 2i)$ et $z' = 5 - i$. Alors :

$$z + z' = (6 + 4i) + (5 - i) = 11 + 3i$$

$$z - z' = (6 + 4i) - (5 - i) = 1 + 5i$$

$$\begin{aligned} zz' &= 2(3 + 2i)(5 - i) \\ &= 2(15 - 3i + 10i - 2i^2) \\ &= 2((15 + 2) + (-3 + 10)i) \\ &= 2(17 + 7i) = 34 + 14i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{z'} &= \frac{2(3 + 2i)}{5 - i} = \frac{2(3 + 2i)(5 + i)}{25 + 1} \\ &= \frac{2(15 - 2 + 10i + 3i)}{26} \\ &= \frac{13}{13} + \frac{13}{13}i = 1 + i \end{aligned}$$

13

Module, argument, coordonnées polaires

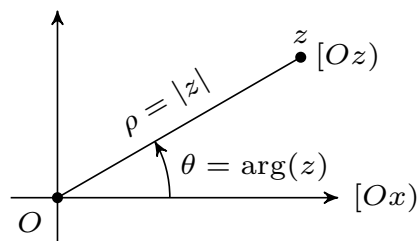
Outre les coordonnées cartésiennes (x, y) , on peut identifier un nombre complexe z à l'aide de coordonnées polaires (ρ, θ) comme suit.

Définition :

- Le **module** de z est la distance de z à l'origine, notée $\rho = |z|$.

Nota - Si M désigne le point du plan cartésien d'affixe z , on a $\rho = \text{distance}(O, M) = \|\overrightarrow{OM}\|$.

- Un **argument** de z est un angle θ formé par la demi-droite $[Ox)$ et la demi-droite $[Oz)$.



- L'**argument principal** de z est l'unique argument de z appartenant à $] - \pi, \pi]$.

On note $\theta = \arg(z) \in] - \pi, \pi]$.

- $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times] - \pi, \pi]$ sont appelées les **coordonnées polaires** de z .

Exemple : pour $z = i$, $|i| = 1$, $\arg(i) = \pi/2$ et $\theta = 5\pi/2$ est un autre argument de i .

Exercice : trouver tous les arguments de $z = 0$.

Propriétés du module

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. D'après le théorème de Pythagore, le **module** de z est donné par

$$|z|^2 = x^2 + y^2.$$

Propriétés :

- $|z| \geq 0$ et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- si $z = x \in \mathbb{R}$, alors $|z| = |x|$ est la valeur absolue du réel x .
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
et $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $z_1 = \lambda z_2$ ou $\lambda \in \mathbb{R}_+$

15

1.2 – Changement de coordonnées, exponentielle complexe

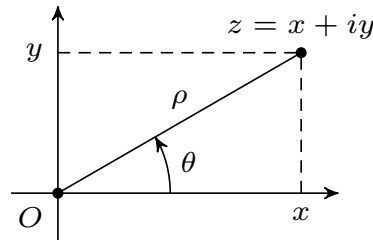
Dans cette section :

- Changement de coordonnées
- Exponentielle complexe, cercle unité
- Applications géométriques et trigonométriques

16

Changement de coordonnées : cartésiennes $\leftrightarrow$ polaires

Soit z un nombre complexe.



Propriété (polaires $\rightarrow$ cartésiennes) :

Par définition² du cosinus et du sinus, on a $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$.

Propriété (cartésiennes $\rightarrow$ polaires) : On suppose que $z \neq 0$. On a (Pythagore)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Une fois connu ρ , on détermine un argument θ de z à l'aide des relations

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{\rho}$$

Nota : ces équations donnent θ de manière implicite, il faut encore les résoudre.

$$2. \cos \theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{y}{\rho}$$

17

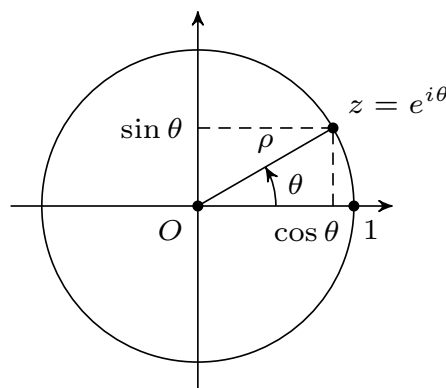
Exponentielle complexe, cercle unité

Définition : L'exponentielle complexe d'argument θ est le nombre complexe défini par

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Exemples : $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.

Définition : Le cercle **unité** (ou trigonométrique) est le cercle de centre O et de rayon 1.



Propriétés :

- Le **cercle unité** a pour équation polaire $\rho = 1$ et pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$.
- Le cercle unité est composé des nombres $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, où $\theta \in \mathbb{R}$
- $e^{i\theta}$ est **périodique** de **période** 2π , i.e. $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- $e^{i\theta}$ est un nombre complexe **unitaire**, i.e. $|e^{i\theta}|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

18

Propriétés de l'exponentielle complexe

- $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$

Démonstration : Pour la première formule, on a

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{i\theta'} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \quad (\text{par définition de l'exponentielle complexe}) \\ &= \cos \theta \cos \theta' + \cos \theta(i \sin \theta') + (i \sin \theta) \cos \theta' + (i \sin \theta)(i \sin \theta') \\ &= (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta') \quad (\text{car } i^2 = -1) \\ &= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \quad (\text{d'après les formules de trigo!}) \\ &= e^{i(\theta+\theta')} \quad (\text{par définition de l'exponentielle complexe}) \end{aligned}$$

Les autres formules se démontrent de manière similaire.

- **Formule de Moivre :** $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc

$$\boxed{(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)}$$

- **Formules d'Euler :** $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Exercice : Vérifiez l'identité d'Euler $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

19

Forme polaire d'un complexe

Théorème : Tout nombre complexe $z \neq 0$ s'écrit sous la forme **polaire** $\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$, où $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

Démonstration : Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ non nul, on peut écrire $x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ et puisque $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 = 1$, il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. En posant, $\rho = |z|$ et en se souvenant de la définition de l'exponentielle complexe (et du module), on obtient alors $z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$.

L'écriture exponentielle (polaire) des nombres complexes permet de réaliser beaucoup de calculs de manière plus simples qu'avec l'écriture cartésienne.

- **Multiplication des deux nombres complexes** $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$

$$\boxed{zz' = \rho e^{i\theta} \rho' e^{i\theta'} = \rho \rho' e^{i(\theta+\theta')}} \quad \text{et}$$

- **Calcul des puissances de** $z = \rho e^{i\theta}$

- puissance entière positive : $\boxed{z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}}$, où $n \in \mathbb{N}$
- puissance entière négative : $\frac{1}{z^n} = z^{-n} = \rho^{-n} e^{-in\theta} = \frac{1}{\rho^n} e^{-in\theta}$ si $\rho \neq 0$,

20

Exemples : conversion coordonnées $\leftrightarrow$ polaires

Exemple de conversion en coordonnées cartésiennes :

$$2e^{i\pi/4} = 2\cos(\pi/4) + 2i\sin(\pi/4) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Exemple de conversion en coordonnées polaires :

- Si $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, alors module vérifie $|z|^2 = \rho^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$ d'où $\rho = \sqrt{4} = 2$ et un argument est un angle θ tel que

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, $\theta = \pi/4$ est un argument de z et donc $z = \rho e^{i\theta} = 2e^{i\pi/4}$.

- Si $z = -1 - i$, alors $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. D'où

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, $\theta = 5\pi/4$ est un argument de z . Et $z = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$

- Si $z = 5 - 3i$, alors $\rho = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$. D'où

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{34}} \text{ et } \sin \theta = \frac{-3}{\sqrt{34}}.$$

De cet angle on peut dire (sans calculatrice) que $\tan \theta = -3/5$ et $z = \sqrt{34}e^{i\theta}$.

Exercice :

- vérifier graphiquement que $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$
- à l'aide des coordonnées polaires, vérifier que si $z' \neq 0$, alors $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z}'$.
- montrer que $z = -\bar{z}$ si et seulement si z est imaginaire pur.

21

Applications géométriques et trigonométries

- Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. La distance de z_1 à z_2 vaut $|z_1 - z_2|$.
- Un cercle de rayon $R > 0$ est formé des points se trouvant à une distance R de son centre $z_0 \in \mathbb{C}$. Il a donc pour équation $|z - z_0| = R$
- Soient z_1, z_2 deux nombres complexes. La médiatrice du segment $[z_1 z_2]$ est formée des points se trouvant à égale distance de z_1 et z_2 . Elle a donc pour équation $|z - z_1| = |z - z_2|$.
- Soient $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Si $z = \rho e^{i\theta}$, alors $e^{i\psi} z = \rho e^{i(\theta+\psi)}$. Autrement dit, $e^{i\psi} z$ est l'image de z par la rotation d'angle ψ autour de l'origine.
- En développant la relation $e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$ en coordonnées cartésiennes, on trouve les formules de trigonométrie

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

- Dans le cas particulier où $a = b$, on déduit

$$\begin{cases} \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2a) = 2\sin a \cos a \end{cases}$$

22

1.3 – Racines n -ièmes d'un complexe, polynômes complexes

Dans cette section :

- Racines deuxièmes, troisièmes et n -ièmes d'un nombre complexe
- Polynômes complexes (racines, factorisation)

23

Racines deuxièmes, troisièmes et n -ièmes d'un nombre complexe

Définition : On appelle **racine deuxième** du nombre complexe z tout nombre complexe w tel que $w^2 = z$.

Exemple : Soit $z = -1$.

Comme $-1 = e^{i\pi}$,

$$w_1 = e^{i\pi/2} = i \text{ est racine deuxième de } z = -1.$$

Comme $-1 = e^{i(\pi+2\pi)} = e^{i3\pi}$,

$$w_2 = e^{i3\pi/2} = -i \text{ est aussi racine deuxième de } z = -1.$$

Exercice : Dans le cas particulier où $z = x \in \mathbb{R}_+$, les racines deuxièmes de z sont la racine carrée de x : $w_1 = \sqrt{x}$ et son opposée $w_2 = -\sqrt{x}$. Que sont les racines deuxièmes de $z = x \in \mathbb{R}_-$?

Définition : On appelle **racine troisième** du nombre complexe z tout nombre complexe w tel que $w^3 = z$.

Exercice : Vérifier que $w_1 = e^{i\pi/3}$, $w_2 = e^{i\pi} = -1$ et $w_3 = e^{i5\pi/3}$ sont racines troisièmes de $z = -1$.

Définition : De manière générale, on appelle **racine n -ième** ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) du nombre complexe z tout nombre complexe w tel que $w^n = z$.

24

Racines deuxièmes, troisièmes et n -ièmes d'un nombre complexe

Théorème :

- Un nombre complexe $z = \rho e^{i\theta}$ non nul a exactement deux racines deuxièmes w_1 et w_2 . Comme $\rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta+2\pi)}$, les racines deuxièmes de z sont

$$w_1 = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad w_2 = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)} = -w_1$$

Les racines deuxièmes sont opposées.

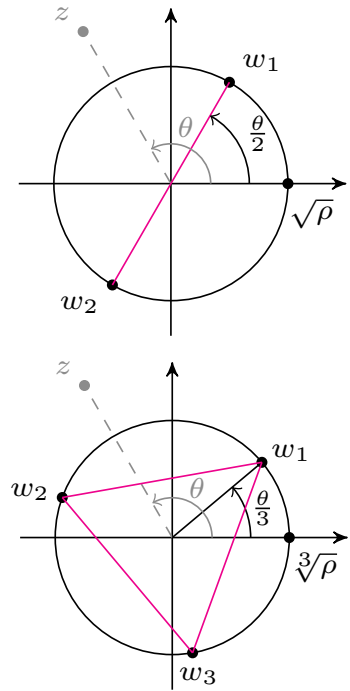
- Un nombre complexe $z = \rho e^{i\theta}$ non nul a exactement trois racines troisièmes w_1, w_2 et w_3 :

$$w_1 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}}, \quad w_2 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})} \quad \text{et} \quad w_3 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})}$$

- Les racines troisièmes forment un triangle équilatéral inscrit sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[3]{\rho}$.
- Si une racine troisième est réelle, les deux autres sont complexes conjuguées.
- Un nombre complexe $\rho e^{i\theta}$ non nul a exactement n racines n -ièmes $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$:

$$w_k = \rho^{1/n} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Les racines n -ièmes forment un polygone régulier à n côtés inscrit sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$.



25

Exercice : racines deuxièmes de nombres complexes

Calculer les racines deuxièmes des complexes suivants :

- $z = 1 + i\sqrt{3}$

Solution : On écrit z en coordonnées polaires : $z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Alors,

$$w_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$$

$$w_2 = \sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{6} + \pi)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$$

- $z = 15 - 8i$

Solution : Comme on ne connaît pas la forme polaire de z , on revient à la définition d'une racine deuxième en cherchant $w = x + iy$ tel que $w^2 = z$. Soit

$$(x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = 15 - 8i$$

Astuce : pour résoudre on commence par calculer $|w|^2 = |z|$.

$$|w|^2 = x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{225 + 64} = 17.$$

De sorte que

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -\frac{4}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

On a donc $w_1 = -4 + i$ et $w_2 = 4 - i$.

26

Polynômes complexes et racines : définition

Définition : Un **polynôme complexe** est une expression de la forme

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

où les nombres $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des paramètres complexes et z est une variable complexe.

Le **degré** de $P(z)$ est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.

Exemple : $z^3 + (5 - i)z$ est un polynôme de degré 3

Définition : Une **racine** d'un polynôme complexe $P(z)$ est un nombre complexe z tel que

$$P(z) = 0$$

Exemple : $z = i$ et $z = -i$ sont racines de $P(z) = z^2 + 1$.

27

Polynômes complexes et racines : propriétés

Lemme : Si z_1 est une racine de $P(z)$, alors il existe un entier $m_1 \geq 1$ et un polynôme $Q(z)$ tels que

$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} Q(z) \quad \text{et} \quad Q(z_1) \neq 0.$$

On appelle m_1 la **multiplicité** de la racine z_1 .

Théorème de d'Alembert-Gauss : Tout polynôme complexe $P(z)$ de degré n peut s'écrire sous la forme

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k}$$

où $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z_1, \dots, z_k$ sont les racines distinctes de $P(z)$ et où $m_1 + \cdots + m_k = n$.

Par conséquent, **tout polynôme complexe de degré n admet n racines** (qui ne sont pas forcément distinctes).

Exemple : Le polynôme $P(z) = z^2 + 1$ a pour racines $z_1 = i$ et $z_2 = -i$. P est de degré 2, ce qui force $m_1 = m_2 = 1$. Enfin, par définition de $P(z)$, $a_2 = 1$. Par le théorème, on conclut que

$$z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$$

28

Racines d'un polynôme complexe de degré 2

Proposition : Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes sont

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a} \in \mathbb{C}$$

où $\pm\delta \in \mathbb{C}$ sont les racines deuxièmes du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que $\delta^2 = \Delta$.

Par conséquent, le polynôme $P(z) = az^2 + bz + c$ possède

- une racine double $z = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$,
- deux racines distinctes $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ si $\Delta \neq 0$.

29

Exercice : équation complexe de degré 2

Résoudre l'équation $z^2 - (1 + i)z + 6 - 2i = 0$.

Réponse : Les solutions de cette équation sont $z = \frac{1 + i \pm \delta}{2}$, où il faut trouver $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$ et $|\delta^2| = |\Delta|$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2) + i2xy &= (1 + i)^2 - 4(6 - 2i) \\ &= 1 + 2i - 1 - 24 + 8i = -24 + 10i \\ x^2 + y^2 &= 2|-12 + 5i| = 2\sqrt{144 + 25} = 2 \times 13 = 26\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -24 \\ 2xy = 10 \\ x^2 + y^2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 5/x = \pm 5 \end{cases}$$

et par conséquent $\delta = \pm(1 + 5i)$.

On a donc

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1 + i + (1 + 5i)}{2} = \frac{2 + 6i}{2} = 1 + 3i \\ z_2 &= \frac{1 + i - (1 + 5i)}{2} = \frac{0 - 4i}{2} = -2i\end{aligned}$$

30

Proposition : Si $P(z)$ est un polynôme à coefficients réels, et $z_1 \in \mathbb{C}$ est une racine complexe de $P(z)$ de multiplicité m_1 , alors sa conjuguée $z_2 = \overline{z_1}$ est aussi une racine de $P(z)$, de même multiplicité $m_2 = m_1$.

Exemple : Le polynôme à coefficients réels $P(z) = z^2 + 1$ a pour racines $z_1 = i$ et $z_2 = -i$.

Puisque $z = \overline{z}$ si seulement si $z \in \mathbb{R}$,

- Tout polynôme réel de degré 2 tel que $\Delta < 0$ admet deux racines complexes conjuguées z_1 et $z_2 = \overline{z_1}$.
- Tout polynôme réel de degré 3 admet au moins une racine réelle.

Exemple : Le polynôme $P(z) = z^2 - 4z + 5$ est tel que $\Delta = 16 - 20 < 0$. Il a deux racines complexes $z_1 = 2+i$ et $z_2 = 2-i = \overline{2+i}$.

31

TMB – Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle

Dans ce chapitre :

- 2.1 Graphes de fonctions, opérations sur les graphes de fonctions
- 2.2 De la fonction au graphe : symétries, sens de variation, convexité
- 2.3 Fonctions usuelles
- 2.4 Composition des fonctions et fonctions réciproques

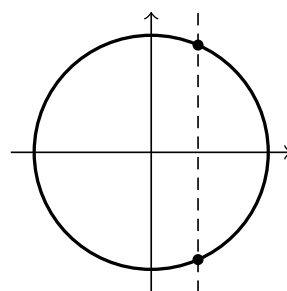
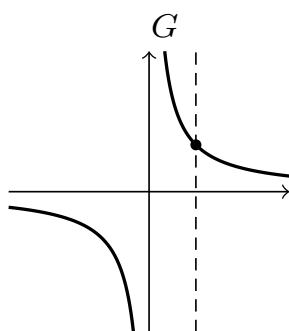
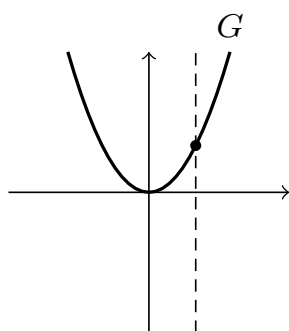
32

2.1 – Graphe de fonction

Définition : Une partie G du plan cartésien est un **graphe de fonction** si toute droite verticale coupe G en **au plus** un point.

Exemples : ci-dessous,

- une **parabole** est un graphe de fonction car toute droite verticale coupe G en exactement un point
- une **hyperbole** est aussi un graphe de fonction car toute droite verticale coupe G en exactement un point, sauf une (la droite d'abscisse $x = 0$ ici), qui ne coupe G en aucun point
- un cercle n'est pas un graphe de fonction car au moins une droite verticale le coupe en deux points.



33

Du graphe à la fonction

Définition : Soit G un graphe de fonction. La **fonction réelle** f que représente G est définie par

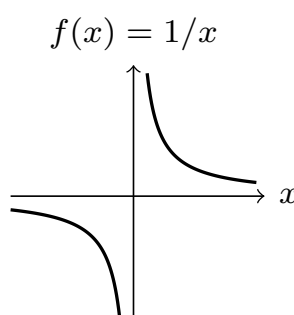
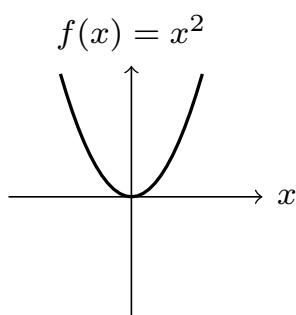
- son **domaine de définition** D_f , constitué des abscisses x de toutes les droites verticales qui coupent G
- une relation, notée $y = f(x)$, qui à chaque abscisse $x \in D_f$ associe l'ordonnée y du point d'intersection.

On note

$$f : \begin{cases} D_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = f(x) \end{cases}$$

Exemples :

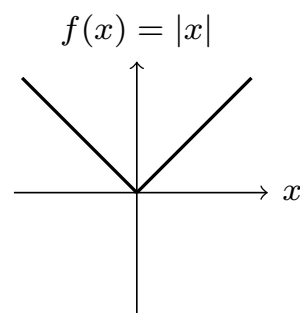
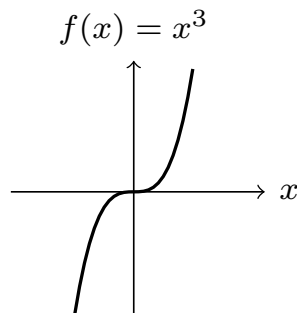
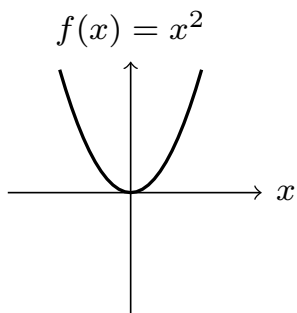
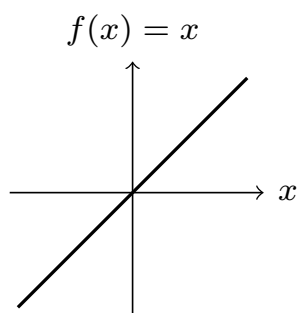
- la parabole représente la fonction carré, définie par $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^2$
- l'hyperbole représente la fonction inverse, définie par $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $f(x) = 1/x$



34

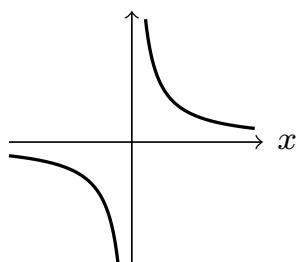
Graphes à connaître par cœur I

Fonctions dont le domaine est $\mathbb{R}$:

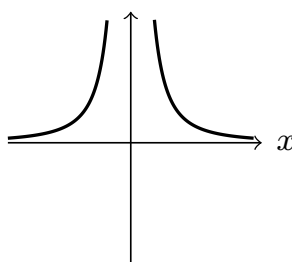


Fonctions dont le domaine n'est pas $\mathbb{R}$:

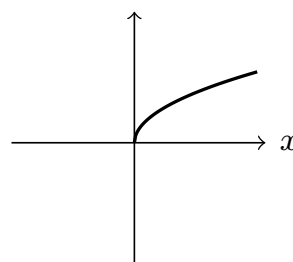
$f(x) = 1/x, D_f = \mathbb{R}^*$



$f(x) = 1/x^2, D_f = \mathbb{R}^*$



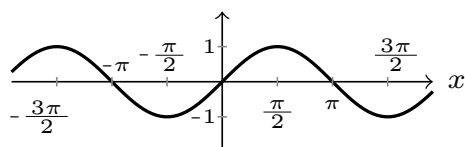
$f(x) = \sqrt{x}, D_f = \mathbb{R}_+$



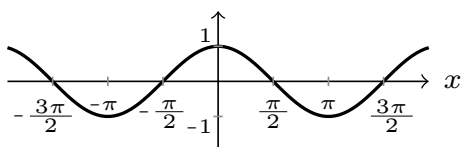
35

Graphes à connaître par cœur II

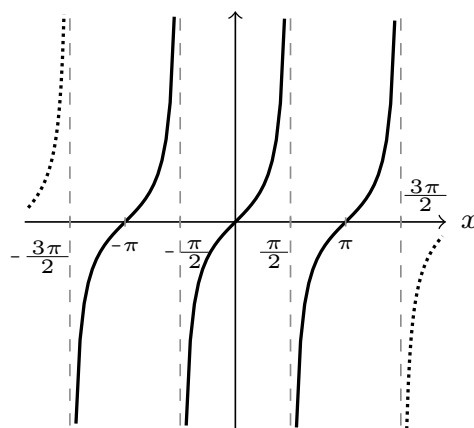
$\sin(x), D_{\sin} = \mathbb{R}$



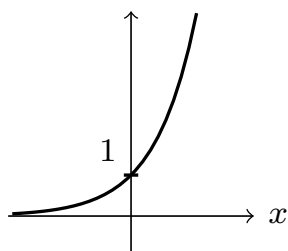
$\cos(x), D_{\cos} = \mathbb{R}$



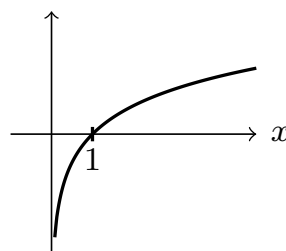
$\tan(x), D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$



$\exp(x), D_{\exp} = \mathbb{R}$



$\ln(x), D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$

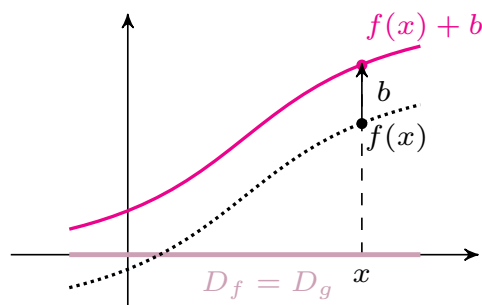


36

Opérations sur les graphes de fonctions 1 : translation verticale

Le graphe d'une fonction réelle f peut être :

- **translaté vers le haut** d'une distance $b > 0$, ce qui revient à prendre le graphe de la fonction g de domaine $D_g = D_f$ définie par $g(x) = f(x) + b$,



Remarque : prendre $b < 0$ revient à traduire le graphe vers le bas.

Exercice : Si on translate le graphe de la fonction $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ de deux unités vers le bas, quelle fonction g obtient-on ? Représenter les graphes de f et g .

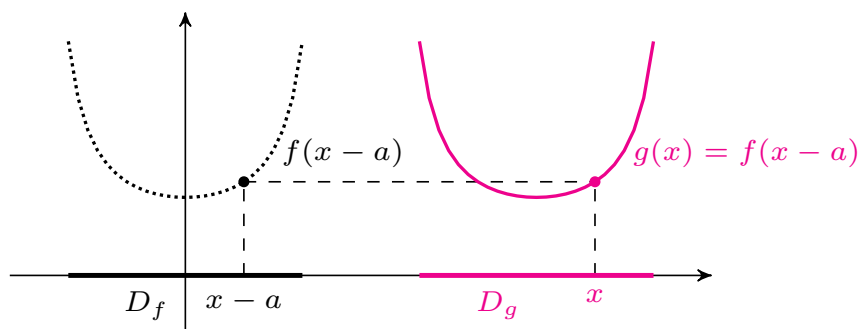
37

Opérations sur les graphes de fonctions 2 : translation horizontale

Le graphe d'une fonction réelle f peut être :

- **translaté à droite** d'une distance a , ce qui revient à traduire à droite D_f en un domaine³ $D_g = a + D_f$ puis à prendre le graphe de la fonction g définie sur D_g par $g(x) = f(x - a)$.

On commence par traduire le domaine puis on trouve l'ordonnée $g(x)$ en rappelant la valeur de f en $x - a$:



Exercice : Le graphe de la fonction $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g(x) = (x - 1)^{-2}$ est obtenu par translation d'une unité à droite d'une fonction f . Laquelle ?

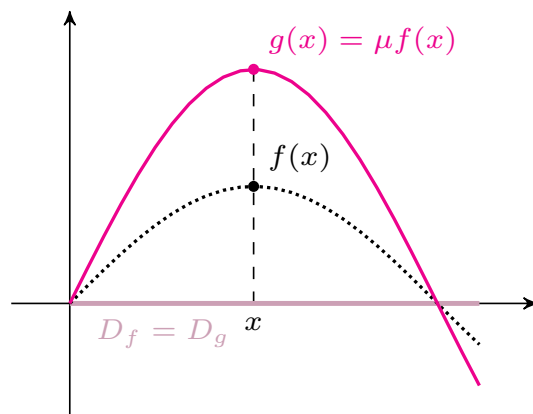
3. Si $a \in \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$, on note $a + E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + e, e \in E\}$

38

Opérations sur les graphes de fonctions 3 : dilatation verticale

Le graphe d'une fonction réelle f peut être :

- **dilaté verticalement** d'un facteur $\mu > 0$, ce qui revient à prendre le graphe de la fonction g de domaine $D_g = D_f$ définie par $g(x) = \mu f(x)$.



Nota : Sur ce dessin, $\mu > 1$.

Remarque : si $\mu > 1$, le graphe est étiré verticalement. Inversement, si $\mu \in]0, 1[$, le graphe est contracté.

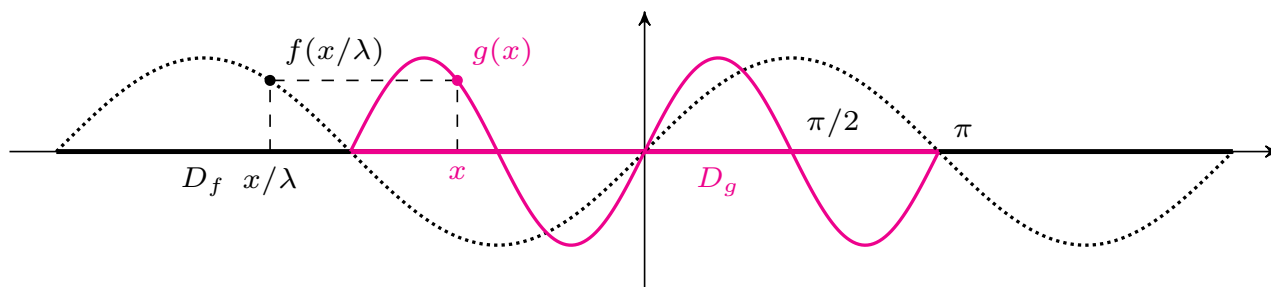
Exercice : Soit g la fonction dont le graphe est obtenu en dilatant verticalement celui de la fonction $D_f = [-1, 1]$, $f(x) = 2(1 - x^2)$ d'un facteur $\mu = 1/2$. Représenter les graphes de f et g , en commençant par les points d'abscisse $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$.

39

Opérations sur les graphes de fonctions 4 : dilatation horizontale

Le graphe d'une fonction réelle f peut être :

- **dilaté horizontalement** d'un facteur $\lambda > 0$, ce qui revient à dilater horizontalement D_f en un domaine⁴ $D_g = \lambda D_f$ puis à prendre le graphe de la fonction g définie sur D_g par $g(x) = f(x/\lambda)$.



Nota : Ci-dessus, le graphe de la fonction $\sin$ a été dilaté horizontalement d'un facteur $\lambda = 1/2$.

Remarque : si $\lambda > 1$, le graphe est étiré, si $\lambda \in]0, 1[$, le graphe est contracté.

Exercice : Le graphe de g est obtenu en dilatant celui de $f(x) = \cos(x)$, définie sur $D_f = \mathbb{R}$, d'un facteur $\lambda = 1/2$. Exprimer g puis représenter graphiquement f et g .

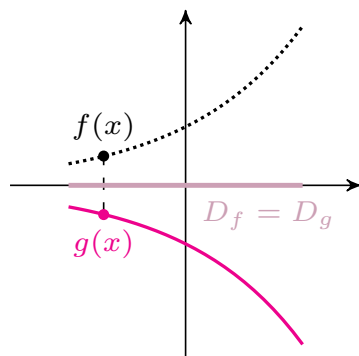
4. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $E \subset \mathbb{R}$, on note $\lambda E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \lambda e, e \in E\}$

40

Opérations sur les graphes de fonctions 5 : réflexion verticale

Le graphe d'une fonction réelle f peut être :

- **reflété par rapport à l'axe des abscisses**, ce qui revient à prendre le graphe de la fonction g de domaine $D_g = D_f$ définie par $g(x) = -f(x)$.



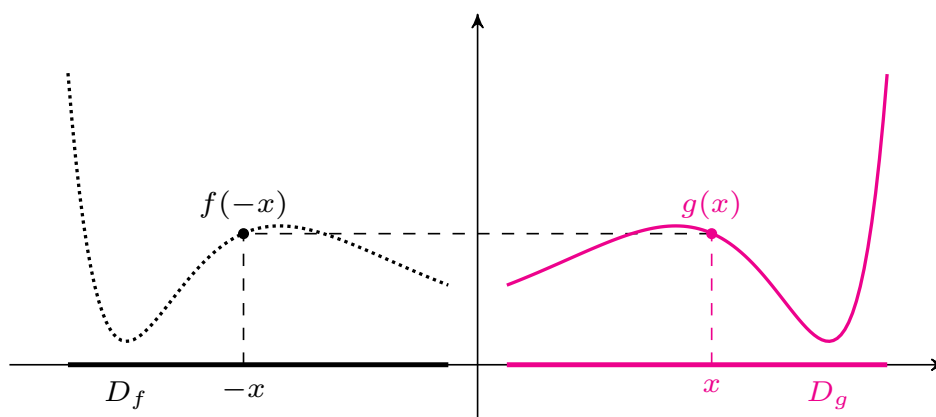
Exercice : Représenter graphiquement les fonctions $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$ et $D_g = \mathbb{R}$, $f(x) = -\cos(x + \pi)$. Que remarque-t-on ?

41

Opérations sur les graphes de fonctions 6 : réflexion horizontale

Le graphe d'une fonction réelle f peut être :

- **reflété par rapport à l'axe des ordonnées**, ce qui revient à refléter D_f par rapport à 0 en un domaine⁵ $D_g = -D_f$ puis à prendre le graphe de la fonction g définie sur D_g par $g(x) = f(-x)$.

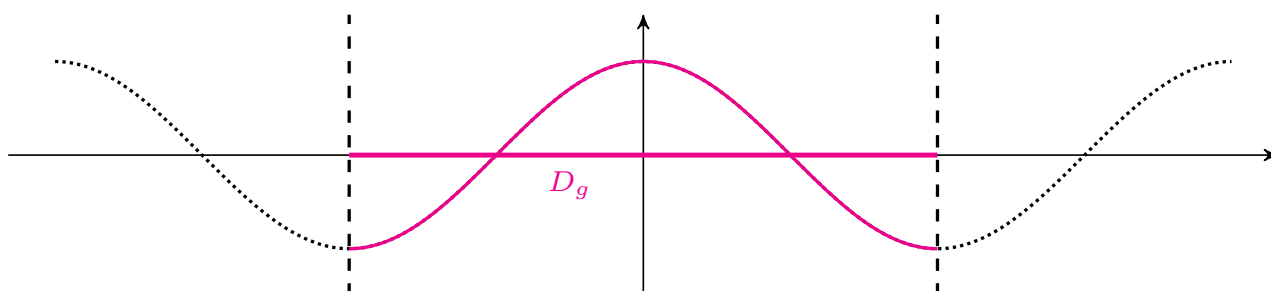


Exercice : Le graphe de g est obtenu par symétrie centrale (centrée à l'origine) de celui de $D_f = \mathbb{R}^*$, $f(x) = 1/x$. Exprimer g . Que remarque-t-on ?

5. Si $E \subset \mathbb{R}$, on note $-E = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in E\}$

42

- **restreint à une partie** $D \subset D_f$, ce qui revient à prendre le graphe de la fonction g de domaine $D_g = D$ définie par $g(x) = f(x)$. On note $f|_D = g$ **la restriction** de f à D .



Nota : Ici, la fonction $\cos$ est restreinte à l'intervalle $D = [-\pi, \pi]$.

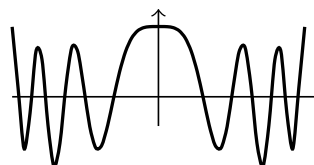
Remarque : L'opération de restriction est très utile. Par exemple, pour qu'une fonction admette une réciproque, elle doit être inversible. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut la restreindre à un sous-domaine où elle est inversible pour y définir une réciproque. C'est de cette manière qu'on construira les fonctions circulaires réciproques.

43

2.2 – De la fonction au graphe : les symétries

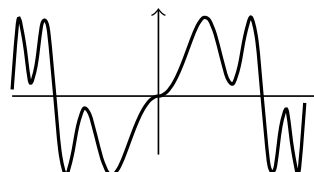
Définition : Soit f une fonction réelle.

- f est **paire** si son domaine est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.



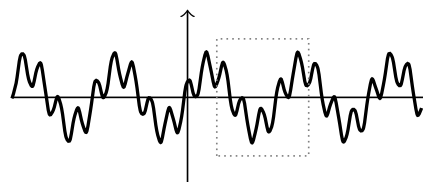
Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- f est **impaire** si son domaine est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$.



Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

- f est **périodique** de **période** $p \in \mathbb{R}$ si son domaine est invariant quand on le translate de p et si $f(x + p) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$



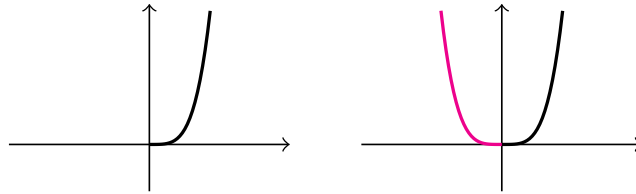
Le graphe d'une fonction périodique est invariant quand on le translate horizontalement de p .

Exemples :

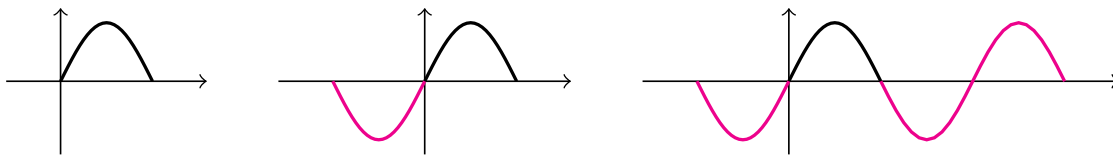
- Les monômes x^n et les fractions $\frac{1}{x^n}$ sont des fonctions paires si n est pair, et des fonctions impaires si n est impair.
- Les fonctions $\sin$ et $\tan$ sont impaires, $\cos$ est paire. Toutes les trois sont périodiques : $\sin$ et $\cos$ de période 2π , $\tan$ de période π .

44

Exemple 1 : La fonction puissance 4, définie par $D_f = \mathbb{R}$ et $f(x) = x^4$ est une fonction paire. Par symétrie, il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$ puis d'effectuer une réflexion du graphe par rapport à l'axe des ordonnées.



Exemple 2 : La fonction sin, définie sur $\mathbb{R}$ est impaire. Par symétrie, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. De plus, sin étant périodique de période de 2π , on restreint son étude à un intervalle de longueur π (par exemple $[0, \pi]$), puis on effectue une symétrie centrale du graphe par rapport à l'origine et des translations horizontales de longueur 2π .



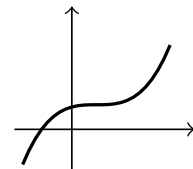
45

De la fonction au graphe : le sens de variation

Définition : Soit f une fonction réelle. On dit que :

- f est **croissante** si pour tout $x \in D_f$ et tout $x' \in D_f$

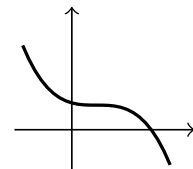
$$x \leq x' \implies f(x) \leq f(x')$$



f est **strictement croissante** si toutes ces inégalités sont strictes.

- f est **décroissante** si pour tout $x \in D_f$ et tout $x' \in D_f$

$$x \leq x' \implies f(x) \geq f(x')$$

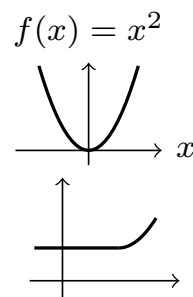


f est **strictement décroissante** si toutes ces inégalités sont strictes.

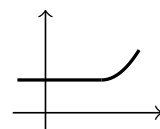
Remarques :

- De nombreuses fonctions ne sont ni croissantes, ni décroissantes. En revanche, leurs restrictions à certaines parties $D \subset D_f$ de leur domaine le sont.

Exemple : la fonction carré n'est ni croissante ni décroissante mais sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est croissante et sa restriction à $\mathbb{R}_-$ est décroissante.



- Une fonction peut être constante sur tout ou partie de son domaine :



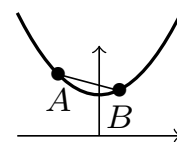
46

De la fonction au graphe : convexité, concavité

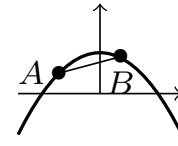
Définition : Soit f une fonction réelle, G son graphe.

On appelle **corde** tout segment $[AB]$ reliant deux points A et B du graphe.

- f est **convexe** si toute corde $[AB]$ est au dessus du graphe entre les abscisses des points A et B .

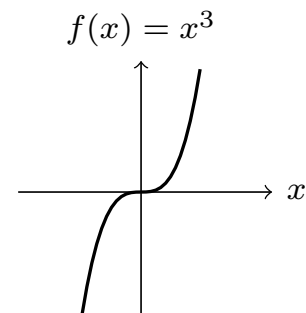


- f est **concave** si toute corde $[AB]$ est en dessous du graphe entre les abscisses des points A et B .



Remarque : De nombreuses fonctions ne sont ni convexes, ni concaves. En revanche, leurs restrictions à certaines parties $D \subset D_f$ de leur domaine le sont.

Exemple : la fonction $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ n'est ni convexe ni concave mais sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est convexe et sa restriction à $\mathbb{R}_-$ est concave.

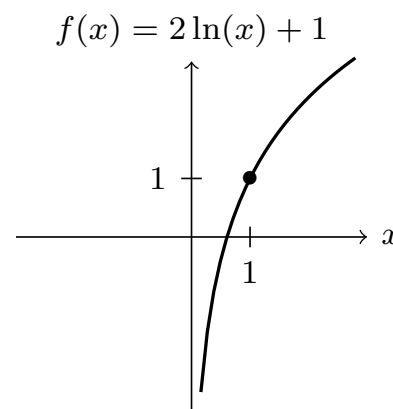
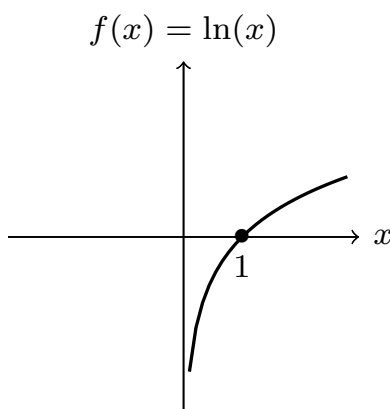


47

Exercice

Représenter et caractériser le graphe de la fonction définie par : $f(x) = 2 \ln x + 1$

Réponse : Le graphe de $f(x) = 2 \ln x + 1$ s'obtient en dilatant verticalement d'un facteur $\mu = 2$ le graphe de $x \mapsto \ln x$ et en le translatant vers le haut d'une distance $b = 1$:



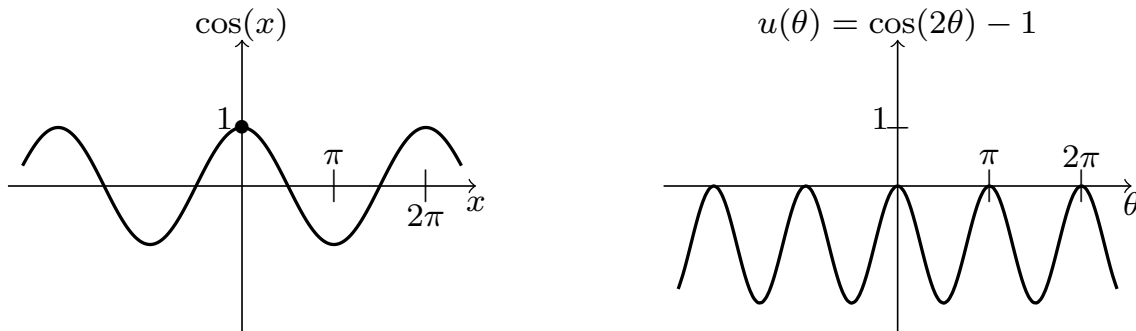
En particulier, f a pour domaine $D_f = \mathbb{R}_+^*$, f est croissante, concave et son graphe ne possède aucune symétrie particulière (la fonction n'est ni paire, ni impaire, ni périodique).

48

Exercice

Représenter et caractériser le graphe de la fonction définie par : $u(x) = \cos(2x) - 1$

Solution : Le graphe de $u(x) = \cos(2x) - 1$ s'obtient en dilatant horizontalement d'un facteur $\lambda = 1/2$ le graphe de la fonction $x \mapsto \cos x$ et en le translatant vers le bas d'une distance $b = 1$.



En particulier, u a pour domaine $D_u = \mathbb{R}$, u est paire et périodique de période $p = \pi$, car

$$\begin{aligned} u(x + \pi) &= \cos(2(x + \pi)) - 1 = \cos(2x + 2\pi) - 1 \\ &= \cos(2x) - 1 = u(x), \end{aligned}$$

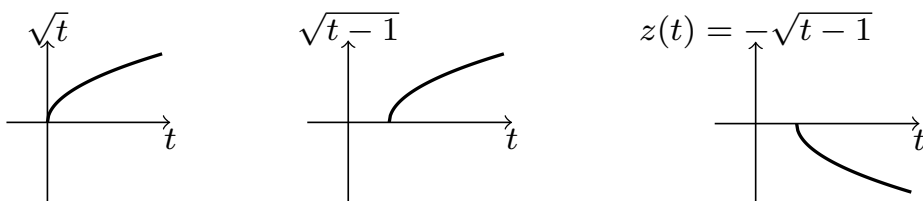
u n'est ni croissante, ni décroissante, ni convexe, ni concave.

49

Exercice

Représenter et caractériser le graphe de la fonction définie par : $z(t) = -\sqrt{t-1}$

Solution : Le graphe de z s'obtient en translatant à droite d'une distance $a = 1$ le graphe de la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ puis en le reflétant par rapport à l'axe des abscisses



En particulier, le domaine de la fonction z est $D_z = [1, +\infty[$, z est décroissante, convexe et son graphe ne possède aucune symétrie particulière.

50

2.3 Les fonctions usuelles

Dans cette section :

- Fonctions circulaires (ou trigonométriques)
- Polynômes
- Fractions rationnelles
- Exponentielle et logarithme
- Fonctions puissances
- Fonctions hyperboliques

51

Fonctions circulaires

- Rappel : Si $x \in \mathbb{R}$, $(\cos x, \sin x)$ sont les coordonnées cartésiennes du point $z = e^{ix}$.

- Les fonctions

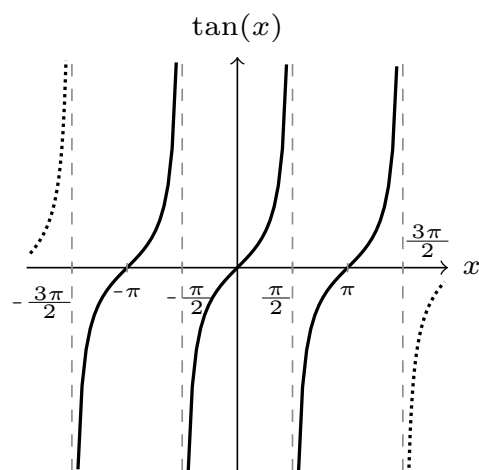
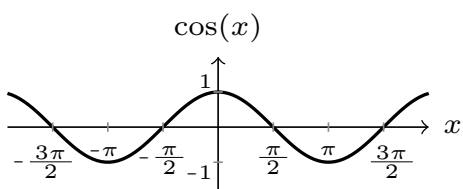
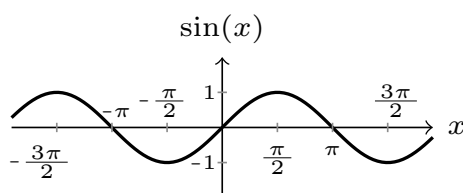
· **sinus**, qu'on note $\sin$ avec $D_{\sin} = \mathbb{R}$

· **cosinus**, qu'on note $\cos$ avec $D_{\cos} = \mathbb{R}$

· **tangente**, qu'on note $\tan$ et définie par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{avec} \quad D_{\tan} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

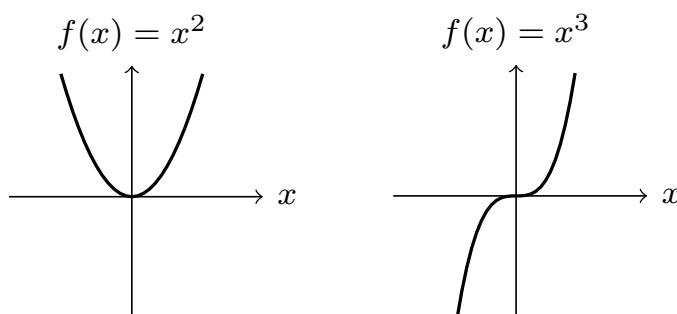
ont pour graphes :



52

Définition : un **monôme** est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$, où n est un entier naturel.

Exemples : les fonctions carré $f(x) = x^2$ et cube $g(x) = x^3$ ont pour domaine de définition $\mathbb{R}$ et pour graphes respectifs



Remarque : par convention, $x^0 = 1$ désigne le monôme constant égal à 1.

Définition : un **polynôme** est défini sur $\mathbb{R}$ par

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des constantes réelles. On dit aussi que p est une **combinaison linéaire** des monômes $1, x, \dots, x^n$.

Définition : Une **racine réelle** de p est un nombre réel x tel que $p(x) = 0$.

53

Fractions rationnelles

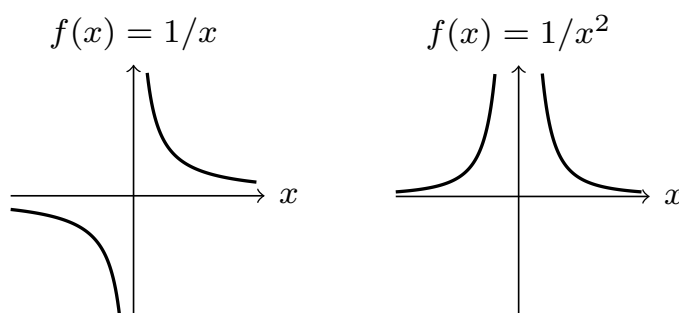
Définition : Soit p et q deux polynômes. Une **fraction rationnelle** est le quotient de deux polynômes p et q , définie par

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_k x^k}$$

pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $q(x) \neq 0$. Autrement dit, f n'est pas définie aux abscisses x qui sont des racines réelles de q .

Exemples :

- les fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ont pour domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et pour graphes respectifs



- La fonction $h(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 1}$ est aussi une fraction rationnelle, de domaine $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, puisque $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ a pour seules racines $x = -1$ et $x = 1$.

54

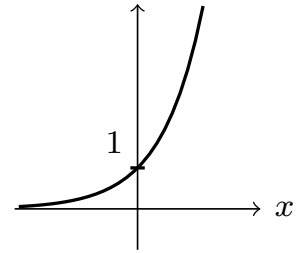
Fonctions exponentielle et logarithme

La fonction **exponentielle**, notée $\exp$ (ou simplement e^x), a les propriétés suivantes :

- $D_{\exp} = \mathbb{R}$
- $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $e^{a+b} = e^a e^b$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

En particulier, $e^0 = 1$ et $e^{-a} = 1/e^a$.

$\exp(x)$, $D_{\exp} = \mathbb{R}$

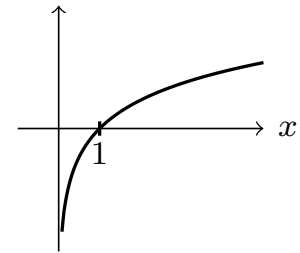


La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, a les propriétés suivantes :

- $D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(x) > 0 \iff x > 1$
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$

En particulier, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$.

$\ln(x)$, $D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$



Les fonctions exponentielle et logarithme sont liées au travers des relations suivantes :

$$e^{\ln x} = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \ln(e^x) = x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

55

Fonctions puissances

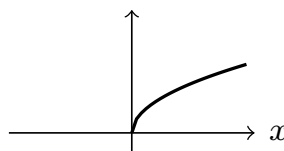
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction **puissance** α , notée $f(x) = x^\alpha$, est définie par

- $D_f = \mathbb{R}_+^*$
- $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) = e^{\alpha \ln x}$

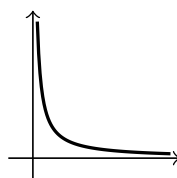
Exemples :

- Soit $\alpha = 1/2$ et $x > 0$. Par les propriétés de l'exponentielle, $x^{1/2} > 0$ et $(x^{1/2})^2 = x^1 = x$. Donc, $x^{1/2} = \sqrt{x}$ pour $x > 0$.

$$f(x) = \sqrt{x}$$



- Soit $\alpha = -1$ et $x > 0$. Par les propriétés de l'exponentielle, $x^{-1} = \frac{1}{x}$.



56

Fonctions hyperboliques

- La fonction **cosinus hyperbolique**, notée ch (ou $\cosh$), est définie par

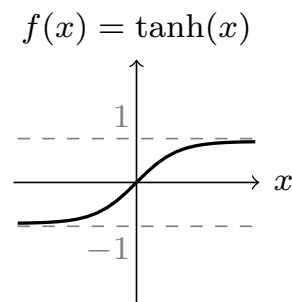
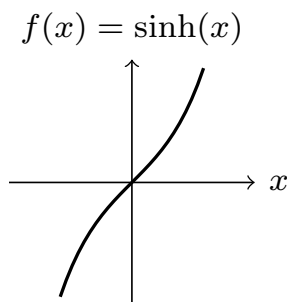
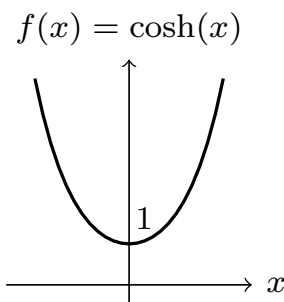
$$\boxed{\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{D_{\text{ch}} = \mathbb{R}}$$

- La fonction **sinus hyperbolique**, notée sh (ou $\sinh$), est définie par

$$\boxed{\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{D_{\text{sh}} = \mathbb{R}}$$

- La fonction **tangente hyperbolique**, notée th (ou $\tanh$), est définie par

$$\boxed{\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}} \quad \text{avec} \quad \boxed{D_{\text{th}} = \mathbb{R}}$$



Propriété : $\boxed{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Preuve : $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = (\text{ch } x + \text{sh } x)(\text{ch } x - \text{sh } x) = (e^x)(e^{-x}) = 1$.

57

2.4 Composition des fonctions et fonctions réciproques

Dans cette section :

- Composition de fonction
- Fonction inversible et fonction réciproque
- Fonctions circulaires réciproques

58

Composition de fonctions

Définition : La **composée** de deux fonctions réelles f et g est la fonction $g \circ f$ définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Son domaine est constitué des réels x du domaine de f tels que $f(x)$ appartient au domaine de g . Autrement dit, $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

On calcule $g \circ f(x)$ comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & (g \circ f)(x) & & \end{array}$$

On peut aussi introduire une variable de substitution : soit $y = f(x)$. Alors, $g \circ f(x) = g(y)$. En substituant la valeur de y , on retrouve $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemple : Soit f la fonction carré et g la fonction sinus. Posons $y = f(x) = x^2$. Alors,

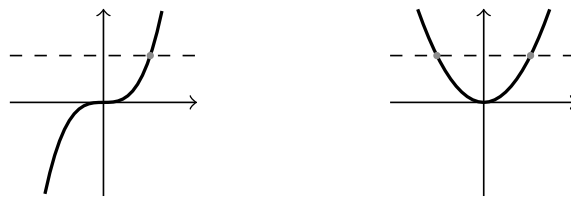
$$(g \circ f)(x) = g(y) = \sin y = \sin(x^2).$$

59

Fonctions inversibles

Définition : Une fonction réelle $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ est **inversible** si son graphe coupe toute droite horizontale en **au plus** un point.

Exemples : La fonction cube est inversible, la fonction carré ne l'est pas.



Nota : Remarquez l'analogie avec la définition de graphe de fonction !

Définition : On appelle **ensemble image** d'une fonction réelle $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, l'ensemble des **valeurs** de f , c'est-à-dire le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$I_f = f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

Remarque : Si une fonction réelle f prend toutes ses valeurs dans une partie $E \subset \mathbb{R}$, alors on peut la considérer comme une fonction définie sur D_f et à valeurs dans E et on note $f : D_f \rightarrow E$.

Proposition : $f : D_f \rightarrow I_f$ est inversible si et seulement si pour chaque $y \in I_f$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution $x \in D_f$, que l'on note $x = f^{-1}(y)$.

Exemple : La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est inversible. En effet, soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et résolvons l'équation $e^x = y$. Comme $y > 0$, on peut prendre le logarithme et obtenir l'équation équivalente $\ln(e^x) = \ln y$. Donc, $x = \ln y$ est l'unique solution cherchée.

Définition : Soit $f : D_f \rightarrow I_f$ une fonction inversible. La fonction $f^{-1} : I_f \rightarrow D_f$ est la **fonction réciproque** de f (en particulier, $D_{f^{-1}} = I_f$).

60

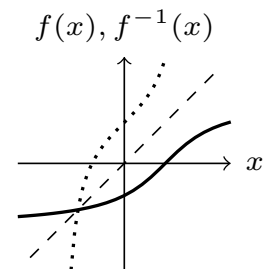
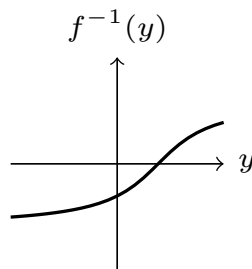
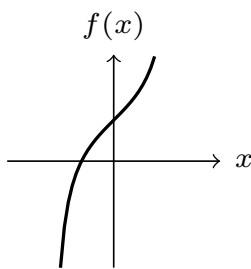
Propriétés fonctions des réciproques

Théorème : Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle. Si f est **strictement monotone** alors f est inversible.

Preuve : Si f n'est pas inversible, alors il existe une droite horizontale de hauteur y qui coupe le graphe de f en deux points distincts (x, y) et (x', y) avec $x < x'$. Comme $y = f(x) = f(x')$, f ne vérifie ni $x < x' \implies f(x) < f(x')$ ni $x < x' \implies f(x) > f(x')$. Par conséquent f n'est pas strictement monotone. Ce qui prouve le théorème par contraposition.

Propriétés :

- Si f est strictement monotone, alors sa réciproque f^{-1} est aussi strictement monotone et son graphe est obtenu par réflexion du graphe de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).



- La réciproque de la réciproque de f est f : $(f^{-1})^{-1} = f$.

61

Fonctions inversibles et composition

Proposition : Soit $f : D_f \rightarrow I_f$ une fonction inversible. Alors, pour tout $x \in D_f$ et tout $y \in D_{f^{-1}}$,

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

Exemple : La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction réciproque de la fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln y = x \iff y = e^x$

Proposition : Si f est inversible, alors pour tout $x \in D_f$ et tout $y \in D_{f^{-1}}$,

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1}(y) = y$$

Définition : La fonction **identité** de $\mathbb{R}$, notée id , est la fonction de domaine $D_{\text{id}} = \mathbb{R}$ définie par $\text{id}(x) = x$.

La proposition précédente se réécrit simplement à l'aide de la fonction identité.

Proposition : Si $f : D_f \rightarrow I_f$ est inversible, alors

$$f^{-1} \circ f = \text{id}|_{D_f} \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}|_{D_{f^{-1}}}$$

62

Exemples de fonctions inversibles

- On a vu (graphiquement) que la fonction cube était inversible. Par définition de la racine cubique, l'équation $x^3 = y$ admet pour solution $x = \sqrt[3]{y}$. Donc, $\sqrt[3]{\cdot}$ est la fonction inverse de la fonction cube.

- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3 + 1$ est inversible. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$. Alors,

$$y = x^3 + 1 \iff y - 1 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y - 1}$$

donc g est inversible et $g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y - 1}$ pour $y \in D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$.

- Procédons de même pour la fonction $h(x) = \frac{5}{x^3 + 1}$, définie sur $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

Etudions l'équation $\frac{5}{x^3 + 1} = y$. Si $x \neq -1$ et $y \neq 0$, alors

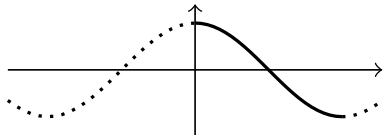
$$y = \frac{5}{x^3 + 1} \iff x^3 + 1 = \frac{5}{y} \iff x = \sqrt[3]{\frac{5}{y} - 1}.$$

Donc, h est inversible, $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}^*$ et $h^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{5}{y} - 1}$.

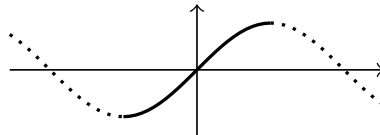
63

Fonctions circulaires réciproques

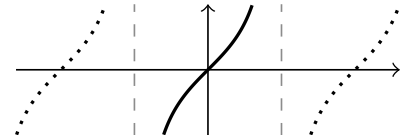
Les fonctions circulaires ne sont pas inversibles, mais opportunément restreintes elles le deviennent.



La fonction cosinus restreinte à $[0, \pi]$ est inversible



La fonction sinus restreinte à $[-\pi/2, \pi/2]$ est inversible



La fonction tangente restreinte à $] - \pi/2, \pi/2[$ est inversible

- On appelle **arccosinus** la fonction (notée $\arccos$) réciproque de $\cos|_{[0, \pi]}$. On a $D_{\arccos} = [-1, 1] = I_{\cos|_{[0, \pi]}}$

$$\text{Si } x \in [-1, 1] \text{ et } \underline{\theta \in [0, \pi]} : \quad \theta = \arccos x \iff x = \cos \theta$$

- On appelle **arcsinus** la fonction (notée $\arcsin$) réciproque de $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$. On a $D_{\arcsin} = [-1, 1] = I_{\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}}$

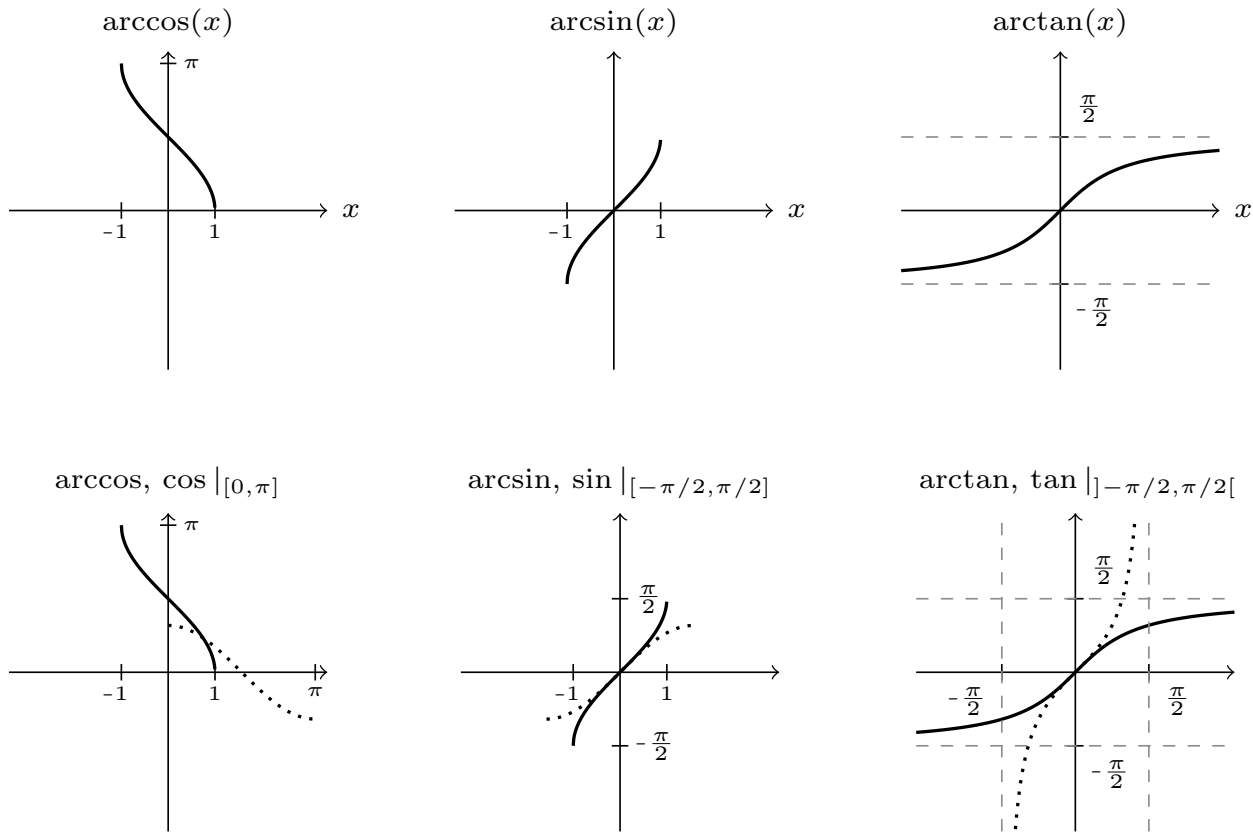
$$\text{Si } x \in [-1, 1] \text{ et } \underline{\theta \in [-\pi/2, \pi/2]} : \quad \theta = \arcsin x \iff x = \sin \theta$$

- On appelle **arctangente** la fonction (notée $\arctan$) réciproque de $\tan|_{]-\pi/2, \pi/2[}$. On a $D_{\arctan} = \mathbb{R} = I_{\tan|_{]-\pi/2, \pi/2[}}$

$$\text{Si } x \in \mathbb{R} \text{ et } \underline{\theta \in] - \pi/2, \pi/2[} : \quad \theta = \arctan x \iff x = \tan \theta$$

64

Graphes des fonctions arcsin, arccos et arctan à connaître par coeur



65

Exemples

Exercice : calculer $\arccos(1/2)$ et $\arcsin(\sin(9\pi/4))$.

Solution :

Rappelons que si $x \in [-1, 1]$ et si $\theta \in [0, \pi]$, $\theta = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos \theta$.

Donc, $\theta = \arccos(1/2)$ si $\theta \in [0, \pi]$ et $\cos \theta = 1/2$. On a donc $\boxed{\arccos(1/2) = \pi/3}$.

Rappelons que si $x \in [-1, 1]$ et si $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin \theta$.

Hélas, dans cet exercice $\theta = 9\pi/4 \notin [-\pi/2, \pi/2]$.

Mais, par périodicité, $\sin(9\pi/4) = \sin(\pi/4 + 2\pi) = \sin(\pi/4)$. Comme $\pi/4 \in [-\pi/2, \pi/2]$, par les propriétés des fonctions réciproques, on déduit que

$$\boxed{\arcsin(\sin(9\pi/4)) = \arcsin(\sin(\pi/4)) = \pi/4}.$$

66

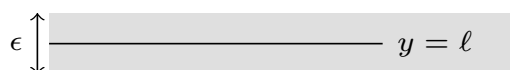
Dans ce chapitre :

- 3.1 Limites, relation de prépondérance
- 3.2 Fonctions continues, développements limités d'ordre 0.
- 3.3 Fonctions dérivables, développements limités d'ordre 1, dérivées d'ordre supérieur
- 3.4 Extrema locaux et points d'inflexion, points critiques
- 3.5 Développements limités d'ordre quelconque et approximation locale.

67

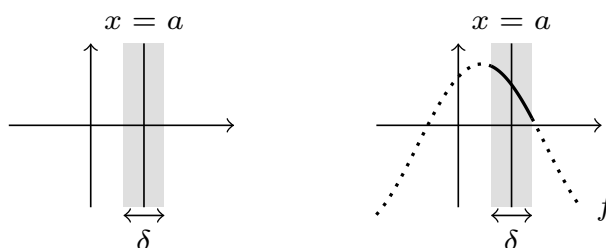
3.1a – Limites

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Voici une bande horizontale (de largeur ϵ) autour de $y = \ell$.



Plus ϵ est petit, plus la bande est étroite et plus on se rapproche de la valeur $y = \ell$.

- Voici une bande verticale (de largeur δ) autour de $x = a$ et un graphe de fonction restreint à une bande verticale autour de $x = a$.



Plus δ est petit, plus la bande est étroite et plus on se rapproche de la valeur $x = a$.

Définition : Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert contenant a (sauf éventuellement en a). On dit que f admet une **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ **lorsque** x **tend vers** a et on note

$$\boxed{\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell}$$

si toute bande horizontale autour de $y = \ell$ contient le graphe de f restreint à une bande verticale autour de $x = a$, privée de la droite $\{x = a\}$.

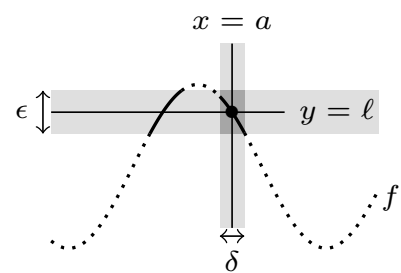
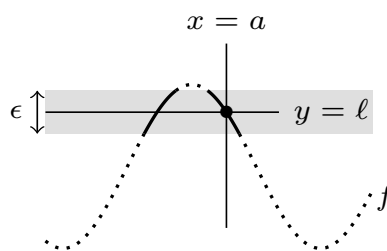
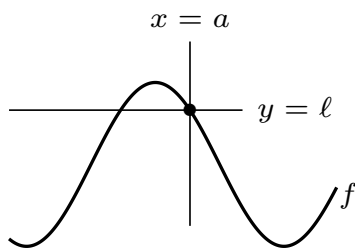
On écrit cela rigoureusement comme suit. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ (suffisamment petit) tel qu'on ait l'implication :

$$a - \delta < x < a + \delta \text{ et } x \neq a \quad \Rightarrow \quad \ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$$

68

Exemples

- La fonction représentée ci-dessous converge vers $\ell = f(a)$ lorsque x tend vers a :



- Calculer

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Lorsque x tend vers $a = 2$, $x^2 - 4$ tend vers 0 et $x - 2$ tend vers 0. Il semble ainsi délicat d'évaluer ℓ . Mais comme

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2,$$

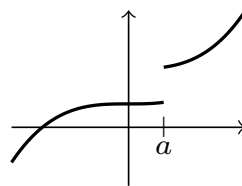
on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4.$$

69

Limite à gauche, limite à droite

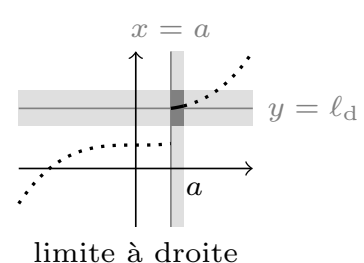
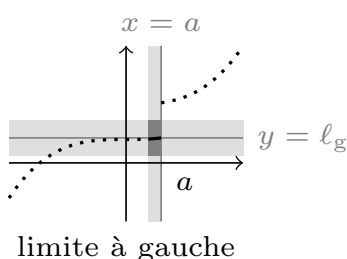
La fonction représentée ci-dessous n'admet pas de limite lorsque x tend vers a car pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, on peut trouver une bande horizontale autour de $y = \ell$ ne contenant aucune restriction du graphe de f à une bande verticale autour de $x = a$.



Par contre, cette fonction admet des limites à gauche et à droite en a .

Définition (limite à gauche, limite à droite) :

- f admet une limite ℓ_g à gauche quand x tend vers a par valeurs inférieures si toute bande horizontale autour de ℓ_g contient le graphe restreint à une demi-bande verticale à gauche de a , privée de la droite $\{x = a\}$. On note $\ell_g = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.
- f admet une limite ℓ_d à droite quand x tend vers a par valeurs supérieures si toute bande horizontale autour de ℓ_d contient le graphe restreint à une demi-bande verticale à droite de a , privée de la droite $\{x = a\}$. On note $\ell_d = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.



70

3.1b – Relation de prépondérance et notation de Landau

Définition (notation de Landau) : Soit f et g deux fonctions réelles. On dit que f est **négligeable** par rapport à g au voisinage du point a si on peut l'écrire sous la forme

$$f(x) = g(x)\epsilon(x),$$

où ϵ est une fonction réelle telle que $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$. On dit aussi que f est un petit o de g et on note

$$f = o(g), \quad \text{lorsque } x \rightarrow a.$$

Remarque : lorsque la fonction g ne s'annule pas autour de a (sauf éventuellement en a) alors

$$f = o(g), \quad \text{lorsque } x \rightarrow a. \quad \Leftrightarrow \quad f(x)/g(x) \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } x \rightarrow a.$$

En particulier, $\lim_{x \rightarrow a} o(g)/g = 0$.

Exemples :

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, on a $f(x) = o(1), \quad \text{lorsque } x \rightarrow a.$

En effet, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/1 = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tous entiers $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(x - a)^{m+n} = o((x - a)^n), \quad \text{lorsque } x \rightarrow a.$$

En effet, $(x - a)^{m+n}/(x - a)^n = (x - a)^m \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$ puisque $m > 0$.

En particulier, $x^2 = o(x)$, $-x^5 = o(x^3)$, $(x - 4)^7 = o((x - 4)^6)$, etc.

- Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}$, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha > \beta$,

$$(x - a)^\alpha = o((x - a)^\beta), \quad \text{lorsque } x \rightarrow a.$$

71

Notation de Landau : règles de calcul

Remarque importante : La notation de Landau $f = o(g)$ se lit toujours de gauche à droite. Ainsi, il est vrai que $o(x) = o(1)$ lorsque $x \rightarrow 0$, mais il est faux que $o(1) = o(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$. Par exemple, $x^2 = o(x) = o(1)$ mais $x = o(1) \neq o(x)$.

Règles de calcul :

- $f o(g) = o(fg)$
- $f = o(g)$ et $g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$
- $f = o(h)$ et $g = o(h) \Rightarrow f + g = o(h)$
- $f = o(h)$ et $g = o(k) \Rightarrow fg = o(hk)$

Exemples :

- $(x - a)^2 o((x - a)) = o((x - a)^3)$
- $o(x^6) = o(x)$
- $o(x^3) + o(x^4) = o(x^3)$
- $o((x - a)^2) o((x - a)^5) = o((x - a)^7)$

Remarque : Beaucoup d'ouvrages utilisent la notation "epsilon" ϵ à la place de la notation de Landau. Pas d'inquiétude, il suffit juste se souvenir de la définition des petits o pour passer d'une notation à l'autre.

72

3.2a – Fonctions continues

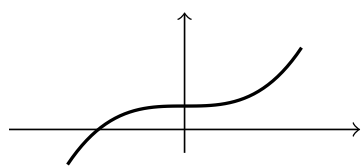
Définition – Soit f une fonction réelle et $a \in D_f$. On dit que

- f est continue au point $a \in D_f$ si

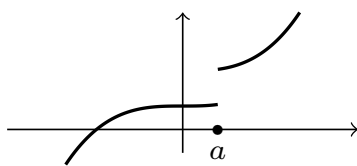
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

- f est continue si f est continue en tout point $a \in D_f$.
- f est continue à gauche (respectivement à droite) au point $a \in D_f$ si

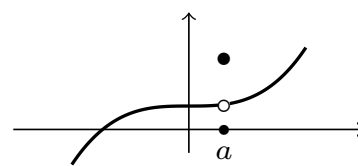
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad \left(\text{respectivement} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \right).$$



continue



non continue en a



non continue en a

73

3.2b – Développement limité d'ordre 0

Définition : Une fonction réelle f admet un **développement limité (DL) d'ordre 0 au point a** si on peut l'écrire sous la forme

$$f(x) = a_0 + o(1), \quad \text{avec} \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

Proposition : Soit f une fonction continue au point a . Alors, f admet un DL d'ordre 0 au point a :

$$f(x) = f(a) + o(1).$$

Preuve : On a $f(x) = f(a) + (f(x) - f(a))$. Or, comme f est continue, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ ce qui signifie que $f(x) - f(a) = o(1)$.

Remarque : pour x proche de a , $f(x)$ a pour valeur approchée $f(a)$ et pour erreur d'approximation associée $f(x) - f(a) = o(1)$:

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{\text{valeur approchée de } f(x)} + \underbrace{o(1)}_{\text{erreur d'approximation}}$$

Exemple :

$$\sqrt{1.1} = \underbrace{1}_{\text{valeur approchée de } \sqrt{1.1}} + \underbrace{(\sqrt{1.1} - 1)}_{\text{erreur d'approximation}}$$

74

3.3a – Fonctions dérivables

Motivation : Si $x(t)$ représente la position d'un point en mouvement sur une trajectoire rectiligne, par exemple un cycliste sur une route, la distance parcourue entre les temps t et t' est donnée par $d = x(t') - x(t)$ et sa vitesse moyenne par $v = \frac{d}{t' - t} = \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$. Sa vitesse instantanée à l'instant t , si elle existe, vaut donc

$$v(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}.$$

On note usuellement $v(t) = x'(t)$ ou $v(t) = \frac{dx}{dt}$ ou encore $v(t) = \dot{x}(t)$.

Définition : Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On appelle **nombre dérivé de f au point $a \in D_f$** la limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

si cette limite existe et appartient à $\mathbb{R}$. On dit alors que f **est dérivable en a** .

- On appelle alors **fonction dérivée** de f , la fonction

$$f' : D_{f'} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x),$$

où $D_{f'}$ est le **domaine de dérivabilité** de f , c'est-à-dire le sous-ensemble de D_f constitué des points où f est dérivable.

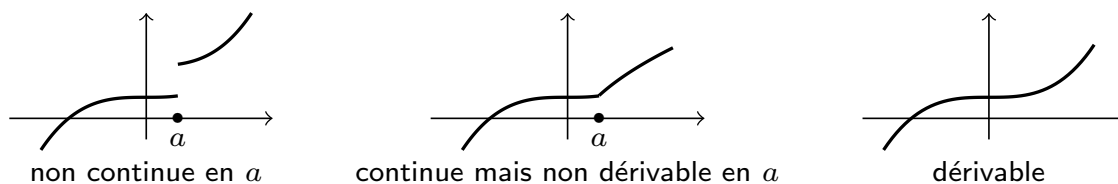
Proposition : Si f est dérivable au point a , alors f est continue au point a .

Preuve : $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \right) = f'(a) \cdot 0 = 0.$

75

Fonctions (non) dérivables

Remarque : Une fonction dérivable est continue, le contraire est faux. En effet, il y a des fonctions continues qui ne sont pas dérivables.



Exemples :

- La fonction racine carrée (définie sur $\mathbb{R}_+$) n'est pas dérivable en 0 mais elle l'est en tout point $a > 0$ car

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

- La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, par définition, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

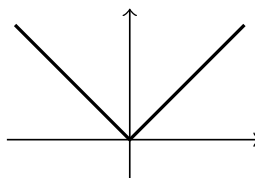
- $f(x) = 3x^2 + \sin(\sqrt{x^3 - 1}) + \ln(3x^2 + 1)$ est dérivable sur

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 > 0, 3x^2 + 1 > 0\} =]1, +\infty[.$$

- La fonction valeur absolue

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

n'est pas dérivable en 0.



76

3.3b – DL d'ordre 1

Définition : Une fonction réelle f admet un **développement limité (DL) d'ordre 1** au point a si on peut l'écrire sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + o(x - a), \quad \text{avec } a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

Proposition : Si f admet un DL d'ordre 1 en a , alors f admet un DL d'ordre 0 en a .

Preuve : En effet, $a_0 + a_1(x - a) + o(x - a) = a_0 + a_1 o(1) + o(1) = o(1)$, d'après les règles de calcul des petits o .

Proposition : Soit f une fonction dérivable au point a . Alors, f admet un DL d'ordre 1 au point a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$$

Preuve : Puisque f est dérivable en a , on a $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0$, ce qui signifie que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = o(1)$. Donc,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)o(1) \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \quad (\text{d'après les règles de calcul pour les petits } o) \end{aligned}$$

Supposons $f(a) \neq 0$ et $f'(a) \neq 0$. Lorsque x est proche de a , les termes du DL sont écrits par ordre de grandeur :

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{\text{terme dominant}} + \underbrace{f'(a)(x - a)}_{\text{correction, plus petite}} + \underbrace{o(x - a)}_{\text{erreur d'approximation, encore plus petite}}$$

valeur approchée de $f(x)$ erreur d'approximation

77

Exemple

La fonction racine carrée, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, car si $a > 0$,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

De manière équivalente,

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a) + o(x - a)$$

d'où (en prenant $x = 1.1$ et $a = 1$)

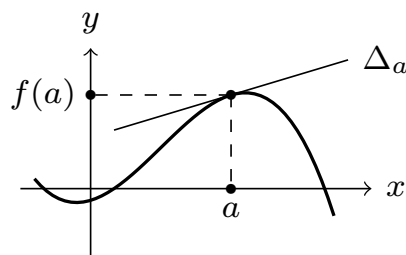
$$\begin{aligned} \sqrt{1.1} &= 1 + \frac{1}{2}(0.1) + (\sqrt{1.1} - (1 + \frac{1}{2}(0.1))) \\ &= \underbrace{1.05}_{\text{valeur approchée}} + \underbrace{(\sqrt{1.1} - 1.05)}_{\text{erreur}} \end{aligned}$$

Remarque : en posant $\epsilon(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a) + o(x - a)$, on voit que $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$. Donc, la fonction racine carrée est continue au point a .

78

Proposition : Si f est dérivable en a , alors son graphe admet une droite tangente Δ_a au point $(a, f(a))$, d'équation

$$\Delta_a : \boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$



Le nombre dérivée $f'(a)$ est le coefficient directeur de la droite tangente Δ_a

Théorème : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

- Si $f'(x) \geq 0$ (resp. > 0) pour tout $x \in I$, alors f est croissante (resp. strictement croissante).
- Si $f'(x) \leq 0$ (resp. < 0) pour tout $x \in I$, alors f est décroissante (resp. strictement décroissante).

79

Dérivée des fonctions usuelles (à connaître par coeur)

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Cas particuliers de $f(x) = x^\alpha$:

$(x^2)' = 2x$	$(x^3)' = 3x^2$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\frac{1}{x^2})' = -\frac{2}{x^3}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

80

Dérivée de la somme et du produit de fonctions

Proposition : Soit f et g deux fonctions dérivables et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ **règle de Leibniz**
- si $f(x) \neq 0$, on a $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$
- si $g(x) \neq 0$, on a $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Exemples :

- $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ $f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x \ln^2 x}$
- $h(t) = \frac{te^t}{t+1}$ $h'(t) = \frac{(e^t + te^t)(t+1) - te^t}{(t+1)^2} = \frac{(t^2 + t + 1)e^t}{(t+1)^2}$

81

Dérivée d'une fonction composée

Proposition (règle de la chaîne) : Soit f et g deux fonctions dérivables et $g \circ f$ leur composée, alors

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x).$$

Preuve : Calculons la limite du taux d'accroissement. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \right) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \\ &= g'(f(a)) f'(a). \quad (\text{car } f \text{ et } g \text{ sont dérivables}) \end{aligned}$$

En particulier :

$$(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f', \quad (e^f)' = e^f f', \quad (\ln f)' = \frac{f'}{f}, \quad (\sin f)' = (\cos f) f'$$

Exemples :

- $h(x) = (\ln x)^2$
Posons $f(x) = \ln x$. Alors, $h = f^2$. D'où, $h' = 2f f'$, c'est-à-dire $h'(x) = 2 \ln x \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$
- $k(x) = \ln(x^2)$
Posons $f(x) = x^2$. Alors, $k = \ln f$. D'où, $k' = f'/f$, c'est-à-dire $k'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

82

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

- $h(x) = \frac{1}{\ln x}$

Solution : $h = 1/u$, d'où $h' = -u'/u^2$ soit

$$h'(x) = -\frac{1/x}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

- $y(t) = t^3 \sin^3(t)$

Solution : On applique la règle du produit, puis $(u^3)' = 3u^2u'$, d'où

$$\begin{aligned} y'(t) &= 3t^2 \sin^3(t) + t^3 3 \sin^2(t) \cos(t) \\ &= 3t^2 \sin^2(t)(\sin(t) + t \cos(t)) \end{aligned}$$

83

Dérivées des fonctions réciproques

Proposition (dérivée de la réciproque d'une fonction) : Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction inversible. Si f est dérivable, alors sa fonction réciproque f^{-1} l'est aussi en tout point $x \in D_{f^{-1}}$ vérifiant $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ et on a

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}. \quad (*)$$

Preuve : En dérivant l'égalité $x = f \circ f^{-1}(x)$, on obtient (d'après la règle de la chaîne) :

$$1 = (f \circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x)) (f^{-1})'(x). \quad (**)$$

Si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, (*) suit, sinon (**) n'a pas de sens.

Exemples : dérivées des fonctions circulaires réciproques.

$$\boxed{\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Preuve : On démontre la troisième formule, les autres se démontrant de manière similaire. En prenant $f = \tan]-\pi/2, \pi/2[$ et $f^{-1} = \arctan$ dans (*), on obtient :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

84

Définition :

- Si f est dérivable et si f' est dérivable, on appelle **dérivée seconde** de f et on note f'' la dérivée de f' .
- Si f, f', f'' sont dérivables, on appelle **dérivée troisième** de f et on note $f^{(3)}$ la dérivée de f'' .
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit de même la **dérivée d'ordre n** de f , $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ en dérivant f successivement n fois.

Exemples :

- Soit $f(x) = x^3$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{pour } n \geq 4.$$

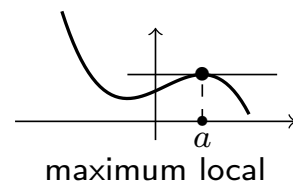
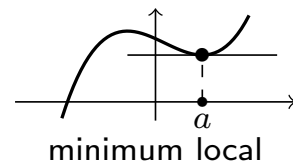
- La fonction $h(x) = x\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $h'(x) = (x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ mais h n'est pas deux fois dérivable en $x = 0$. Elle l'est en revanche pour $x > 0$ et $h''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$.

85

3.4a – Extrema locaux et points d'inflexion

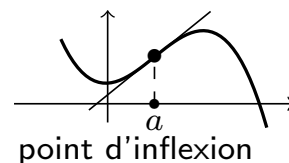
Définition : Soit f une fonction et $a \in D_f$. On dit que

- a est un **minimum local** de f si $f(x) \geq f(a)$ dans un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ autour de a .
- a est un **maximum local** de f si $f(x) \leq f(a)$ dans un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ autour de a .



L'ensemble des minima et maxima locaux est appelé l'ensemble des **extrema locaux**.

- a est un **point d'inflexion** de f si le graphe de f change de concavité au point a .



Proposition : Soit f une fonction dérivable (resp. deux fois dérivable) en $a \in D_f$.

- Si a est un extremum local de f , alors $f'(a) = 0$.
- Si a est un point d'inflexion de f , alors $f''(a) = 0$.

Remarque : Dans la proposition précédente, aucune des deux réciproques n'est vraie.

86

3.4b – Points critiques

Définition : Soit f une fonction dérivable. $a \in D_f$ est un **point critique** de f si

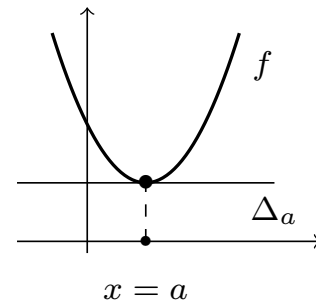
$$f'(a) = 0.$$

Dans ce cas, la tangente Δ_a est la droite horizontale d'équation $y = f(a)$.

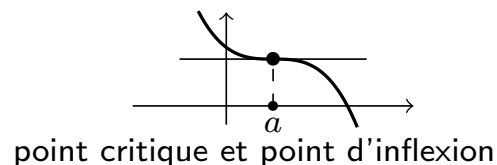
Exemple : Le graphe de la fonction $f(x) = (x-1)^2 + 1$ est une parabole. On a $f'(x) = 2(x-1)$, donc $a = 1$ est un point critique de f . La droite tangente Δ_a , qui a pour équation

$$y = 1 + 0(x-1) = 1,$$

est bien horizontale.



Remarque : Un point critique a peut n'être ni un minimum, ni un maximum. C'est le cas si a est un point d'inflexion.



Proposition : En un point d'inflexion a (critique ou non), le graphe de f traverse la droite tangente Δ_a .

87

Nature d'un point critique

Définition : Une fonction réelle f admet un **développement limité (DL) d'ordre 2 au point a** si on peut l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + (x-a)^2\epsilon(x) \\ &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2), \end{aligned}$$

où a_0, a_1, a_2 sont des constantes réelles et ϵ une fonction réelle telle $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$.

Théorème de Taylor-Young : Soit f une fonction deux fois dérivable au point a . Alors, f admet un DL d'ordre 2 au point a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

Corollaire : Soit f une fonction deux fois dérivable et a un point critique ($f'(a) = 0$). Alors,

- si $f''(a) > 0$, a est un minimum local.
De plus, f est convexe dans un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ autour de a .
- si $f''(a) < 0$, a est un maximum local.
De plus, f est concave dans un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ autour de a .
- si f'' change de signe au point a , a est un point d'inflexion.

Preuve partielle : Supposons que $f''(a) > 0$. On applique le DL d'ordre 2. Comme $f'(a) = 0$, on a pour x proche de a ,

$$f(x) - f(a) = \underbrace{\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{>0} + \underbrace{o((x-a)^2)}_{\text{de signe inconnu mais plus petit}}$$

88

Exercice

Trouver les points critiques de la fonction $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ et déterminer leur nature.

Solution : f est définie et dérivable sur $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$. Cherchons les points critiques :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}.$$

Donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 3$. Par conséquent, il y a deux points critiques : $x = 0$ et $x = 3$.

Pour connaître leurs natures, calculons la dérivée seconde. Puisque $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x(x-3) + x^2)(x-1)^3 - x^2(x-3)3(x-1)^2}{(x-1)^6} \\ &= \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - (3x^3 - 9x^2)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{(x-1)^4} \\ &= \frac{6x}{(x-1)^4}. \end{aligned}$$

Alors :

- En $x = 3$ on a $f''(3) = \frac{18}{2^4} > 0$, donc $x = 3$ est un minimum local.
- En $x = 0$ on a $f''(0) = 0$ et on ne peut, a priori, pas encore conclure. Mais, la formule pour f'' montre que cette dernière change de signe en $x = 0$, donc $x = 0$ est un point d'inflexion.

89

3.5 – DL d'ordre n

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}$. Une fonction réelle f admet un **développement limité (DL) d'ordre n au point a** si on peut l'écrire sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n), \quad \text{lorsque } x \rightarrow a$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes réelles.

Théorème de Taylor-Young : Soit f une fonction continue n fois dérivable au point a . Alors, f admet un DL d'ordre n au point a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Définition : $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ est appelé **polynôme de Taylor** de f d'ordre n au point a .

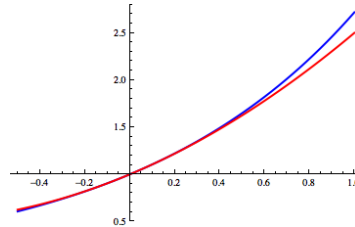
90

Exemple

Soit $f(x) = e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $a = 0$. Alors, f est dérivable autant de fois qu'on le souhaite et $f^{(n)}(x) = e^x$. Donc,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Voici les graphes de $f(x) = e^x$ (en bleu) et de son polynôme de Taylor d'ordre 2, $P(x) = 1 + x + x^2/2$ (en rouge).



Rappelons-nous que le théorème de Taylor-Young est pertinent pour x proche de $a = 0$. On constate en effet que l'erreur d'approximation $o((x-a)^2)$ est bien meilleure en $x = 0.1$ qu'en $x = 1$:

$$f(1) - P(1) = e - (1 + 1 + 1/2) \simeq -0.83$$

$$f(0.1) - P(0.1) = e^{0.1} - (1 + 0.1 + 0.01/2) \simeq -0.0018$$

91

Exercice

Déterminer les DL à l'ordre 2 de la fonction

$$f(x) = \frac{4-x}{2+x}$$

aux points $a = 0$ et $b = 1$.

Solution : Calculons les deux premières dérivées de f :

$$f'(x) = \frac{-(2+x) - (4-x)}{(2+x)^2} = -\frac{6}{(2+x)^2}$$

$$f''(x) = (-6) \frac{-2(2+x)}{(2+x)^4} = \frac{12}{(2+x)^3}$$

- En $a = 0$:

$$f(0) = \frac{4}{2} = 2, \quad f'(0) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}, \quad f''(0) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2},$$

$$\text{donc } \frac{4-x}{2+x} = 2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2 + o(x^2), \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$

- En $b = 1$:

$$f(1) = \frac{3}{3} = 1, \quad f'(1) = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}, \quad f''(1) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9},$$

$$\text{donc } \frac{4-x}{2+x} = 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 + o((x-1)^2), \quad \text{lorsque } x \rightarrow 1.$$

92

Théorème de Taylor-Lagrange : Soit $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction dérivable n fois sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois $]a, b[$. Alors, pour tout $x \in]a, b]$, il existe $c \in]a, x]$ tel que

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{valeur approchée de } f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{erreur d'approximation}}$$

En particulier, si $|f^{(n+1)}|$ est bornée par une constante M , l'erreur d'approximation vérifie l'estimation suivante

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1},$$

où $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ est le polynôme de Taylor de f .

93

Exercice

- Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a

$$1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

Solution : Puisque $\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{1+x} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$, on sait, par la formule de Taylor-Lagrange, que pour tout $x \geq 0$ il existe un c compris entre 0 et x tel que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(1+c)^{n+1}} x^{n+1}.$$

Puisque $0 \leq c \leq x$, on a $c+1 \geq 1$. Donc, pour $n = 3$ on a $(-1)^3 \frac{1}{(1+c)^4} \geq -1$ et donc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \frac{1}{(1+c)^4} x^3 \geq 1 - x + x^2 - x^3.$$

Et pour $n = 4$ on a $(-1)^4 \frac{1}{(1+c)^5} \leq 1$, donc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{1}{(1+c)^5} x^4 \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

94

Exercice (suite)

- Pour quelles valeurs de $x \geq 0$ peut-on dire que $1 - x + x^2 - x^3$ est une approximation de $\frac{1}{1+x}$ à 10^{-4} près, c'est-à-dire telle que

$$\left| \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3) \right| \leq 10^{-4} \quad ?$$

Solution : Des inégalités

$$1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1-x} \leq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$$

on déduit que

$$0 \leq \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3) \leq x^4.$$

Il suit alors que

$$\left| \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3) \right| \leq 10^{-4}$$

si on prend $x \leq 10^{-1}$, car dans ce cas on a bien $x^4 \leq 10^{-4}$.

95

TMB – Chapitre 4 Intégrales

Dans ce chapitre :

- 4.1 Intégrale de Riemann
- 4.2 Primitives, théorème fondamental de l'analyse
- 4.3 Calcul des intégrales et des primitives : intégration par parties (IPP)
- 4.4 Calcul des intégrales et des primitives : changement de variable
- 4.5 Calcul des intégrales et des primitives : fractions rationnelles, fractions en sin et cos

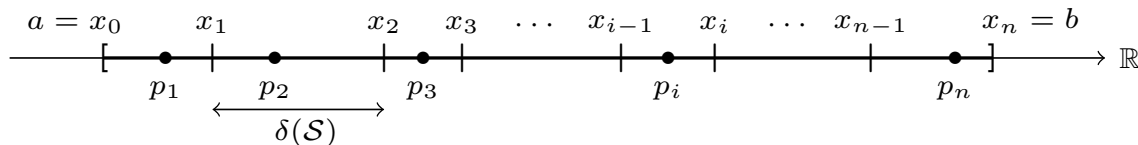
96

4.1 – Intégrale simple de Riemann

Définition : On appelle **subdivision** de $[a, b]$ un ensemble fini de points $\mathcal{S} = \{x_0, \dots, x_n\}$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

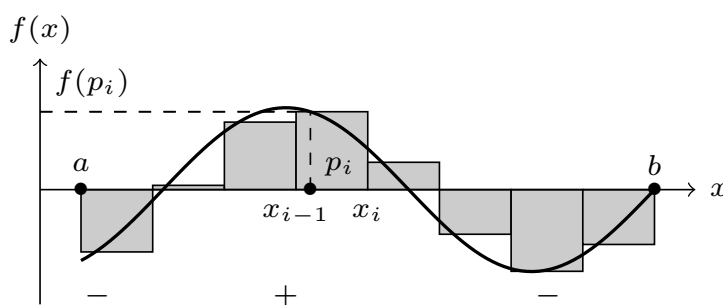
Le **pas** $\delta(\mathcal{S})$ de la subdivision est le plus grand des nombres $x_i - x_{i-1}$ où $i \in \{1, \dots, n\}$.



- Pour tout choix de n points $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$, on appelle **somme de Riemann de f** le nombre

$$R(f; \mathcal{S}; \{p_i\}) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(p_i)$$

- Dans cette somme, chaque terme $(x_i - x_{i-1}) f(p_i)$ représente l'aire algébrique du rectangle de base $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteur $f(p_i)$.



97

Intégrale simple de Riemann

Théorème : Si la limite $\lim_{\delta(\mathcal{S}) \rightarrow 0} R(f; \mathcal{S}; \{p_i\})$ existe alors elle est indépendante du choix des points p_i , on la note

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\delta(\mathcal{S}) \rightarrow 0} R(f; \mathcal{S}; \{p_i\})$$

Définition : Lorsqu'elle existe et qu'elle est finie, on appelle cette limite l'**intégrale (de Riemann) de f sur $[a, b]$** et on dit que f est **intégrable au sens de Riemann**.

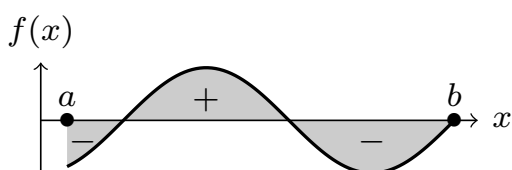
Proposition :

- Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann.
- Toute fonction monotone sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann.

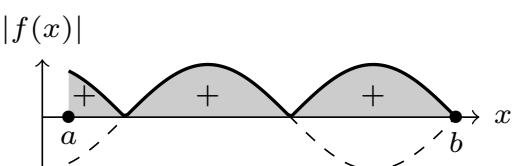
98

Signification géométrique de l'intégrale simple

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. La limite $\int_a^b f(x)dx$ s'interprète comme l'**aire algébrique** de la portion du plan comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

- $\int_a^b f(x)dx$: aire algébrique sous le graphe de f


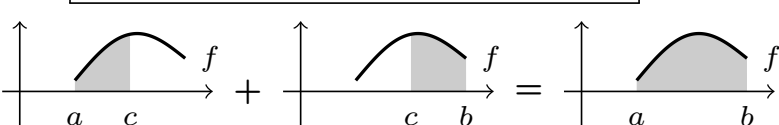
L'**aire algébrique** est obtenue en faisant la somme algébrique de chacune des portions d'aire comprises entre le graphe de f et l'axe des abscisses : on ajoute les aires au dessus de l'axe des abscisses, auxquelles on retranche celles qui sont en dessous.

- $\int_a^b |f(x)|dx$: aire sous le graphe de $|f|$


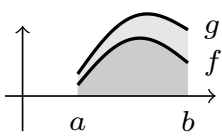
99

Propriétés des aires algébriques

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et $c \in [a, b]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Relation de Chasles :** $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$


Notation : Pour que la relation de Chasles soit vérifiée quelles que soient les positions relatives des abscisses a, b, c , on définit : $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$.

- Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$:** $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$


- Principe de linéarité :** $\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$

Exemple : $\int_0^1 (3 \cos x + 5 \sin x)dx = 3 \int_0^1 \cos x dx + 5 \int_0^1 \sin x dx$

4.2a – Primitives

Définition : On dit que $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une **primitive** de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si F est dérivable et que pour tout $x \in [a, b]$, on a $F'(x) = f(x)$.

On note $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$ (avec $C \in \mathbb{R}$) pour dire que F est une primitive de f .

Proposition : Si F et $\tilde{F}$ sont deux primitives de f sur $[a, b]$, alors il existe une constante réelle C telle que $\tilde{F} = F + C$

Preuve : On a $(\tilde{F} - F)' = \tilde{F}' - F' = f - f = 0$ sur $[a, b]$. Donc, $\tilde{F} - F$ est constante.

Exemples à connaître : Ci-dessous, $\alpha \neq -1$ et $C \in \mathbb{R}$.

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$	$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

101

4.2b – Théorème fondamental de l'analyse

Théorème : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

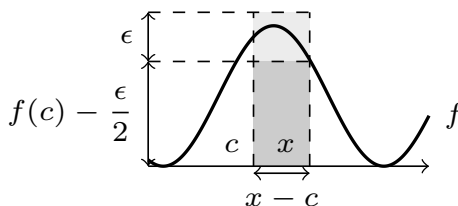
- f admet une primitive F sur l'intervalle $[a, b]$. Pour $x \in [a, b]$, $F(x)$ est l'aire algébrique sous le graphe de f entre les abscisses a et x , c'est-à-dire

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

- Réciproquement, si F est une primitive de f , alors l'aire algébrique sous le graphe de f entre les droites verticales d'abscisses a et b est donnée par

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Preuve : Soit $c \in [a, b]$ et x un point proche de c . Par la relation de Chasles, $F(x) - F(c) = \int_c^x f(t)dt$ est l'aire comprise entre c et x . Comme f est continue au point c , toute bande horizontale autour de $f(c)$ contient la restriction du graphe de f à une bande verticale.



Pour x proche c , l'aire $\int_c^x f(t)dt$ est ainsi comprise entre les aires de deux rectangles $[f(c) - \epsilon/2](x - c)$ et $[f(c) + \epsilon/2](x - c)$. D'où, $f(c) - \epsilon/2 \leq \frac{F(x) - F(c)}{x - c} \leq f(c) + \epsilon/2$ et donc

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$. Enfin, par définition de F , $F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

- Notation :** On note $\boxed{[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)}$

102

4.3 – Technique pour calculer une intégrale I : intégration par parties

Proposition (intégration par parties (IPP)) : Soient f et g deux fonctions dérivables, dont les dérivées sont continues sur $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Preuve : Il ne s'agit que de la version intégrale de la formule de dérivation d'un produit. La fonction fg est dérivable car f et g le sont et $(fg)' = f'g + fg'$. En intégrant cette égalité entre a et b et en utilisant le principe de linéarité, on obtient d'une part

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = (fg)(b) - (fg)(a) = [f(x)g(x)]_a^b,$$

et d'autre part

$$\int_a^b (f'g + fg')(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

d'où le résultat annoncé.

Exemple : Calculer l'aire algébrique sous la courbe de $f(x) = x \cos x$ entre $a = 0$ et $b = \pi$.
On pose

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g'(x) = \cos x,$$

avec

$$f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sin x.$$

On a alors :

$$\int_0^\pi x \cos x dx = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx = [x \sin x + \cos x]_0^\pi = -1 - 1 = -2$$

103

Intégration par parties : application au calcul de primitives

- Calculer $\int x \cos x dx$. On pose

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g'(x) = \cos x.$$

Alors, $f(x) = x$ est dérivable et $g'(x) = \cos x$ est la dérivée d'une fonction :

$$f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \sin x.$$

D'où

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Calculer $\int \cos^2 x dx$. On pose $f(x) = \cos x$ et $g'(x) = \cos x$. Alors, $f'(x) = -\sin x$ et $g(x) = \sin x$. Donc

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Puisque $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, on obtient

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx + C_1 \\ &= \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x dx + C_1 \\ &= \sin x \cos x + x + C_2 - \int \cos^2 x dx + C_1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il suit que $2 \int \cos^2 x dx = x + \sin x \cos x + C_1 + C_2$ et par conséquent, en posant $C = (C_1 + C_2)/2$,

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

104

4.4 – Techniques pour calculer une intégrale II : changement de variable

Proposition : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : [c, d] \rightarrow I$ une fonction dérivable, dont la dérivée est une fonction continue. Alors,

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx,$$

et poser $x = g(t)$ ($t \in [c, d]$) s'appelle faire un changement de variable.

Preuve : Le résultat se déduit de la formule de dérivation d'une fonction composée et du théorème fondamental de l'analyse. Soit F une primitive de f (c'est-à-dire $F' = f$) qui existe puisque f est continue. En intégrant entre c et d l'égalité $F'(g(t))g'(t) = (F \circ g)'(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_c^d F'(g(t))g'(t)dt &= \int_c^d (F \circ g)'(t)dt \\ &= (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) \quad (\text{d'après le théorème fondamental de l'analyse}) \\ &= F(g(d)) - F(g(c)) \\ &= \int_{g(c)}^{g(d)} F'(x)dx \quad (\text{d'après le théorème fondamental de l'analyse}) \end{aligned}$$

Ceci prouve le résultat puisque $F' = f$.

105

Le changement de variable en pratique : calcul d'intégrale

Dans la pratique, on effectue un changement de variable pour calculer $\int_a^b f(x)dx$ quand on ne reconnaît pas immédiatement la forme (normalement plus simple) $\int_c^d f(g(t))g'(t)dt$.

Il est alors commode de retenir le résultat précédent (dans le cas où g est inversible), en introduisant l'algorithme suivant.

- On pose une nouvelle variable $t = h(x)$
- On calcule les nouvelles bornes d'intégration : $c = h(a)$, $d = h(b)$
- On inverse la fonction $h : x = g(t)$ si c'est possible
- Le plus souvent, on note $dx = g'(t)dt$, de sorte que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt;$$

plus rarement on joue avec l'expression $dt = h'(x)dx$

Exemple : Déterminer l'aire sous la courbe de $f(x) = \sqrt{x+1}$ entre les abscisses $a = 0$ et $b = 1$.

Pour calculer $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx$, on pose $t = \sqrt{x+1}$. Alors, $t = 1$ quand $x = 0$ et $t = \sqrt{2}$ quand $x = 1$. De plus, $x = t^2 - 1$, donc $dx = 2t dt$ et par conséquent

$$\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \int_1^{\sqrt{2}} 2t^2 dt = \left[\frac{2}{3}t^3 \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

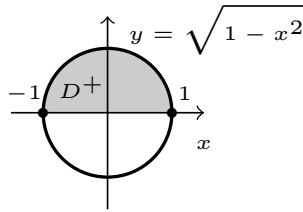
106

Changement de variables - exemple calcul d'aire

Exercice : Calculer l'aire du disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solution :

$$\text{Aire}(D) = 2 \text{Aire}(D^+) = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$



- Posons $t = \arcsin(x)$.
- Les nouvelles bornes d'intégration sont : $\arcsin(-1) = -\pi/2$ et $\arcsin(1) = \pi/2$.
- $x = \sin(t)$ et donc $dx = \cos(t)dt$.

Finalement,

$$\begin{aligned} \text{Aire}(D) &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + \cos(2t) dt = \left[t + \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= (\pi/2 + 0 + \pi/2 - 0) = \pi. \end{aligned}$$

107

Le changement de variable en pratique : calcul de primitive

Dans la pratique, on effectue un changement de variable pour calculer une primitive lorsqu'on est confronté aux mêmes difficultés que pour le calcul d'une intégrale : on doit calculer $\int f(x)dx$ mais on ne reconnaît pas la forme (normalement plus simple) $\int f(g(t))g'(t)dt$ qu'elle cache.

Dans ce cas, il est commode de retenir la méthode en introduisant l'algorithme suivant.

- On pose une nouvelle variable $t = h(x)$
- On inverse la fonction $h : x = g(t)$
- On note $dx = g'(t)dt$, de sorte que $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt \Big|_{t=h(x)}$
- On calcule une primitive φ de $(f \circ g)g'$ et on remplace t par sa valeur :

$$\int f(x)dx = (\varphi(t) + C) \Big|_{t=h(x)} = \varphi(h(x)) + C$$

Exemple : Pour calculer la primitive $\int \sqrt{x+1}dx$, on pose

$$t = \sqrt{x+1} \quad \text{donc} \quad x = t^2 - 1, \quad dx = 2t dt$$

et par conséquent

$$\int \sqrt{x+1}dx = \int 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C \Big|_{t=\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

108

Calculer la primitive $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

- Soit $g(x) = \ln x$. Alors, $\ln^2 x = g(x)^2$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$ et

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int g(x)^2 g'(x) dx = \frac{1}{3} \ln^3 x + C.$$

Question : quelle était la fonction f utilisée dans cet exemple ?

- Ici, on a reconnu immédiatement la forme $\int F' \circ g(x)g'(x)dx$ (pour quelle F , d'ailleurs?)
Si on ne s'en était pas aperçu, on aurait pu poser

$$t = \ln(x) \quad \text{donc} \quad x = e^t, \quad dx = e^t dt$$

et obtenir

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{(\ln(e^t))^2}{e^t} e^t dt \Big|_{t=\ln(x)} = t^2 dt \Big|_{t=\ln(x)} = \frac{t^3}{3} + C \Big|_{t=\ln(x)} = \frac{\ln^3(x)}{3} + C.$$

4.5 – Fractions rationnelles

Rappel : Un polynôme réel s'écrit comme une combinaison linéaire de monômes :

$$P = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

De même, toute fraction rationnelle (c'est-à-dire toute fraction de deux polynômes réels $F = P/Q$) est une combinaison linéaire d'objets plus simples, que nous commençons par décrire.

Théorème (division euclidienne des polynômes) : Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle. Il existe un unique polynôme E et un unique polynôme R tels que

$$F = E + \frac{R}{Q}, \quad \text{et} \quad \deg R < \deg Q.$$

Le polynôme E , quotient de la division euclidienne de P par Q , est appelé la **partie entière** de F . Le polynôme R est égal au reste de la division euclidienne de P par Q .

Exemple : montrons que la fraction rationnelle $F = P/Q = (1 + 6x^2 + 4x^3)/(2x - 1)$ a pour partie entière $E = 2x^2 + 4x + 2$. En ayant pris soin d'écrire les polynômes P et Q suivant les puissances décroissantes, la division euclidienne de P par Q s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 6x^2 \\ - 4x^3 + 2x^2 \\ \hline 8x^2 \\ - 8x^2 + 4x \\ \hline 4x + 1 \\ - 4x + 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

Ainsi, $E = 2x^2 + 4x + 2$ et $R = 3$ de sorte que $\frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{2x - 1} = (2x^2 + 4x + 2) + \frac{3}{2x - 1}$.

Éléments simples de première espèce

Définition : Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle et a une racine réelle de Q de multiplicité n . Les **éléments simples de première espèce** associés sont les fractions rationnelles

$$\frac{A_1}{x-a}, \quad \frac{A_2}{(x-a)^2}, \quad \dots, \quad \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

où $A_1, \dots, A_n$ sont des constantes réelles.

Exemple : Soit

$$F = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$$

Comme $Q = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$, on obtient

$$F = \frac{x^2 + x + 1}{x(x-1)^2}$$

Les racines de Q sont $a_1 = 0$, de multiplicité $n_1 = 1$ et $a_2 = 1$, de multiplicité $n_2 = 2$. F admet un élément simple de première espèce associé à la racine $a_1 = 0$, de la forme

$$\frac{A}{x}$$

et deux éléments simples de première espèce associés à la racine $a = 1$, de la forme

$$\frac{B}{x-1}, \quad \frac{C}{(x-1)^2}$$

111

Éléments simples de deuxième espèce

Définition : Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle. Supposons que Q s'écrive

$$Q = (x^2 + bx + c)^n R,$$

où le trinôme réel $x^2 + bx + c$ n'a pas de racine réelle, n est maximal et R est un polynôme réel. Les **éléments simples de deuxième espèce** associés sont les fractions rationnelles

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + bx + c}, \quad \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + bx + c)^2}, \quad \dots, \quad \frac{A_nx + B_n}{(x^2 + bx + c)^n},$$

où $A_1, \dots, A_n$ sont des constantes réelles.

Exemple : Soit

$$F = \frac{1}{x^5 + 2x^3 + x}$$

Comme $Q = x^5 + 2x^3 + x = x(x^4 + 2x^2 + 1) = x(x^2 + 1)^2$,

$$F = \frac{1}{x(x^2 + 1)^2}$$

Notons que $x^2 + 1$ n'a pas de racine réelle. F admet donc un élément simple de première espèce, de la forme

$$\frac{A}{x}$$

associé à la racine $a = 0$ et deux éléments simples de deuxième espèce, de la forme

$$\frac{Bx + C}{x^2 + 1}, \quad \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

112

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Théorème (décomposition en éléments simples) : Toute fraction rationnelle est la somme de sa partie entière et de ses éléments simples.

Exemple : Soit

$$F = \frac{1}{x^4 + x^2}.$$

Remarquons que le numérateur $P = 1$ est de degré strictement inférieur au dénominateur $Q = x^4 + x^2$. Donc, F a pour partie entière $E = 0$.

De plus, $Q = x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$. Les éléments simples de F sont donc $\frac{A}{x}$, $\frac{B}{x^2}$ et $\frac{Cx+D}{x^2+1}$ et par le théorème,

$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Il reste à identifier les constantes A, B, C, D . Or,

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} &= \frac{Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + x^2(Cx + D)}{x^2(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B}{x^4 + x^2} \end{aligned}$$

En identifiant à $F = \frac{1}{x^4 + x^2}$, on trouve

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = -1 \end{cases}$$

et donc
$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

113

Intégration des fractions rationnelles

Remarque : Toute fraction rationnelle F est la somme de sa partie entière et de ses éléments simples. Pour intégrer F , il suffit donc de savoir intégrer un polynôme (déjà vu) et des éléments simples.

Proposition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Alors,

- $\int \frac{1}{x - a} dx = \ln |x - a| + C$
- si $n \geq 2$, $\int \frac{1}{(x - a)^n} dx = -\frac{1}{(n - 1)(x - a)^{n-1}} + C$
- $\int \frac{1}{b^2 + (x - a)^2} dx = \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{x - a}{b}\right) + C$

Exemple : On a vu précédemment que $\frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{2x - 1} = 2x^2 + 4x + 2 + \frac{3}{2x - 1}$. Par conséquent,

$$\int \frac{4x^3 + 6x^2 + 1}{2x - 1} dx = \int (2x^2 + 4x + 2) dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x - 1/2} dx = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2x + \frac{3}{2} \ln |x - 1/2| + C$$

114

Intégration des fractions rationnelles en sin et cos

Voici quelques règles pratiques (règles de Bioche simplifiées) pour calculer l'intégrale d'une expression rationnelle en sin et cos. Soit f une fraction rationnelle.

Règle 1 : Si l'intégrale est de la forme

- $\int f(\sin x) \cos x \, dx = \int f(t) \, dt \Big|_{t=\sin x}$ on pose $\begin{cases} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{cases}$
- $\int f(\cos x) \sin x \, dx = - \int f(t) \, dt \Big|_{t=\cos x}$ on pose $\begin{cases} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \end{cases}$

Exemple :

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = - \int \frac{1}{t^2} \, dt \Big|_{t=\cos x} = \frac{1}{t} \Big|_{t=\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Règle 2 : Dans tous les autres cas, on pose $t = \tan(x/2)$, donc :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2}{1+t^2} \, dt.$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} \, dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} \, dt \Big|_{t=\tan(x/2)} = \int \frac{1}{t} \, dt \Big|_{t=\tan(x/2)} \\ &= \ln(t) \Big|_{t=\tan(x/2)} = \ln(\tan(x/2)). \end{aligned}$$

115

TMB – Chapitre 5

Équations différentielles ordinaires (Edo)

Dans ce chapitre :

- 5.1 Généralités sur les équations différentielles ordinaires
- 5.2 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 1 - condition initiale
- 5.3 Équations différentielles ordinaires d'ordre 1 à variables séparées.
- 5.4 Équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre 2 à coefficients constants - conditions initiales

116

5.1 - Généralités

Définition : Une **équation différentielle ordinaire (edo)** est une équation dont l'inconnue est une fonction d'une variable.

Une telle équation s'écrit généralement

$$F\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)\right) = 0 \quad (E)$$

où l'inconnue est la fonction $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

Définition : On appelle **ordre de l'équation différentielle (E)**, l'ordre de dérivation le plus élevé qui apparaît dans l'équation.

Exemples :

- $f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1$ inconnue : fonction f de la variable x , ordre : 1
- $x''(t) + \omega x(t) = 0$ inconnue : fonction x de la variable t , ordre : 2
- $x'(t) = p(t) + x(t)q(t) + x^2(t)$ inconnue : fonction x de la variable t , ordre : 1
- $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ inconnue : position du corps en mouvement, ordre : 2

Il existe une forme de référence à laquelle on ramène les edo (lorsque c'est possible)

$$x'(t) = F(t, x(t)).$$

On s'empressera de réécrire nos équations sous cette forme dès que cela fait sens.

117

5.2 - Équations différentielles linéaires du premier ordre

But : Soit I un intervalle ouvert et $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On cherche les fonctions dérivables $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\boxed{x'(t) = a(t)x(t) + b(t)} \quad \text{pour tout } t \in I \quad (E)$$

On dit que (E) est une **équation différentielle⁶ linéaire du premier ordre** et x une solution de cette équation.

Définition : On appelle **équation homogène** associée à (E) l'équation (plus simple) :

$$\boxed{x'(t) - a(t)x(t) = 0} \quad \text{pour tout } t \in I \quad (E_h)$$

Propriété (principe de linéarité) : Supposons que x_p soit une solution particulière de (E). Alors, toutes les solutions de (E) s'écrivent

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)} \quad t \in \mathbb{R},$$

où x_h est une solution de l'équation homogène (E_h).

Preuve : Si $x'_h = ax_h$ et $x'_p = ax_p + b$, alors $(x_h + x_p)' = a(x_h + x_p) + b$ et donc toute fonction de la forme $x = x_h + x_p$ est solution de (E). Réciproquement, soit x une solution de (E). Comme $x' = ax + b$ et $x'_p = ax_p + b$, $(x - x_p)' = a(x - x_p)$ et donc $x_h = x - x_p$ est une solution du problème homogène. Par définition de x_h , on a bien l'écriture $x = x_h + x_p$.

6. $\alpha_1(t)x'(t) + \alpha_0(t)x(t) + \beta(t) = 0$ se ramène à (E) en posant $a := -\alpha_0/\alpha_1$ et $b := -\beta/\alpha_1$.

118

Résolution de l'équation homogène

Théorème : Les solutions de l'équation homogène (E_h) sont les fonctions de la forme

$$x_h(t) = \lambda e^{A(t)}$$

où A est une primitive de a et λ une constante réelle.

Preuve : Cherchons une solution x . Si x ne s'annule pas, (E_h) se réécrit

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a(t).$$

Intégrons cette égalité. À gauche, on obtient $\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \ln |x(t)| + c_1$.

À droite, on a : $\int a(t) dt = A(t) + c_2$. D'où,

$$\ln |x(t)| = A(t) + c \quad \text{et donc} \quad |x(t)| = e^{A(t)+c} = e^c e^{A(t)}.$$

Ainsi, toute fonction de la forme $x_h = \lambda e^A$ est solution. Y en a-t-il d'autres ? Non, car si x est solution, en posant $y = e^{-A}x$, on voit que

$$y' = e^{-A}(x' - ax) = 0,$$

et donc $y = \lambda$ est constante, c'est-à-dire $x = \lambda e^A$.

Remarque : D'après le théorème, la seule solution de (E_h) qui s'annule est la fonction identiquement nulle.

119

Exemple d'équation homogène

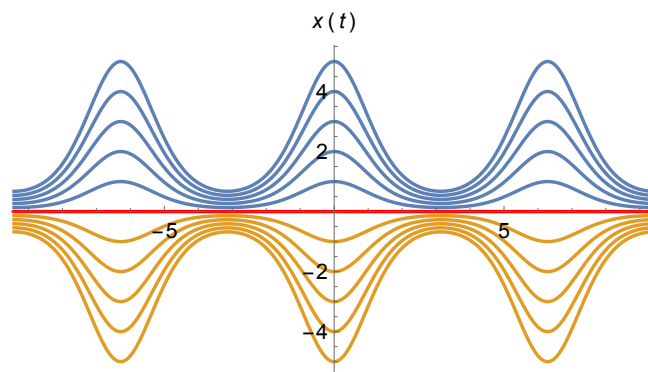
Exemple : L'équation homogène $x'(t) + \sin t \, x(t) = 0$ s'écrit comme

$$x'(t) = -\sin t \, x(t) \quad (E_h)$$

et a donc comme solution les fonctions

$$x_h(t) = \lambda e^{-\int \sin t \, dt} = \lambda e^{\cos t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Voici le graphe de x_h pour $\lambda \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



120

Résolution de l'équation complète

Théorème (variation de la constante) : L'équation complète (E) admet une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$$

où A est une primitive de a et $\lambda(t) = \int b(t)e^{-A(t)} dt$.

Preuve : Cherchons $\lambda(t)$ telle que $x_p(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$ soit solution de (E) . En remplaçant, dans (E) , $x(t)$ par $x_p(t)$, on obtient

$$x_p'(t) = \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)A'(t)e^{A(t)}$$

où $A'(t) = a(t)$. On trouve :

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Leftrightarrow \lambda'(t)e^{A(t)} + \lambda(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)\lambda(t)e^{A(t)} + b(t)e^{A(t)} \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t)e^{A(t)} = b(t)e^{A(t)} \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(t) = \int b(t)e^{-A(t)} dt.\end{aligned}$$

Théorème : Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \left(\lambda + \int b(t)e^{-A(t)} dt \right) e^{A(t)}$$

où λ est un nombre réel.

121

Exemple de solution particulière

Exemple : L'équation différentielle

$$x'(t) + \sin t x(t) = \frac{\sin(2t)}{2} \quad (E)$$

a pour équation homogène associée $x'(t) = -\sin t x(t)$ dont les solutions (voir slide 120) sont $x_h(t) = \lambda e^{\cos t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche donc une solution particulière de l'équation complète (E) sous la forme $x_p(t) = \lambda(t)e^{\cos t}$. En remplaçant $x(t)$ par $x_p(t)$ dans (E) , on obtient, en appliquant la méthode de variation de la constante :

$$\lambda'(t) = \frac{\sin(2t)}{2} e^{-\cos t}.$$

La fonction $\lambda(t)$ est donc la primitive

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \int \frac{\sin(2t)}{2} e^{-\cos t} dt = \int \underbrace{\cos t}_{f(t)} \underbrace{\sin t e^{-\cos t}}_{g'(t)} dt \\ &= \underbrace{\cos t}_{f(t)} \underbrace{e^{-\cos t}}_{g(t)} - \int \underbrace{-\sin t}_{f'(t)} \underbrace{e^{-\cos t}}_{g(t)} dt \\ &= \cos t e^{-\cos t} + \int e^u du \Big|_{u=-\cos t} \quad (u = \cos t, du = \sin t dt) \\ &= (\cos t + 1) e^{-\cos t}\end{aligned} \quad (\text{IPP})$$

Par conséquent,

$$x_p(t) = (\cos t + 1) e^{-\cos t} e^{\cos t} = 1 + \cos t.$$

En conclusion, les solutions de (E) sont

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \lambda e^{\cos t} + \cos t + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

122

Condition initiale

But : résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec une condition initiale

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_*) = x_* \end{cases} \quad (EC)$$

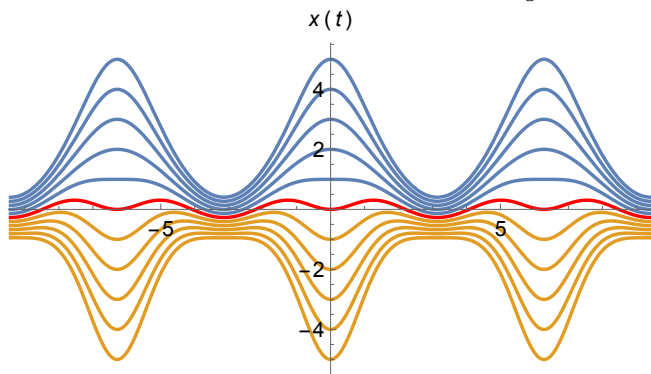
Théorème : Le système (EC) admet une solution unique dont le paramètre λ est déterminé par la condition initiale.

Exemple : Résoudre l'edo avec condition initiale (EC) $\begin{cases} x'(t) + \sin t x(t) = \sin(2t) \\ x(0) = 4 \end{cases}$

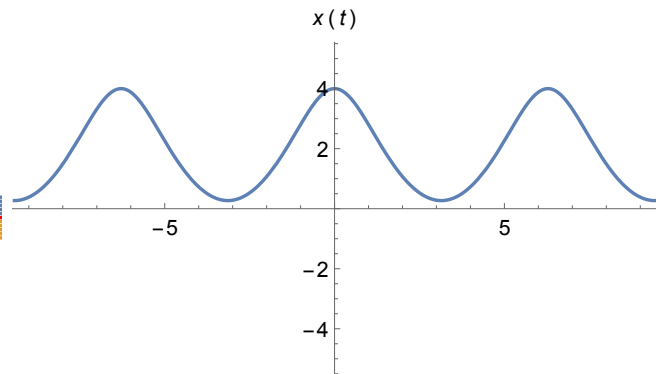
L'équation différentielle a pour solution $x(t) = \lambda e^{\cos t} + 1 + \cos t$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus,

$$x(0) = \lambda e^{\cos 0} + 1 + \cos 0 = 4 \Leftrightarrow \lambda e = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2/e.$$

La solution de (EC) est donc $x(t) = \frac{2}{e} e^{\cos t} + 1 + \cos t$.



solutions de l'équation complète



solution de (EC)

123

5.3 - Équations différentielles ordinaires d'ordre 1 à variables séparées

Remarque : une méthode de résolution explicite n'est pas toujours disponible pour une edo non linéaire du premier ordre de la forme générale $x'(t) = F(t, x(t))$. On considère ici le cas particulier résoluble qui couvre plusieurs exemples en physique où le membre de droite s'écrit comme un produit d'une fonction de t et d'une fonction de $x(t)$, c'est-à-dire : $F(t, x(t)) = f(t)g(x(t))$.

But : Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles ouverts et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. On veut résoudre une edo du premier ordre à **variables séparées**

$$x'(t) = f(t)g(x(t)) \quad \text{pour } t \in I. \quad (E)$$

Méthode de résolution :

- S'il existe $x_0 \in J$ tel que $g(x_0) = 0$, alors la fonction constante $t \mapsto x(t) = x_0$, $t \in I$ est une solution de (E).
- Sinon, $g(x_0) \neq 0$ et alors, puisque g est continue, $g(x) \neq 0$ pour x proche de x_0 . Dans ce cas, on réécrit (E) sous la forme équivalente

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t)$$

dans laquelle :

- le membre de gauche contient $x'(t)$ en facteur d'une fonction de $x(t)$
- le membre de droite ne fait pas intervenir les fonctions $x(t)$ ou $x'(t)$.

Il suffit alors d'intégrer par rapport à la variable t cette dernière égalité.

124

Équations différentielles à variables séparées : exemple 1

Soit l'équation différentielle $x'(t) = 2tx(t)^2$.

- On a $x'(t) = f(t)g(x(t))$ avec $f(t) = 2t$ et $g(x(t)) = x(t)^2$, c.-à-d. $g(x) = x^2$.
- On remarque que $g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. Donc la fonction identiquement nulle (définie sur $\mathbb{R}$ tout entier) $t \mapsto x(t) = 0$ est solution.
- Si x ne s'annule pas, alors $g(x)$ non plus et l'équation se réécrit

$$\frac{x'(t)}{x(t)^2} = 2t,$$

et l'expression $x'(t)/x(t)^2$ est une dérivée bien connue, de sorte qu'en intégrant de chaque côté par rapport à la variable t , on obtient :

$$-\frac{1}{x(t)} = t^2 + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'où

$$x(t) = -\frac{1}{t^2 + \lambda}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ si $\lambda > 0$ et sur tout intervalle ne contenant pas $t_\lambda = \pm\sqrt{-\lambda}$ si $\lambda \leq 0$.

125

Équations différentielles à variables séparées : exemple 2

Soit l'équation différentielle $x'(t) = \frac{1}{\cos x(t)}$.

- On a $x'(t) = f(t)g(x(t))$ avec $f(t) = 1$ et $g(x(t)) = 1/\cos x(t)$, c.-à-d. $g(x) = 1/\cos x$.
- On remarque que g ne s'annule jamais.
- Sinon l'équation se réécrit

$$\cos(x(t))x'(t) = 1,$$

et l'expression $\cos(x(t))x'(t)$ est une dérivée bien connue, de sorte qu'en intégrant de chaque côté par rapport à la variable t , on obtient :

$$\sin(x(t)) = t + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$x(t) = \arcsin(t + \lambda)$$

est solution sur l'intervalle ouvert $] -1 - \lambda, 1 - \lambda[$.

126

5.4 - Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

But : Soit I un intervalle ouvert, $d : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et a, b, c des constantes réelles avec $a \neq 0$. On souhaite résoudre l'edo linéaire du second ordre

$$\boxed{a x''(t) + b x'(t) + c x(t) = d(t)} \quad \text{pour tout } t \in I \quad (E)$$

Définition : On appelle équation homogène associée à (E) l'équation (plus simple) :

$$\boxed{a x''(t) + b x'(t) + c x(t) = 0} \quad \text{pour tout } t \in I \quad (E_h)$$

Théorème (principe de linéarité) : Supposons que x_p soit une solution particulière de (E) . Alors toutes les solutions de (E) s'écrivent

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)} \quad t \in \mathbb{R},$$

où x_h est une solution de l'équation homogène (E_h) .

Preuve : Se démontre de la même manière que le cas des edo linéaires du premier ordre.

127

Résolution de l'équation homogène

Définition : On appelle **équation caractéristique**⁷ de (E_h) (ou (E)), l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{a z^2 + b z + c = 0}.$$

Le polynôme $a z^2 + b z + c$ s'appelle le polynôme caractéristique.

Théorème (solutions de l'équation homogène) : Si l'équation caractéristique admet

- deux racines réelles distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, alors les solutions de (E_h) sont

$$\boxed{x_h(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

- une racine réelle double $r \in \mathbb{R}$, alors les solutions de (E_h) sont

$$\boxed{x_h(t) = (\lambda + \mu t) e^{r t}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

- deux racines complexes non réelles, elles sont forcément conjuguées, c'est-à-dire de la forme $z = r \pm i s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et les solutions de (E_h) sont

$$\boxed{x_h(t) = (\lambda \cos(st) + \mu \sin(st)) e^{r t}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

7. Quelle est l'équation caractéristique d'une edo linéaire d'ordre 1 à coefficients constants ?

128

Exemples d'équations homogènes

- $x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = 0$. Les racines de $z^2 - 3z - 10$ sont

$$z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-10)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{3+7}{2} = 5 \\ \frac{3-7}{2} = -2 \end{cases}.$$

On a deux racines réelles distinctes $r_1 = 5$ et $r_2 = -2$, donc

$$x_h(t) = \lambda e^{5t} + \mu e^{-2t} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$ s'écrit $y''(t) + y'(t) + \frac{1}{4}y(t) = 0$

Les racines de $z^2 + z + 1/4$ sont $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1/4}}{2} = \frac{-1 \pm 0}{2} = -\frac{1}{2}$. On a une racine réelle double $r = -1/2$, donc

$$y_h(t) = (\lambda + \mu t) e^{-t/2} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- $u''(\theta) - 6u'(\theta) + 13u(\theta) = 0$

Les racines de $z^2 - 6z + 13$ sont

$$z = \frac{6 \pm i\sqrt{|36 - 4 \cdot 13|}}{2} = \frac{6 \pm i\sqrt{|-16|}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

On a deux racines complexes conjuguées, avec partie réelle $r = 3$ et partie imaginaire $s = 2$:

$$u_h(\theta) = (\lambda \cos(2\theta) + \mu \sin(2\theta)) e^{3\theta} \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

129

Second membre simple

But : Trouver une solution particulière de l'équation différentielle

$$\boxed{ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = d_1(t) + \dots + d_k(t)}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \quad (E)$$

quand le second membre est la somme de termes ayant une forme simple.

Exemple : Le second membre $d(t) = 4t^3 - te^{3t} + 5e^t \cos(2t)$ est la somme de trois termes.

Proposition (principe de linéarité) Si pour $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ x_i une solution particulière associée à l'équation $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = d_i(t)$, alors

$$x_p = x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

est une solution particulière de l'équation complète (E) .

Exemple : Pour le second membre $d(t) = 4t^3 - te^{3t} + 5e^t \cos(2t)$, on pourra donc chercher trois solutions particulières associées respectivement à $d_1(t) = 4t^3$, $d_2(t) = -te^{3t}$ et $d_3(t) = 5e^t \cos(2t)$ puis les ajouter.

130

Solution particulière avec second membre simple

Proposition : Une solution particulière $x_p(t)$ associée au second membre (simple)

$$d(t) = P(t)e^{\alpha t}(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)),$$

où P est un polynôme et $\alpha, \beta, A, B \in \mathbb{R}$, peut-être cherchée de la même forme que d .

Plus précisément, on cherche x_p sous la forme

$$x_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}(K \cos(\beta t) + L \sin(\beta t)), \quad K, L \in \mathbb{R},$$

selon le principe suivant :

$$Q(t) = \begin{cases} P_0(t) & \text{si } \alpha + i\beta \text{ n'est pas racine du polynôme caractéristique} \\ t P_0(t) & \text{si } \alpha + i\beta \text{ est racine simple du polynôme caractéristique} \\ t^2 P_0(t) & \text{si } \alpha + i\beta \text{ est racine double du polynôme caractéristique} \end{cases}$$

et où P_0 est un polynôme de même degré que P .

Exemples :

- Si $d(t) = 4t^3 = 4t^3 e^{0t}(1 \cos(0t) + B \sin(0t))$, alors $P(t) = 4t^3$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $A = 1$ et on cherchera une solution particulière sous la forme $x_p(t) = Q(t)$
- Si $d(t) = -te^{3t} = -te^{3t}(1 \cos(0t) + B \sin(0t))$, alors $P(t) = -t$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $A = 1$ et on cherchera une solution particulière sous la forme $x_p(t) = Q(t)e^{3t}$
- Si $d(t) = 5e^t \cos(2t) = 5e^t(1 \cos(2t) + 0 \sin(2t))$, alors $P(t) = 5$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $A = 1$, $B = 0$ et on cherchera une solution particulière sous la forme $x_p(t) = Q(t)e^t(K \cos(2t) + L \sin(2t))$

131

Exemples de solution particulière

- (E) $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 16e^{-t/2}$

L'équation (E_h) a pour solutions (voir slide 129) $y_h(t) = (\lambda + \mu t)e^{-t/2}$.

De plus, comme $\alpha + i\beta = \alpha = -1/2$ est racine double du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière de (E) de la forme

On calcule $y_p(t) = at^2 e^{-t/2}$.

$$y_p'(t) = \left(-\frac{1}{2}at^2 + 2at\right)e^{-t/2}, \quad y_p''(t) = \left(\frac{1}{4}at^2 - 2at + 2a\right)e^{-t/2}$$

et on remplace dans (E). On obtient :

$$\begin{aligned} (E) \quad &\Longleftrightarrow 4\left(-\frac{1}{2}at^2 + 2at\right)e^{-t/2} + 4\left(\frac{1}{4}at^2 - 2at + 2a\right)e^{-t/2} + at^2 e^{-t/2} = 16e^{-t/2} \\ &\Longleftrightarrow 8ae^{-t/2} = 16e^{-t/2} \\ &\Longleftrightarrow a = 2 \\ &\Longleftrightarrow y_p(t) = 2t^2 e^{-t/2}. \end{aligned}$$

En conclusion, les solutions de (E) sont

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = (\lambda + \mu t + 2t^2)e^{-t/2}.$$

132

Exemples de solution particulière (suite)

- $(E) \quad u''(\theta) - 6u'(\theta) + 13u(\theta) = 75 \cos(2\theta)$

L'équation (E_h) a pour solutions (voir slide 129) $u_h(\theta) = (\lambda \cos(2\theta) + \mu \sin(2\theta))e^{3\theta}$.

De plus, comme $\alpha + i\beta = 0 + 2i = 2i$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière de (E) de la forme

$$u_p(\theta) = a \cos(2\theta) + b \sin(2\theta).$$

On calcule

$$u'_p(\theta) = -2a \sin(2\theta) + 2b \cos(2\theta), \quad u''_p(\theta) = -4a \cos(2\theta) - 4b \sin(2\theta)$$

et on remplace dans (E) . On obtient :

$$\begin{aligned}(E) &\iff (9a - 12b) \cos(2\theta) + (12a + 9b) \sin(2\theta) = 75 \cos(2\theta) \\ &\iff \begin{cases} 9a - 12b = 75 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases} \\ &\iff u_p(\theta) = 3 \cos(2\theta) - 4 \sin(2\theta).\end{aligned}$$

En conclusion, les solutions de (E) sont

$$u(\theta) = (\lambda \cos(2\theta) + \mu \sin(2\theta)) e^{3\theta} + 3 \cos(2\theta) - 4 \sin(2\theta).$$

133

Conditions initiales

But : résoudre une edo linéaire du second ordre avec deux conditions initiales

$$\boxed{\begin{cases} ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = d(t) \\ x(t_*) = x_* \quad \text{et} \quad x'(t_*) = x'_* \end{cases}} \quad (EC)$$

Théorème Le système (EC) admet une solution unique $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ dont les paramètres λ et μ sont déterminés par les conditions initiales.

Exemple : Le système $(EC) \quad \begin{cases} x''(t) - 3x'(t) - 10x(t) = (72t^2 - 1)e^t \\ x(0) = 2 \quad \text{et} \quad x'(0) = 1 \end{cases}$

a pour solution

$$x(t) = \lambda e^{5t} + \mu e^{-2t} - (6t^2 - t + 1)e^t$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ doivent être déterminés. Sa dérivée est

$$x'(t) = 5\lambda e^{5t} - 2\mu e^{-2t} - (6t^2 - t + 1 + 12t - 1)e^t.$$

donc

$$\begin{cases} x(0) = \lambda + \mu - 1 = 2 \\ x'(0) = 5\lambda - 2\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 3 \\ 5\lambda - 2\mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$$

La solution de (EC) est donc $x(t) = e^{5t} + 2e^{-2t} - (6t^2 - t + 1)e^t$.

134

TMB – Chapitre 6

Systèmes linéaires et matrices

Dans ce chapitre :

- 6.1 Systèmes d'équations linéaires
- 6.2 Matrices et déterminants
- 6.3 Écriture matricielle des systèmes linéaires

135

6.1 – Systèmes d'équations linéaires

Dans cette section :

- Définition
- Résolution des systèmes linéaires : méthode du pivot de Gauss
- Exemples

136

Systèmes d'équations linéaires

Définition : Un système de m équations linéaires à n variables $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\ a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} x_n & = & b_m \end{array} \right. \quad (S)$$

- Les $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et les $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont les coefficients du système.
- Les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les inconnues du système.

Un tel système peut avoir une unique solution, une infinité de solutions ou aucune solution, selon la dépendance mutuelle des équations.

Exemples :

- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$ admet une unique solution : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.
- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases}$ admet une infinité de solutions : tous les points de la droite d'équation $y = 2x - 4$.
- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$ n'admet aucune solution, car si $2x - y = 4$ alors $6x - 3y = 3(2x - y) = 12$ ne peut pas s'annuler.

137

Résolution : méthode du pivot de Gauss

La description suivante est inspirée de [cette page](#).

Avantage : La méthode du pivot de Gauss permet de résoudre des systèmes linéaires avec autant d'équations que l'on veut et autant d'inconnues que l'on veut.

Principe : Le pivot de Gauss permet de transformer un système linéaire en un système équivalent (qui admet les mêmes solutions), à l'aide de trois opérations :

- échange de deux lignes
- multiplication d'une ligne par un nombre non nul
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne

Ces opérations permettent d'éliminer progressivement des variables dans les lignes du système, afin de le transformer en un **système triangulaire** (dernière ligne avec une unique variable, avant-dernière ligne avec deux variables, etc.) **équivalent**.

Un système triangulaire est très facile à résoudre car on le résout de bas en haut : on résout la dernière équation et on reporte sa solution dans l'équation précédente, et ainsi de suite.

Méthode :

- À la première étape, on choisit une inconnue (avec un coefficient non nul qu'on appelle le **pivot**) qui disparaîtra (à l'aide du pivot) de toutes les lignes sauf la première.
- À la deuxième étape, on choisit une autre inconnue (avec un coefficient non nul) qui disparaîtra de toutes les lignes sauf la première et la deuxième.
- Et ainsi de suite jusqu'à épuiser toutes les inconnues ou bien toutes les lignes

138

Exemple 1 : autant d'équations que d'inconnues (système carré)

Lorsqu'on note une opération sur une ligne, on peut indiquer en bout de ligne l'opération effectuée. Le L_i se réfère toujours à la ligne numéro i du système précédent.

Réolvons le système suivant à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -x - y + 2z = 7 \\ 2x + y - z = -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 & L_1 \\ y + 5z = 13 & L_2 + L_1 \\ -3y - 7z = -15 & L_3 - 2L_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + 5z = 13 \\ 8z = 24 & L_3 + 3L_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z + 6 \\ y = -5z + 13 \\ z = 24/8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Le 3ème système est un système triangulaire qui a été résolu de bas en haut :

- d'abord, on a obtenu $z = 24/8 = 3$;
- puis, on a reporté dans l'équation précédente la valeur de z pour obtenir $y = 13 - 5 \cdot 3 = -2$;
- enfin, on a reporté les valeurs de z et y pour obtenir $x = 6 - 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 = 1$.

On vérifie facilement que $(x, y, z) = (1, -2, 3)$ est bien solution puisque :

$x + 2y + 3z = 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 6$, $-x - y + 2z = -1 - (-2) + 2 \cdot 3 = 7$ et $2x + y - z = 2 \cdot 1 + (-2) - 3 = -3$.

139

Exemple 2 : même système mais présenté différemment

Le système suivant est le même que le précédent mais les équations ne sont pas dans le même ordre. On va alors ajouter des étapes de permutations afin de choisir comme pivots les nombres les plus petits possibles.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ -x - y + 2z = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 & L_2 \\ 2x + y - z = -3 & L_1 \\ -x - y + 2z = 7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ -3y - 7z = -15 & L_2 - 2L_1 \\ y + 5z = 13 & L_3 + L_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + 5z = 13 & L_3 \\ -3y - 7z = -15 & L_2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + 5z = 13 \\ 8z = 24 & L_3 + 3L_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z + 6 \\ y = -5z + 13 \\ z = 24/8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

- À la première étape, on a permuté les lignes L_1 et L_2 pour avoir 1 comme pivot.
- À la troisième étape, on a permuté les lignes L_2 et L_3 pour avoir, encore une fois, 1 comme pivot.
- Le 5ème système est triangulaire, il a été résolu de bas en haut comme précédemment.

140

Dans cette section :

- Généralités : définition, Opérations
- Matrices carrées et déterminants
- Lien avec les systèmes linéaires

141

Matrices : définition

Définition : Une **matrice réelle** à m lignes et n colonnes (abrégée **matrice** $m \times n$) est un tableau

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

dont les coefficients a_{ij} sont des nombres réels. On note $\mathcal{M}_{mn}$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes.

Exemples :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 2 & \sqrt{5} & 3 \end{pmatrix} \text{ matrice } 2 \times 3$$

$$\begin{pmatrix} \ln(5) & -2 \\ \pi & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \text{ matrice } 3 \times 2$$

- Une **matrice carrée** est une matrice $n \times n$.
- Une **matrice colonne** est une matrice $1 \times n$.
On parle aussi de **vecteur colonne** à n composantes.
- Une **matrice ligne** est une matrice $m \times 1$.
On parle aussi de **vecteur ligne** à m composantes.

Ex. $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ex. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ex. $(3 \quad 1 \quad \sqrt{2})$

142

Somme et dilatation de matrices

- **Somme** : on ajoute deux matrices de **même taille** $m \times n$ de la façon suivante

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

- **Dilatation** : on dilate une matrice par un réel λ comme suit

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3 & -3+0 & 0-1 \\ -2+2 & 1+5 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
- $2 \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 8 & 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

143

Produit de matrices

Définition : Le **produit** des matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{\ell \times m}$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ est la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{\ell \times n}$ dont les coefficients sont

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

Autrement dit, le coefficient c_{ij} s'obtient en faisant le produit de la i -ème ligne de A (matrice $1 \times m$) avec la j -ème colonne de B (matrices $m \times 1$).

Attention : le produit AB n'a de sens que si A a autant de colonnes que B a de lignes. Cela se lit sur l'indice m commun aux deux matrices : $A \in \mathcal{M}_{\ell \times m}$ et $B \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

Exemples : parmi les produits de matrices les plus communs on a

- le produit entre deux matrices carrées de même taille

$$\mathcal{M}_{22} \times \mathcal{M}_{22} \rightarrow \mathcal{M}_{22} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix};$$

- le produit entre une matrice rectangulaire et une matrice colonne (c.-à-d. un vecteur)

$$\mathcal{M}_{23} \times \mathcal{M}_{31} \rightarrow \mathcal{M}_{21} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nota : dans le chapitre suivant nous comprendrons pourquoi le produit de matrices est ainsi défini.

144

Exemples de produits de matrices

Exercice : Calculer les produits possibles entre les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

Solution :

- $A \in \mathcal{M}_{22}$ et $B \in \mathcal{M}_{32}$ donc le produit AB n'existe pas mais $BA \in \mathcal{M}_{32}$ existe et

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- $A \in \mathcal{M}_{22}$ et $C \in \mathcal{M}_{23}$ donc le produit $AC \in \mathcal{M}_{23}$ existe mais CA n'existe pas et

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

- $B \in \mathcal{M}_{32}$ et $C \in \mathcal{M}_{23}$ donc les produits $BC \in \mathcal{M}_{33}$ et $CB \in \mathcal{M}_{22}$ existent et

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad CB = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

145

Déterminant des matrices carrées

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$ une matrice carrée. Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note $\mathcal{A}_i^j \in \mathcal{M}_{(n-1)(n-1)}$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A .

On définit le déterminant de A par récurrence sur l'entier n .

Définition : Le **déterminant** d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}$ est le nombre réel noté $\det A$ (ou bien $|A|$ si $n \neq 1$) et défini par récurrence sur l'entier n , comme suit :

- pour $n = 1$, $A = (a)$, et on pose $\det(a) = a$
- pour $n \geq 2$, on pose

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \det \mathcal{A}_1^j = a_{11} \det \mathcal{A}_1^1 - a_{12} \det \mathcal{A}_1^2 + a_{13} \det \mathcal{A}_1^3 + \dots + (-1)^{1+n} \det \mathcal{A}_1^n$$

En utilisant la formule précédente, on obtient

- pour $n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \det(d) - b \det(c) = ad - bc$
- pour $n = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

146

Propriétés élémentaires des déterminants, exemples

Propriétés : Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. On a

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

- On a défini le déterminant de A comme la somme de n déterminants de matrices de tailles $(n-1) \times (n-1)$, obtenue en développant par rapport à la première ligne de A . On aurait pu effectuer ce développement par rapport à n'importe quelle ligne où n'importe quelle colonne. En effet, on a

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det \mathcal{A}_i^j \quad (\text{développement par rapport à la ligne } i)$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \det \mathcal{A}_i^j \quad (\text{développement par rapport à la colonne } j)$$

Exemples : $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 4(1 \cdot 7 - 2 \cdot 6) = -20 \end{aligned}$$

Ici, on a développé par rapport à la deuxième colonne.

147

Matrices carrées inversibles

Définition : Considérons $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$.

- La matrice $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice **identité** (ou **unité**) car, pour tout

$A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, on a

$$A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A.$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une matrice, notée A^{-1} , telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$$

On dit alors que A est **inversible** et que A^{-1} est sa matrice inverse.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\det \mathbb{1} = 1$.

Remarque : Une matrice inversible A est nécessairement carrée. En effet, si A est une matrice qui n'est pas carrée et si B est une autre matrice telle que les produits AB et BA soient définis, ces deux produits sont de tailles différentes et ne peuvent donc pas être égaux à une même matrice $\mathbb{1}$.

Exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. (Vérifiez-le !)

148

Propriétés des matrices inversibles - Inverse d'une matrice 2×2

Proposition : Une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Propriété : Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Preuve : De $A^{-1}A = \mathbb{1}$, on obtient $\det(A^{-1}A) = \det(\mathbb{1})$. Mais comme $\det(\mathbb{1}) = 1$ et $\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A)$ (voir page 147), on déduit que $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

Cas particulier (à connaître) : $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible} \iff \det A = ad - bc \neq 0$$

Dans ce cas, sa matrice inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemples :

- Pour $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ on a $\det A = 4 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 = 2$, donc A est inversible. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det A^{-1} = 0 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{\det A}.$$

- Pour $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ on a $\det B = 0$, donc B n'est pas inversible.

149

Écriture matricielle des systèmes linéaires

Proposition : Le système linéaire (S) page 139 est équivalent à l'équation matricielle

$$AX = B$$

où on a posé

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Preuve : il suffit d'effectuer le produit matriciel pour s'en rendre compte.

Proposition : Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$ une matrice carrée et soit $B \in \mathcal{M}_{n1}$. L'équation matricielle

$$AX = B \tag{E}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n1}$ admet une solution unique si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas la solution est donnée par le produit de matrices

$$X = A^{-1}B.$$

Preuve : On ne montre qu'un sens de l'implication. Si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible. En multipliant à gauche les deux membres de l'équation (E) par A^{-1} , on obtient $A^{-1}AX = A^{-1}B$, c'est-à-dire $X = A^{-1}B$.

150

Exemples

- Le système $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(A) = 6 - (-6) \neq 0$, il admet une solution unique $X = A^{-1}B$. On calcule

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/12 & 1/12 \\ -6/12 & 2/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix},$$

on a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/4 + 0 \\ -4/2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Le système $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(A) = -6 - (-6) = 0$, ce système n'admet pas de solution unique. En fait, il n'admet aucune solution puisque les équations sont incompatibles.

151

TMB – Chapitre 7

Éléments succincts d'algèbre linéaire

Dans ce chapitre :

- 7.1 Espaces vectoriels, vecteurs, combinaisons linéaires, bases, dimension
- 7.2 Applications linéaires

Dans cette section :

- Définition, exemples
- Vecteurs de $\mathbb{R}^n$
- Combinaisons linéaires
- Famille libre, famille génératrice
- Base, dimension

153

Espaces vectoriels

Définition : Un **espace vectoriel** (sur $\mathbb{R}$) est un ensemble V non vide muni :

- d'une **addition**, associative et commutative, notée $+$, c.-à-d. pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$,

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \in V} \quad (\text{associativité}),$$

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \in V} \quad (\text{commutativité});$$

- d'un **vecteur nul** noté $\vec{0}$ (appelé aussi zéro ou élément neutre) tel que $\boxed{\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}}$;

- d'une **multiplication par un scalaire** telle que pour tout $\vec{v} \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boxed{\lambda \vec{v} \in V}$
et $\boxed{\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v}}$ (distributivité par rapport à l'addition).

On appelle **vecteurs** les éléments de V et **scalaires** les éléments de $\mathbb{R}$.

Propriétés élémentaires : pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$

- $0\vec{v} = \vec{0}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$
- $(-\lambda)\vec{v} = -(\lambda\vec{v}) = \lambda(-\vec{v})$
- $\lambda\vec{v} = \vec{0} \iff (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{0})$

Définition : Un sous-ensemble V' d'un espace vectoriel V est un **sous-espace vectoriel** de V , si V' n'est pas vide et si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $u, v \in V'$, on a $\lambda u + v \in V'$.

Propriété : Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

154

Exemples d'espaces vectoriels

- L'ensemble $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ avec
 - addition** : $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
 - vecteur nul** : $\vec{0} = (0, \dots, 0)$
 - multiplication par un scalaire** : $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n), \lambda \in \mathbb{R}$
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire sans second membre est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- L'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\}$ avec
 - addition** : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
 - vecteur nul** : la fonction nulle $0(x) = 0$
 - multiplication par un scalaire** : $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \lambda \in \mathbb{R}$
- L'ensemble des solutions d'une edo linéaire homogène est un espace vectoriel avec les mêmes opérations que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{mn}$ des matrices $m \times n$ avec
 - addition** : l'addition des matrices
 - vecteur nul** : la matrice nulle
 - multiplication par un scalaire** : la dilatation des matrices.

Dans ce cours nous nous intéresserons surtout à $\mathbb{R}^n$ pour $n = 1, 2, 3$.

155

Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Définition : Un **vecteur** $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ est un n -uplet de n nombres réels, noté

$$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n).$$

On note aussi $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces n -uplets.

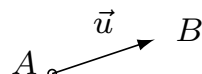
Exemple : Soient $A = (a_1, \dots, a_n)$ et $B = (b_1, \dots, b_n)$ deux **points** de l'espace affine $\mathbb{R}^n$:

- pour $n = 2$ c'est le plan cartésien muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
- pour $n = 3$ c'est l'espace cartésien muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On définit le **vecteur** $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^n$ **d'origine** A **et d'extrémité** B par

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n).$$

On le représente par une flèche allant du point A au point B .



Remarque : si on choisit par exemple $A = (0, \dots, 0)$, on représente le vecteur $\vec{u}$ par une flèche allant de l'origine du repère au point B .

156

Opérations sur les vecteurs de $\mathbb{R}^n$

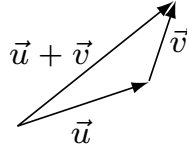
On **ajoute** deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ comme suit :

si $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, alors

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

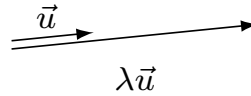
Puisque $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, on a de même $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \dots, u_n - v_n)$.

Exercice (règle du parallélogramme) : représenter dans le plan cartésien les vecteurs $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{u}' = (2, 1)$, $\vec{u}'' = \vec{u} + \vec{u}'$ en prenant pour chacun la même origine. Que remarque-t-on ?



On **dilate** un vecteur comme suit : si $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n)$$



Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

Propriétés :

- Soit $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ trois points. Alors, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Soit $A \in \mathbb{R}^n$ un point et $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

157

Combinaisons linéaires, espace vectoriel engendré

Définition : On se donne une famille finie $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- Une **combinaison linéaire** de la famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ est un vecteur $\vec{v}$ de la forme

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont des nombres réels appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(5, 4, 9)$ est une combinaison linéaire de $(1, 2, 3)$ et $(1, -1, 0)$, car $3(1, 2, 3) + 2(1, -1, 0) = (5, 4, 9)$.

- Le **sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré** par la famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de ces vecteurs :

$$\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k) = \left\{ \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, soient $\vec{i} = (1, 0, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1, 0)$. La famille $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ engendre le plan vectoriel d'équation $z = 0$, car les combinaisons linéaires de $(\vec{i}, \vec{j})$ sont les vecteurs de la forme

$$\lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0) = (\lambda, 0, 0) + (0, \mu, 0) = (\lambda, \mu, 0)$$

c'est-à-dire tous les vecteurs du plan vectoriel d'équation $z = 0$.

158

Famille libre (liée), famille génératrice

On se donne une famille finie $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ de k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition : La famille $\mathcal{F}$ est dite **libre** si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres. Autrement dit, $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si l'équation

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}$$

n'a pas d'autre solution que $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = (0, \dots, 0)$.

Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.

Exemples :

- La famille formée des vecteurs $(1, 2)$ et $(2, 1)$ est libre car aucun des deux vecteurs ne peut s'écrire comme un multiple de l'autre.
- La famille formée des vecteurs $(1, 2)$, $(2, 1)$ et $(4, 5)$ est liée car le vecteur $(4, 5)$ s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres vecteurs. En effet,

$$(4, 5) = 2 \cdot (1, 2) + 1 \cdot (2, 1)$$

- La famille formée des vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(2, 4, 6)$ est liée car $(2, 4, 6) = 2(1, 2, 3)$.

Définition : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. La famille $\mathcal{F}$ est dite **génératrice de V** si tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit comme une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$. Autrement dit, si pour chaque $\vec{v} \in V$, l'équation

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{v}, \quad \text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

admet au moins une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

159

Base, base canonique et dimension

On se donne V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Définition : Une **base** de V est une famille à la fois libre et génératrice. Autrement dit, $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est une base si pour chaque $\vec{x} \in V$, l'équation

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k = \vec{x}, \quad \text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

admet une unique solution. On dit alors que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$ est la **décomposition** du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ et que $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sont les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Définition (base canonique de $\mathbb{R}^n$) : la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ des n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ définis par

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \text{etc.}, \quad \vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

est, de façon évidente, libre et génératrice. On l'appelle la base **canonique de $\mathbb{R}^n$** .

Exemple :

- Dans $\mathbb{R}^2$, $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est la base canonique
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ est la base canonique

Théorème (admis) : Le sous-espace vectoriel V peut avoir plusieurs bases mais toutes ses bases ont le même nombre d'éléments. Ce nombre, noté $\boxed{\dim V}$, s'appelle la **dimension** de V .

160

Exemples d'espaces vectoriels engendrés et leur dimension

- Un vecteur $\vec{v} \neq \vec{0}$ engendre une droite vectorielle, de dimension 1 :

$$\Delta = \{ \lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(\vec{v})$$

- Deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ non colinéaires engendrent un plan vectoriel, de dimension 2 :

$$\pi = \{ \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

- En revanche, deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires engendrent une droite vectorielle.
- Trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non tous nuls peuvent engendrer une droite vectorielle (s'ils sont colinéaires deux à deux), un plan vectoriel (si seul un est combinaison linéaire des deux autres) ou tout l'espace $\mathbb{R}^3$ (si aucun n'est combinaison linéaire des autres).

161

Exemples de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Rappel : Une partie V de $\mathbb{R}^n$ est un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^n$, si V n'est pas vide et si pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V$, $v \in V$, on a $\lambda u + v \in V$.

Exemple de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:

- Soit a, b deux nombres réels non tous nuls et V l'ensemble des vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ tels que

$$ax + by = 0.$$

V se représente dans le plan cartésien par une droite passant par l'origine, dont un vecteur directeur est $(-b, a)$. On dit que V est une **droite vectorielle**.

Exemples de sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

- Soit a, b, c trois nombres réels non tous nuls et V l'ensemble des vecteurs $\vec{u} = (x, y, z)$ tels que

$$ax + by + cz = 0.$$

V se représente dans l'espace cartésien par un plan passant par l'origine et on dit que V est un **plan vectoriel**. Si par exemple $a \neq 0$, des vecteurs directeurs de ce plan sont $(-b, a, 0)$ et $(-c, 0, a)$.

- Soient a_1, b_1, c_1 trois nombres réels non tous nuls et a_2, b_2, c_2 trois autres nombres réels non tous nuls. Soit V l'ensemble des vecteurs $\vec{u} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

Alors V est l'intersection de deux plans vectoriels, c'est-à-dire une **droite vectorielle** ou un plan vectoriel si les deux plans sont confondus.

162

Matrice d'un vecteur dans une base

On se donne $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension m et une base $\mathcal{B}$ de V .

Définition : On appelle matrice du vecteur $\vec{x} \in V$ dans la base $\mathcal{B}$ la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ dont les coefficients sont les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Nota :

- Dans cette écriture, on omet souvent la base en indice de la matrice. Lorsqu'il est important de préciser la base par rapport à laquelle on travaille, on ne l'omet pas.
- On identifie souvent le vecteur $\vec{x}$ et sa matrice X dans une base, c'est-à-dire, qu'on se permet d'écrire $\vec{x} = X$. Ceci ne porte généralement pas à confusion, mais il faut garder à l'esprit que c'est un abus de notation (très commun d'ailleurs).

Exemple : Le vecteur $(2, -3) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $2\vec{i} - 3\vec{j}$. Sa matrice dans la base canonique $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}.$$

Par abus de notation, on écrit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

163

Déterminant de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, base orientée

Soit $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ une famille de n vecteurs.

Définition : On appelle déterminant de la famille $\mathcal{F}$ le déterminant de la matrice carrée $n \times n$ dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{u}_j$ décomposés dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^2$, si $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (3, 4)$, on a

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

- Dans $\mathbb{R}^3$, pour $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$, $\vec{w} = (2, 0, 1)$, on a

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - (1 \cdot 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0) = 9$$

Proposition : La famille $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si son déterminant est non nul.

Définition : Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{B}$ est une **base directe** (ou orientée positivement) si $\det(\mathcal{B}) = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) > 0$ et indirecte (ou orientée négativement) sinon.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^2$, on a $\det(\vec{i}, \vec{j}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$ et $\det(\vec{j}, \vec{i}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$. Donc la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$ est directe, mais la base $(\vec{j}, \vec{i})$ est indirecte.
- Dans $\mathbb{R}^3$, avec $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme précédemment, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base directe.

164

Dans cette section :

- Définition, exemples
- Lien entre applications linéaires et matrices
- Composition d'application linéaire
- Applications linéaires inversibles, isomorphismes

165

Applications linéaires : définition

Définition : Soient V et V' deux espaces vectoriels (pensez $V = \mathbb{R}^n$ et $V' = \mathbb{R}^m$). Une **application** $L : V \rightarrow V'$ est **linéaire** si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, tout $\vec{u} \in V$ et tout $\vec{v} \in V$, on a

$$L(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda L(\vec{u}) + L(\vec{v})$$

Nota : $L : V \rightarrow V'$ est linéaire si et seulement si pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$L(\lambda\vec{u}) = \lambda L(\vec{u}) \quad \text{et} \quad L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v}).$$

Propriété : Si $L : V \rightarrow V'$ est linéaire alors $L(\vec{0}) = \vec{0}$.

Exemples d'applications linéaires :

- $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y) = (3x + y, -y, y - 2x)$
- $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (z, x - y + z)$
- $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y, z) = (0, 0, z)$

Exemples d'applications non linéaires :

- $L(x, y, z) = (x^2, y)$
- **Translation** par un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$: $T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T_{\vec{v}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}$.

Propriété : Une application linéaire est entièrement déterminée par ses valeurs sur une base.

Proposition : L'ensemble des applications linéaires de V vers V' est un espace vectoriel.

166

Lien entre applications linéaires et matrices I

Proposition : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ une matrice de taille $m \times n$. L'application $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par

$$L_A(x_1, \dots, x_n) = \left((a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n), \dots, (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \right)$$

est linéaire. Réciproquement, pour toute application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}$ telle que $L = L_A$ (il n'y a pas unicité de la matrice).

Preuve : En utilisant la définition de L_A , il est facile de voir que pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $L_A(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda L_A(\vec{u}) + L_A(\vec{v})$. Donc L_A est linéaire.

Réciproquement, soit $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Notons $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $a_{1j}, \dots, a_{mj} \in \mathbb{R}^m$ tels que

$$L(\vec{e}_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$$

les nombres $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ sont simplement les coordonnées du vecteur $L(\vec{e}_j) \in \mathbb{R}^m$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Posons $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}$ et vérifions que $L = L_A$. On a

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n) &= L(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1L(\vec{e}_1) + \dots + x_nL(\vec{e}_n) \\ &= x_1(a_{11}, \dots, a_{m1}) + \dots + x_n(a_{1n}, \dots, a_{mn}) \\ &= (a_{11}x_1, \dots, a_{m1}x_1) + \dots + (a_{1n}x_n, \dots, a_{mn}x_n) \\ &= \left((a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n), \dots, (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \right) \\ &= L_A(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

167

Lien entre applications linéaires et matrices II

Soit $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

La matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}$ construite précédemment telle que $L = L_A$ est la matrice de L dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ (on l'appellera la matrice de L). Autrement dit, si on note $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$, on a

$$L(\vec{x}) = \vec{y} \iff AX = Y \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

où X et Y sont les matrices des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

Nota :

- Les représentations matricielles des vecteurs et des applications linéaires et donc les identifications des espaces, dépendent des bases choisies. Dans ce cours, nous travaillerons toujours (ou presque) dans les bases canoniques.
- Par abus de notation, on écrit souvent

$$L(\vec{x}) = \vec{y} \iff A\vec{x} = \vec{y}.$$

168

Exercice : lien entre applications linéaires et matrices

Exercice : Pour les matrices A suivantes, trouver l'application linéaire L correspondante.

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Solution : On a $A \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$, donc $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 4z \\ -x + 3y - 2z \end{pmatrix}.$$

On a donc $L(x, y, z) = (5x + 4z, -x + 3y - 2z)$.

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Solution : On a $A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, donc $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - y \\ 3y \\ 4x - 2y \end{pmatrix}.$$

On a donc $L(x, y) = (5x - y, 3y, 4x - 2y)$.

Nota : pour trouver L , on a effectué le produit matriciel $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

169

Exercice : lien entre applications linéaires et matrices

Exercice : Pour les applications linéaires L suivantes, trouver la matrice A correspondante.

- $L(x, y, z) = (x - z, 3y + z - 2x)$

Solution : On a $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donc $A \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$: on écrit

$$\begin{pmatrix} x - z \\ -2x + 3y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donc la matrice associée à L est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- $\text{Rot}_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ (**rotation d'angle θ**)

Solution : On a $\text{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donc $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$: on écrit

$$\begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{Rot}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donc la matrice de rotation d'angle θ est $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Nota : pour trouver A , on a écrit le vecteur colonne associé à $L(x, y)$ sous forme d'un produit matriciel.

170

Exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: on note ici les vecteurs en colonne.

- **Rotation** d'angle θ :
$$\text{Rot}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- **Réflexion** autour d'un axe formant un angle θ avec l'axe des abscisses :

$$\text{Ref}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(2\theta) + y \sin(2\theta) \\ x \sin(2\theta) - y \cos(2\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- **Projection** sur $(O\vec{i})$ parallèlement à $\vec{j}$:
$$P_{\vec{i}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Projection** sur $(O\vec{j})$ parallèlement à $\vec{i}$:
$$P_{\vec{j}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

171

Composition d'applications linéaires

Définition : La **composée** de deux applications linéaires $L : V \rightarrow V'$ et $L' : V' \rightarrow V''$ est l'application $L' \circ L : V \rightarrow V''$, aussi linéaire, définie pour $\vec{u} \in V$ par

$$(L' \circ L)(\vec{u}) = L'(L(\vec{u})).$$

Remarque : Pour que la composée ait un sens, l'espace d'arrivée de L doit correspondre à l'espace de départ de L' .

Exemple : Si $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $L' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont données par

$$L(x, y, z) = (3x + z, 2z - y) \quad \text{et} \quad L'(u, v) = (u + 2v, 3v - u),$$

alors on peut calculer la composée $L' \circ L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (L' \circ L)(x, y, z) &= L'(L(x, y, z)) \\ &= L'(3x + z, 2z - y) \\ &= ((3x + z) + 2(2z - y), 3(2z - y) - (3x + z)) \\ &= (3x + z + 4z - 2y, 6z - 3y - 3x - z) \\ &= (3x - 2y + 5z, -3x - 3y + 5z). \end{aligned}$$

Propriété : Lorsque les produits et composées ont un sens, on a

$$L_{AB} = L_A \circ L_B.$$

Nota : c'est la formule qui justifie la définition du produit de matrices qui a été défini afin qu'il corresponde à la composition des application linéaires.

172

Inverse d'une application linéaire

Définition : Si elle existe, l'**inverse** (ou la réciproque) de l'application linéaire $L : V \rightarrow V'$ est l'application $L^{-1} : V' \rightarrow V$, aussi linéaire, telle que, pour tout $\vec{u} \in V$ et pour tout $\vec{v} \in V'$,

$$\boxed{(L^{-1} \circ L)(\vec{u}) = \vec{u}} \quad \text{et} \quad \boxed{(L \circ L^{-1})(\vec{v}) = \vec{v}}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{L^{-1} \circ L = \text{id}_V} \quad \text{et} \quad \boxed{L \circ L^{-1} = \text{id}_{V'}}.$$

On dit alors que L est **invertible**.

Exemple : Si $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est donnée par $L(x, y) = (3x + y, -y)$, alors

$$L^{-1}(u, v) = \left(\frac{u+v}{3}, -v \right),$$

car pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} L(x, y) = (3x + y, -y) = (u, v) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = u \\ -y = v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = u - y = u - (-v) = u + v \\ y = -v \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{u+v}{3}, -v \right) = L^{-1}(u, v). \end{aligned}$$

173

Isomorphismes

Soient V et V' deux espaces vectoriels de dimension finie.

Définition Une application linéaire invertible $L : V \rightarrow V'$ est appelée **isomorphisme**. On dit alors que V et V' sont **isomorphes** et on note $\boxed{V \simeq V'}$.

Proposition : Soit $L : V \rightarrow V'$ un isomorphisme.

- L transforme une base de V en une base de V' . En particulier, $\boxed{\dim V = \dim V'}$.
- Réciproquement, si $\dim V = \dim V'$, alors $V \simeq V'$.

Propriétés : Soit $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire de matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}$ (c'est-à-dire $L = L_A$). On a

$$\boxed{L \text{ est un isomorphisme} \iff A \text{ est inversible} \iff \det A \neq 0.}$$

Exemples :

- L'application $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $L(x, y) = (3x + y, -y)$ est un isomorphisme, car elle est linéaire et a l'inverse $L^{-1}(u, v) = \left(\frac{u+v}{3}, -v \right)$.
- La projection $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $P(x, y, z) = (x, y)$ est linéaire mais ce n'est pas un isomorphisme car elle n'a pas d'inverse. *Pourquoi ?*
- L'application $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $L(x) = x^3$ a l'inverse $L^{-1}(u) = \sqrt[3]{u}$ mais ce n'est pas un isomorphisme car elle n'est pas linéaire.

174

TMB – Chapitre 8

Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Dans ce chapitre :

- 8.1 Généralités (dans $\mathbb{R}^n$)
- 8.2 Isométries et matrices orthogonales
- 8.3 Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$
- 8.4 Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^3$

175

8.1 – Généralités

Dans cette section :

- Angle orienté entre vecteurs
- Produit scalaire, norme, distance
- Écriture du produit scalaire sous forme matricielle

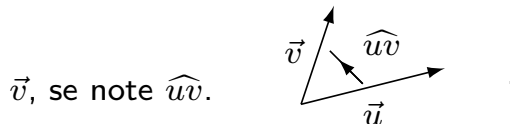
176

8.1a – Angle orienté entre vecteurs

Deux vecteurs étant toujours coplanaires (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même plan vectoriel), on peut toujours les représenter dans le plan cartésien $\mathbb{R}^2$.

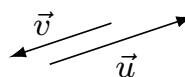
Définitions : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs (de même origine) de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$) non nuls, que l'on identifie à leurs représentations dans le plan cartésien (resp. l'espace cartésien).

- L'**angle orienté** de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$, que l'on mesure dans le plan engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et



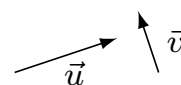
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **parallèles**, ou **colinéaires**, ce qu'on

note $\vec{u} \parallel \vec{v}$ si $\sin(\widehat{uv}) = 0$.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **perpendiculaires**, ou **orthogonaux**, ce qu'on

note $\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\cos(\widehat{uv}) = 0$.



- On appelle **mesure principale** (en radians) de l'angle $\widehat{uv}$ le nombre réel $\theta \in [0, \pi]$ défini par $\theta = \arccos(\cos(\widehat{uv}))$.

177

8.1b – Produit scalaire euclidien et norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

Définition : Soient $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le **produit scalaire euclidien** (ou canonique) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (ou encore $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$) et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Nota : le produit scalaire est une application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Propriétés élémentaires du produit scalaire : le produit scalaire est une application bilinéaire, symétrique et définie positive. Autrement dit, pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\{\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}\}$

Définition : la **norme euclidienne** (c'est-à-dire la "longueur") d'un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, notée $\|\vec{u}\|$, est définie par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

En particulier, la **distance euclidienne** entre deux points A et B du plan (resp. de l'espace) cartésien est donnée par $\text{dist}(A, B) = \|\vec{AB}\|$.

Exemple : pour $(1, 2, 3)$ et $(4, -5, 6)$ dans $\mathbb{R}^3$, on a

$$(1, 2, 3) \cdot (4, -5, 6) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 6 = 4 - 10 + 18 = 12,$$

$$\|(1, 2, 3)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

178

Exercice : Écrire le produit scalaire sous forme matricielle.

Exercice : Dans l'espace euclidien, calculer la distance du point P de coordonnées $(3, -1, 2)$ à l'origine O de coordonnées $(0, 0, 0)$, puis celle du point P au point Q de coordonnées $(1, 0, 3)$.

Solution : La distance entre $P(x, y, z)$ et O est égale à la longueur du vecteur

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire sa norme } \|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On a donc :

$$\text{dist}(O, P) = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}.$$

La distance entre $P(x, y, z)$ et $Q(a, b, c)$ est égale à la longueur du vecteur

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - c \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\text{dist}(Q, P) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (-1 - 0)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

179

Propriétés du produit scalaire

Proposition : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{uv})$$

Preuve : Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est évident. Sinon, commençons par montrer le résultat pour $n = 2$. En identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, on peut écrire

$$\vec{u} = (a, b) \equiv a + ib = \rho e^{i\theta}, \quad \vec{v} = (c, d) \equiv c + id = \rho' e^{i\theta'},$$

avec $\rho, \rho' \in \mathbb{R}_+$ et $\theta, \theta' \in]-\pi, \pi]$. En remarquant que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd = \text{Re} \left((a + ib)(\overline{c + id}) \right), \quad \rho = \|\vec{u}\|, \quad \rho' = \|\vec{v}\|, \quad \theta - \theta' = \widehat{uv},$$

on obtient (en utilisant les propriétés de l'exponentielle et le fait que ρ et ρ' sont réels),

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \text{Re} \left(\rho e^{i\theta} \overline{\rho' e^{i\theta'}} \right) = \rho \rho' \text{Re} \left(e^{i(\theta - \theta')} \right) = \rho \rho' \cos(\theta - \theta') = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{uv}).$$

Maintenant, pour un n quelconque, puisque deux vecteurs appartiennent toujours à un même plan, on peut identifier ce plan à $\mathbb{C}$ et raisonner comme précédemment.

Corollaire : Le produit scalaire caractérise les vecteurs orthogonaux. Autrement dit,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$$

180

Exercice : Les vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} = (1, -1, 3)$ et $\vec{v} = (-1, 2, 1)$ sont-ils parallèles ou orthogonaux ?

Solution : Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 - 2 + 3 = 0,$$

dont $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. En particulier, puisqu'aucun des deux vecteurs est nul, ils ne sont pas parallèles.

181

8.2 – Isométries et matrices orthogonales

Dans cette section :

- Définition, propriétés
- Matrices orthogonales
- Déplacements et antidéplacements

182

Définition, premières propriétés

Définition : Une isométrie (vectorielle) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui conserve la norme euclidienne des vecteurs. Autrement dit,

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \|L(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|.$$

Proposition : Une isométrie (vectorielle) $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ préserve le produit scalaire. Autrement dit, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Preuve : Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Par définition d'une isométrie, on a

$$\|L(\vec{u} + \vec{v})\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2. \quad (*)$$

Par définition de la norme, on a, d'une part

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad (**)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \|L(\vec{u} + \vec{v})\|^2 &= (L(\vec{u} + \vec{v})) \cdot (L(\vec{u} + \vec{v})) = (L(\vec{u}) + L(\vec{v})) \cdot (L(\vec{u}) + L(\vec{v})) \quad (\text{par linéarité de } L) \\ &= L(\vec{u}) \cdot L(\vec{u}) + 2L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) + L(\vec{v}) \cdot L(\vec{v}) \\ &= \|L(\vec{u})\|^2 + 2L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) + \|L(\vec{v})\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) + \|\vec{v}\|^2, \quad (\text{car } L \text{ est une isométrie}) \end{aligned} \quad (***)$$

De (*), (**), (***), on déduit (après simplification) $L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Proposition : Une isométrie préserve la mesure (principale) des angles des vecteurs.

183

Représentation matricielle des isométries : matrices orthogonales

Définition : La **transposée** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est la matrice $A^T \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont définis par permutation de l'indice de ligne et de colonne :

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Autrement dit, les colonnes de A^T sont les lignes de A (et vice versa).

Exemples : $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (0 \quad 3), \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

Propriétés :

- Si le produit matriciel AB a du sens, $(AB)^T = B^T A^T$.
- Si A est une matrice carrée, $\det(A^T) = \det(A)$

Définition : Une matrice carrée A est **orthogonale** si $AA^T = \mathbb{1}$.

Propriétés : Si A est orthogonale, alors A est inversible et $A^{-1} = A^T$, $\det(A) = \pm 1$.

Preuve : $1 = \det(\mathbb{1}) = \det(AA^T) = \det(A) \det(A^T) = (\det(A))^2$.

Exemples de matrices orthogonales :

- les rotations : $\text{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- les réflexions : $\text{Ref}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

184

Proposition :

Une transformation linéaire du plan ou de l'espace est une isométrie si et seulement si sa matrice associée est orthogonale.

On distingue alors

- les **isométries directes**, données par des matrices orthogonales A avec $\det(A) = +1$, qui préservent l'orientation. Ce sont les **rotations** (autour de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, autour d'un axe passant par $(0, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$);
- les **isométries indirectes**, données par des matrices orthogonales A avec $\det(A) = -1$, qui inversent l'orientation. Ce sont les **réflexions** (par rapport à une droite passant par $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$, par rapport à un plan passant par $(0, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$).

Définition : Une isométrie affine de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est la composée d'une isométrie vectorielle et d'une translation. On appelle :

- **déplacement** la composée d'une isométrie directe et d'une translation ;
- **antidéplacement** la composée d'une isométrie indirecte et d'une translation.

Nota : une isométrie reproduit n'importe quelle figure à l'échelle 1.

185

Exercice

Exercice : Les transformations données par les matrices suivantes, sont-elles des isométries (directes ou indirectes) ou des projections ?

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solution : On a (en développant par rapport à la première ligne)

$$\det(A) = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1,$$

donc A est inversible (un isomorphisme), car $\det(A) \neq 0$. Après calculs, on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T,$$

donc A est une matrice orthogonale, donc une isométrie. Puisque $\det(A) = 1$, c'est une isométrie directe, c'est-à-dire une rotation. Effectivement,

$$A = \begin{pmatrix} \cos(3\pi/2) & -\sin(3\pi/2) & 0 \\ \sin(3\pi/2) & \cos(3\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rot}_{3\pi/2}^{Oz},$$

donc cette matrice représente la rotation d'angle $3\pi/2$ autour de l'axe Oz .

186

Exercice (suite)

- $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solution : On a $\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, donc B est inversible. Après calculs, on trouve

$B^{-1} = B^T (= B)$, donc B est une matrice orthogonale. Puisque $\det(B) = -1$, c'est une réflexion isométrie indirecte. Effectivement,

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & 0 & \sin(\pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\pi/2) & 0 & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \text{Ref}_{\pi/4}^{xOz},$$

qui représente la réflexion par rapport à un plan contenant l'axe Oy et qui intersecte le plan xOz en une droite penchée de $\pi/4$ sur Ox .

- $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solution : Puisque $\det(C) = 0$, la matrice n'est pas inversible, donc elle ne représente pas une isométrie. C n'est pas une projection orthogonale (ou isométrique), car $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 10$ implique que la matrice C dilate les longueurs.

187

8.3 – Géométrie euclidienne dans le plan et dans l'espace

Dans cette section :

- Droites du plan
- Coniques
- Lien avec les complexes (distance, isométries)

188

Droites affines du plan

Définition : Soient a, b, c des nombres réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Une **droite** Δ est formée des points du plan cartésien de coordonnées (x, y) telles que

$$ax + by + c = 0$$

On retrouve l'équation d'une droite vectorielle dans le cas où $c = 0$.

- Le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est **orthogonal** ou **normal** à la droite Δ .
- Les vecteurs $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sont des **vecteurs directeurs** de la droite Δ .

Exemples :

$x - 5y = 0$ est l'équation d'une droite vectorielle de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$x + 3 = 5y$ est l'équation d'une droite affine admettant le même vecteur directeur. Elle lui est donc parallèle.

Nota : Une droite est entièrement déterminée par (au choix) :

- deux points distincts ;
- un point et un vecteur directeur ;
- un point un vecteur normal.

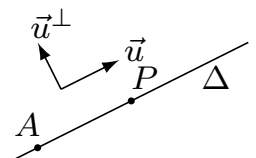
189

Équations cartésiennes et paramétriques des droites du plan

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on définit $\vec{u}^\perp = (-u_2, u_1)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}^\perp$ sont orthogonaux.

On note Δ la droite du plan passant par $A(a_1, a_2) \in \Delta$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2) \neq \vec{0}$. Le point $P(x, y)$ appartient à Δ si et seulement si

$$\boxed{\overrightarrow{AP} \parallel \vec{u}}. \quad (\text{condition})$$



Équation cartésienne de Δ : elle s'obtient en remarquant que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \parallel \vec{u} &\iff \det(\overrightarrow{AP}, \vec{u}) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} x - a_1 & u_1 \\ y - a_2 & u_2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x - a_1)u_2 - (y - a_2)u_1 = 0 \quad (\text{équation cartésienne}) \\ &\iff \overrightarrow{AP} \perp \vec{u}^\perp = 0 \end{aligned}$$

Équation (linéaire) paramétrique de Δ : elle s'obtient en remarquant que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \parallel \vec{u} &\iff \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R} \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{équation paramétrique de } \Delta) \end{aligned}$$

Dans le système ci-dessus, λ est le paramètre.

190

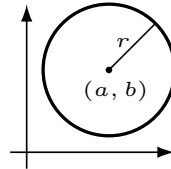
Coniques : cercle, ellipse

Définition : Une conique est une courbe plane obtenue en prenant l'intersection entre un cône de révolution et un plan. Analytiquement, on définit une conique comme l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

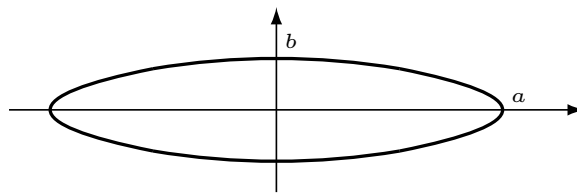
• **Cercle :** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

centre (a, b) , rayon r



• **Ellipse :** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

centre $(0, 0)$, axes $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

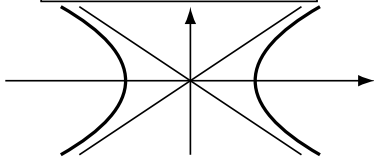


191

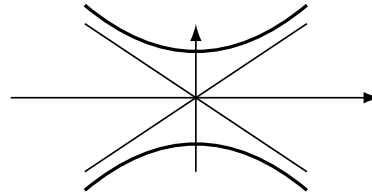
Coniques : hyperbole, parabole

• **Hyperbole :** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ centre $(0, 0)$, axes $\vec{i}$ et $\vec{j}$, asymptotes $y = \pm \frac{b}{a}x$

cas **+1** :

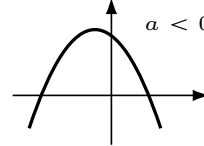
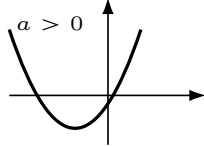
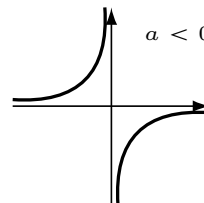
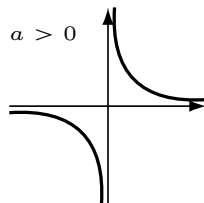


cas **-1** :



ou bien : $y = \frac{a}{x}$

centre $(0, 0)$, asymptotes $\vec{i}$ et $\vec{j}$

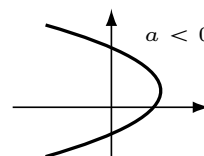
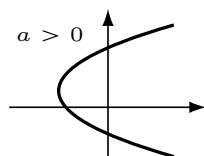


• **Parabole :** $y = ax^2 + bx + c$

axe parallèle à $\vec{j}$

ou bien : $x = ay^2 + by + c$

axe parallèle à $\vec{i}$



192

Dans cette section :

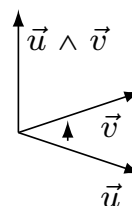
- Produit vectoriel
- Plans de $\mathbb{R}^3$
- Droites de $\mathbb{R}^3$
- Surfaces quadriques

193

Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Définition : Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et caractérisé par :

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ forment une base, alors elle est directe (c'est-à-dire $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) > 0$) ;
- la norme de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est égale à l'aire du parallélogramme défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, i.e., $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\widehat{uv})|$



Propriétés du produit vectoriel :

- **bilinéarité :**
 $(\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v})$,
 $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$, et $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.
- **anti-symétrie :** $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- le produit vectoriel caractérise les vecteurs parallèles : $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$
- en coordonnées cartésiennes, le produit vectoriel se calcule comme suit :

$$(x, y, z) \wedge (x', y', z') = (yz' - y'z, -xz' + x'z, xy' - x'y) .$$

Exemple :

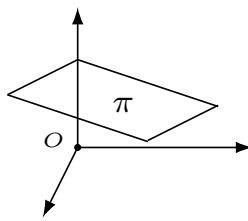
$$(1, 2, 3) \wedge (4, -5, 7) = (2 \cdot 7 - 3 \cdot (-5), 3 \cdot 4 - 1 \cdot 7, 1 \cdot (-5) - 2 \cdot 4) = (29, 5, -13)$$

194

Plans affines de l'espace

Définition : Soient a, b, c, d des nombres réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

- Un **plan** π est formé des points de l'espace cartésien de coordonnées (x, y, z) telles que



$$ax + by + cz + d = 0$$

- $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un **vecteur orthogonal** ou **normal** à π .

Exemple :

$x - 5y - 2z = 0$ est l'équation d'un plan vectoriel, de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$x + 3 = 5y + 2z$ est l'équation d'un plan affine de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Nota : Un plan est entièrement déterminé par (au choix) :

- trois points non alignés ;
- un point et deux vecteurs tangents non colinéaires ;
- un point un vecteur normal.

195

Équations cartésiennes et paramétriques des plans de l'espace

On note π le plan passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et de vecteurs tangents $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ non colinéaires (c.-à-d. $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$). Le point $P(x, y, z)$ appartient à π si et seulement si

$$\overrightarrow{AP} \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \iff \overrightarrow{AP} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}. \quad (\text{condition})$$

Équation cartésienne de π : elle s'obtient en remarquant que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) &\iff \det(\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 && (\text{équation cartésienne}) \\ &\iff \overrightarrow{AP} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0 \end{aligned}$$

Équation (linéaire) paramétrique de π : elle s'obtient en remarquant que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) &\iff \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \iff \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(équation paramétrique de π)

Dans le système ci-dessus, λ et μ sont les paramètres.

196

Droites de l'espace

Définition : Une droite affine Δ de l'espace $\mathbb{R}^3$ est l'intersection de deux plans affines π et π' non parallèles.

$$P(x, y, z) \in \Delta = \pi \cap \pi' \iff \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases},$$

avec $(0, 0, 0) \neq (a, b, c) \nparallel (a', b', c') \neq (0, 0, 0)$.

Exemples :

- La droite d'équations $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ est l'axe Oz (vectoriel).
- La droite d'équations $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ est parallèle à l'axe Oz (affine).
- La droite Δ passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ est caractérisée par :

$$P(x, y, z) \in \Delta \iff \overrightarrow{AP} \parallel \vec{v} \iff \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ceci se réécrit :

équations paramétriques :

$$\begin{cases} x - a_1 = \lambda v_1 \\ y - a_2 = \lambda v_2 \\ z - a_3 = \lambda v_3 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

équations cartésiennes :

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

197

Surfaces Quadriques

Une surface quadrique $\mathcal{Q}$ est une surface de l'espace euclidien de dimension 3 définie par :

$$\mathcal{Q} = \left\{ (x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0 \right\}, \text{ où } f(x, y, z) \text{ est un polynôme de degré 2.}$$

Quadriques les plus connues :

• **Cylindre**

$$x^2 + y^2 = r^2$$

• **Sphère**

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

• **Cône**

$$x^2 + y^2 = z^2$$

• **Ellipsoïde**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

• **Paraboloïde elliptique**

$$z = x^2 + y^2$$

• **Hyperboloïde à une nappe**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

• **Paraboloïde hyperbolique**

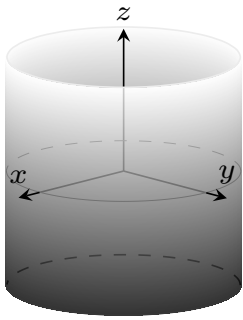
$$z = x^2 - y^2$$

• **Hyperboloïde à deux nappes**

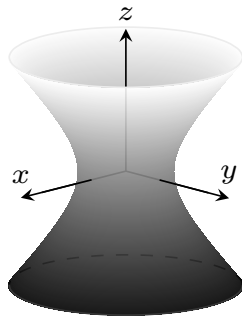
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

198

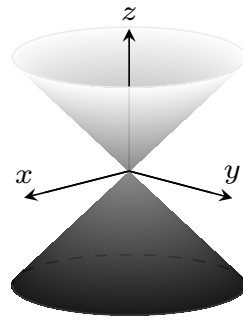
Quelques images de surfaces quadriques



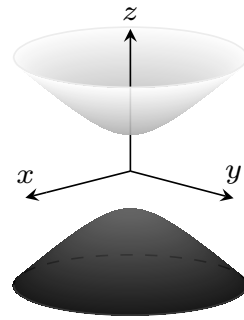
Cylindre



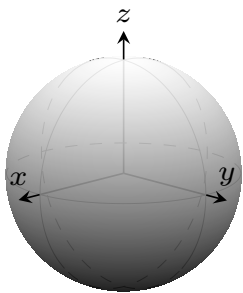
Hyperboloïde
à une nappe



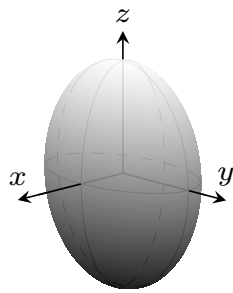
Cône



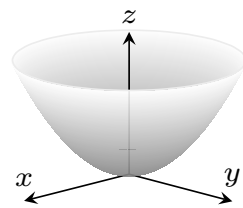
Hyperboloïde
à deux nappes



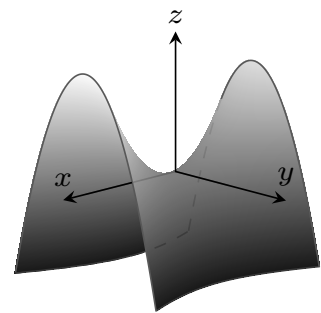
Sphère



Ellipsoïde



Paraboloïde
elliptique



Paraboloïde
hyperbolique