

FORMULAIRE SUR FONCTIONS CIRCULAIRES

1. Quelques valeurs particulières :

$$\begin{aligned}
 \cos(0) &= 1, & \sin(0) &= 0, & \tan(0) &= 0, & \cot(0) &= \pm\infty \\
 \cos(\pi/6) &= \sqrt{3}/2, & \sin(\pi/6) &= 1/2, & \tan(\pi/6) &= \sqrt{3}/3, & \cot(\pi/6) &= \sqrt{3} \\
 \cos(\pi/4) &= \sqrt{2}/2, & \sin(\pi/4) &= \sqrt{2}/2, & \tan(\pi/4) &= 1, & \cot(\pi/4) &= 1 \\
 \cos(\pi/3) &= 1/2, & \sin(\pi/3) &= \sqrt{3}/2, & \tan(\pi/3) &= \sqrt{3}, & \cot(\pi/3) &= \sqrt{3}/3 \\
 \cos(\pi/2) &= 0, & \sin(\pi/2) &= 1, & \tan(\pi/2) &= \pm\infty, & \cot(\pi/2) &= 0 \\
 \cos(\pi) &= -1, & \sin(\pi) &= 0, & \tan(\pi) &= 0, & \cot(\pi) &= \pm\infty \\
 \cos(3\pi/2) &= 0, & \sin(3\pi/2) &= -1, & \tan(3\pi/2) &= \pm\infty, & \cot(3\pi/2) &= 0.
 \end{aligned}$$

2. Périodicité : pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned}
 \cos(x + 2k\pi) &= \cos x & \tan(x + k\pi) &= \tan x \\
 \sin(x + 2k\pi) &= \sin x & \cot(x + k\pi) &= \cot x
 \end{aligned}$$

3. Egalité :

$$\begin{aligned}
 \cos x = \cos y &\iff x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 \sin x = \sin y &\iff x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + (2k + 1)\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 \tan x = \tan y &\iff x = y + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
 \cot x = \cot y &\iff x = y + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

4. Identité circulaire : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

5. Expression de $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $\cos x$ et de $\cos x$ et $\cot x$ en fonction de $\sin x$:

$$\begin{aligned}
 \sin x &= \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} & \cos x &= \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} \\
 \tan x &= \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} & \cot x &= \pm\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}
 \end{aligned}$$

6. Formules d'addition :

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} & \tan(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.\end{aligned}$$

7. Formules de duplication :

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\ \sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\ \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.\end{aligned}$$

8. Expression de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan(x/2)$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

9. Formules de linéarisation :

$$\begin{aligned}\cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) & \sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos x \sin y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y)) & \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} & \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2}\end{aligned}$$

10. Formules de factorisation :

$$\begin{aligned}\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\end{aligned}$$

11. Formules relatives aux angles associés :

(a) Angles opposés :

$$\cos(-x) = \cos x \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \tan(-x) = -\tan x.$$

Donc la fonction $\cos$ est paire et la fonction $\sin$ est impaire.

(b) Angles supplémentaires :

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad \tan(\pi - x) = -\tan x.$$

(c) Angles complémentaires :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}.$$

(d) Angles "de différence π " :

$$\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \sin(x + \pi) = -\sin x \quad \tan(x + \pi) = \tan x.$$