LICENCE 1ère année TMB 4 mars 2008

FICHE 3 - EXERCICES SUR FONCTIONS RECIPROQUES

EXERCICES OBLIGATOIRES

Exercice 1 Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes :

a) $\cos 4x = \sin 7x$, b) $\cos^2 x = 1/4$, c) $\sin 2x = \cos^2 x$,

d) $\cos 2x + 2\sin x \cos x = 0$, e) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 5x$.

Exercice 3 Calculer

a) $\arcsin \frac{1}{2}$, b) $\arctan \frac{-1}{\sqrt{3}}$, c) $\arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)$,

d) $\arctan\left(\tan \frac{9\pi}{4}\right)$, e) $\arcsin\left(\sin \frac{-9\pi}{4}\right)$, f) $\tan(\arctan 3)$.

Exercice 4 Les équations suivantes ont elles des solutions ? Si les solutions existent, les déterminer.

a) $\arcsin x = \frac{2\pi}{3}$, b) $\arctan x = \frac{2\pi}{3}$,

c) $\arcsin x + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$, d) $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$,

e) $\arccos x + \arctan \frac{1}{2} = \pi$.

Exercice 5 Trouver une expression polynomiale pour les fonctions

a) $f(x) = \arccos(\cos x)$, quand $x \in [\pi; 2\pi]$,

b) $f(x) = \arcsin(\sin x)$, quand $x \in [-3\pi/2; -\pi/2]$.

Exercice 6 Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$, b) $2\text{ch}x + 3\text{sh}x = 1$,

c) $\text{ch}x + 2\text{sh}x = 1$, d) $3\text{ch}x + 2\text{sh}x = 4$.

Exercice 7

a) Calculer $\text{ch}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$ et $\text{sh}\left(\frac{1}{2}\ln 3\right)$.

b) A l'aide de la formule d'addition $\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(b)\text{sh}(a)$ et de la question précédente, déterminer les solutions réelles de l'équation :

$$2\text{ch}x + \text{sh}x = \sqrt{3}\text{ch}(5x).$$

EXERCICES FACULTATIFS

Exercice 8 Exprimer en fonction de $\tan x$ seulement :

a) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$, b) $\dfrac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$, c) $\cos^2 x - \sin x \cos x$.

Exercice 9 Soient a, b deux réels. Montrer qu'il existe deux constantes A et α telles que :

$$a \cos x + b \sin x = A \cos(x - \alpha) \quad \text{quelque soit } x \in \mathbb{R}.$$

En déduire la résolution de l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 10 Démontrer que :

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{pour tout } x \in [-1, 1],\\
&\text{b)} \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{si } x > 0,\\
&\text{c)} \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{si } x < 0.
\end{aligned}$$

Exercice 11 Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$, b) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x}$,

c) $f(x) = \arccos \sqrt{x}$, d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$,

e) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$, f) $f(x) = \arctan \dfrac{2x}{1 - x^2}$,

g) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2} - 2 \arctan x$, h) $f(x) = \arccos \dfrac{x}{2 - x}$.

Exercice 12 Soient x et y deux réels distincts. Montrer que l'on a :

$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}.$$

Interpréter cette inégalité sur le graphe de la fonction $x \to e^x$.

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivantes :

a) $\begin{cases} x + y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \text{ch}x + \text{ch}y = 3 \\ \text{sh}x + \text{sh}y = 2 \end{cases}$