LICENCE 1ère année TMB 11 mars 2008

FICHE 4 - EXERCICES SUR DERIVEES ET ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICES OBLIGATOIRES

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}$, b) $f(x) = \dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}$,

c) $f(x) = x\sin x + \cos x$, d) $f(x) = \sqrt{1+x^2\cos^2 x}$,

e) $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, f) $f(x) = \ln\sqrt{1-2\sin^2 x}$,

g) $f(x) = \ln|\tan(x/2)|$, h) $f(x) = \ln|\ln x|$,

i) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$, j) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$,

k) $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, l) $f(x) = \arcsin\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$,

m) $f(x) = \arctan(\ln x)$, n) $f(x) = \arctan\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$,

o) $f(x) = \arcsin(2x^2-1)$, p) $f(x) = \arccos\sqrt{x}$,

Exercice 2 Etudier les fonctions suivantes (tableau de variations et graphe) :

a) $f(x) = \arctan\dfrac{2x}{1-x^2}$, b) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} - 2\arctan x$,

c) $f(x) = \arccos\dfrac{x}{2-x}$, d) $f(x) = \mathrm{th}\dfrac{1}{x}$.

Exercice 3 Montrer que les fonctions suivantes sont dérivable sur $\mathbb{R}$ et en calculer la dérivée.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(3-x^2), & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. b) $f(x) = \begin{cases} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 4 Trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \sin(3x)$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

c) $f(x) = e^{2x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$;

d) $f(x) = \mathrm{ch}(2x)$ autour de $x_0 = 0$;

e) $f(x) = \ln(1+2x)$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$;

f) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$;

g) $f(x) = \cos^2 x$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

h) $f(x) = \sqrt{1+\arcsin x}$ autour de $x_0 = 0$.

EXERCICES FACULTATIFS

Exercice 5 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

a) $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^3-1}$,

b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{x}+1}$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$,

d) $f(x) = x - \ln x$,

e) $f(x) = \sqrt{\cos^2(x)+1}$,

f) $f(x) = \dfrac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x$,

g) $f(x) = x\ln x$,

h) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$,

i) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x^2+1}}$,

j) $f(x) = \ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$,

k) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$,

l) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$,

m) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x}$,

n) $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$,

o) $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x}}$.

Exercice 6 Etudier les fonctions suivantes (tableau de variations et graphe) :

a) $f(x) = x^2(x-2)^2$,

b) $f(x) = x^2(x-1)^3$,

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$,

d) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$,

e) $f(x) = \mathrm{th}x - \dfrac{1}{\mathrm{ch}x}$.

Exercice 7 Montrer que la fonction $f(x) = |x^2-3|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Etudier les variations et tracer le graphe de cette fonction.

Exercice 8 En utilisant la formule de Taylor, montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Pour quelles valeurs de $x \geq 0$ peut-on dire que $x - \dfrac{x^2}{2}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-3} près ?

Exercice 9 Trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{e^x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \ln(1+\sin x)$ autour de $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \arcsin(2x)$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$;

d) $f(x) = \mathrm{sh}(x+x^2)$ autour de $x_0 = 0$;

e) $f(x) = \mathrm{ch}(x+x^2)$ autour de $x_0 = 0$;

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$.