FICHE 7 - EXERCICES DE GEOMETRIE

EXERCICES OBLIGATOIRES

Exercice 1 On considère les deux vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ du plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer les scalaires $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et l'aire du parallelogramme de cotés $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Calculer et dessiner les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$, les deux vecteurs $\vec{u}^{\perp}$ orthogonaux à $\vec{u}$ et de même norme, et l'image de $\vec{u}$ par la projection orthogonale dans la direction de $\vec{v}$.

Exercice 2 On considère les deux points $A = (1, 3)$ et $B = (-1, 0)$ du plan. Déterminer :

1. la distance entre A et B ;
2. l'équation de la droite Δ passant par A et B ;
3. l'équation de la droite parallèle à Δ passant par O ;
4. l'équation de la droite orthogonale à Δ passant par O.

Exercice 3 On considère le point $A = (5, 3)$ du plan et la droite Δ d'équation $x - y + 1 = 0$. Déterminer :

1. la distance du point A à la droite Δ et la projection orthogonale de A sur Δ ;
2. l'équation de la droite parallèle à Δ passant par A ;
3. l'équation de la droite perpendiculaire à Δ passant par A.

Exercice 4 On considère les points $A = (2, 5)$, $B = (8, -1)$ et $C = (10, 5)$ du plan, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\vec{AD} = 9\vec{i} + 3\vec{j}$ et montrer que les points B, C, D sont alignés.
2. Déterminer le point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme et en calculer l'aire.

Exercice 5 On considère les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, et $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ de l'espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Calculer les scalaires $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et le volume du parallélépipède de cotés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
2. Calculer les vecteurs $\vec{u}\wedge\vec{v}$, $\vec{v}\wedge\vec{u}$, $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$, $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ et leur image par la projection orthogonale de direction $\vec{w}$.

Exercice 6 On considère le point $A = (1, 2, 3)$ de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ecrire l'équation du plan

1. passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$;
2. passant par A et parallèle au plan $3x - 2y + 4z - 5 = 0$;
3. passant par A, $B = (3, -2, 1)$ et $C = (5, 0, -4)$.

Exercice 7 On donne les trois points $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 0, 1)$ et $C = (1, 1, 0)$ de l'espace $\mathbb{R}^3$. Déterminer :

1. l'équation du plan π passant par les points A, B, C et l'intersection de π avec les trois axes ;
2. la distance du plan π de l'origine O et la projection orthogonale de O sur π ;
3. l'équation paramétrique de la droite Δ passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{BC}$, et l'intersection $\pi \cap \Delta$;
4. le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$.

EXERCICES FACULTATIFS

Exercice 8 Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$. (Indication : introduire le point I milieu de $[AB]$.)
3. Considérer le mêmes questions dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9 Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tels que $\vec{AM} \wedge \vec{BM} = \vec{0}$.

Exercice 10 On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{e_1} = (1,0,1), \quad \vec{e_2} = (0,1,1), \quad \vec{e_3} = (1,1,0).$$

Montrer que tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs, c'est-à-dire que $\vec{u}$ peut s'écrire sous la forme

$$\vec{u} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} + \gamma\vec{e_3}, \qquad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11 Déterminer la longueur de la diagonale du cube unité de $\mathbb{R}^3$ de deux manières différentes :

1. gémétriquement, en utilisant deux fois Pythagore ;
2. analytiquement, en utilisant la distance dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 On se place dans un repère orthonormé (O, i, j, k) de l'espace. On considère les deux droites $\Delta : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ et $\Delta' : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$, pour $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les deux droites ne sont pas parallèles.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que Δ et Δ' soient concourantes. Dans ce cas, déterminer l'équation de leur plan.

Exercice 13

1. Déterminer l'équation cartésienne des plans π contentant la droite $\Delta : \begin{cases} x = 6 - 3z \\ x = 3y - 7 \end{cases}$ et situés à distance 1 du point $A = (1, 1, 2)$.
2. Trouver l'équation cartésienne du plan $\pi^\perp$ perpendiculaire au plan $\pi : x - y + z + 24 = 0$ et contenant la droite $\Delta : \begin{cases} 2x - y + 2z + 4 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$.