Université Claude-Bernard Lyon 1

EXAMEN PARTIEL
TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE
LICENCE 1ère ANNÉE

Mardi 3 avril 2007. Durée de l'épreuve : 1h30

Il est interdit d'utiliser des calculatrices.
Il est admis de consulter le polycopié et les notes personelles de cours et de TD.

Exercice 1. Trouver les solutions complexes de

$$\frac{1}{2}z^2 + i\sqrt{2}z - i\sqrt{3} = 0$$

et les dessiner sur le plan complexe.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\ln(1+\sin(3x))}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\ln(\mathrm{sh}x) - x)$.

Exercice 3. Pour tout $x \geq -1$, on pose

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ \mathrm{ch}x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1) La fonction f est-elle continue sur l'intervalle $[-1, \infty[$?

2) La fonction f est-elle dérivable sur l'intervalle $]-1, \infty[$?

3) Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f(c) = \frac{e}{2}$.

Exercice 4. Etudier la fonction

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

en suivant ces étapes :

1) Déterminer le domaine de définition D de f.

2) La fonction f est-elle continue sur D ?

3) Calculer les limites de f aux bords de D.

4) Calculer $f(0)$ et trouver $x \in D$ tel que $f(x) = 0$.

5) Calculer la fonction dérivée f'. Est-ce que f' est définie partout ?

6) Calculer le signe de f' et dresser le tableau de variation.

7) Point bonus : calculer la deuxième derivée f'', son signe, et indiquer sur le tableau de variation la concavité de la fonction f.

8) Dessiner le graphe de la fonction f.