Numéro étudiant :
Nom :
Prénom :

Interrogation n. 11

Règlement – L'épreuve dure 30 minutes. Il est interdit d'utiliser des calculatrices, il est admis de consulter les notes de cours. Les téléphones portables doivent être éteints.

Barème – Moitié points pour la méthode et moitié pour les calculs.

Exercice 1 (4 points) – Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+3+\frac{1}{x})\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\mathrm{d}t$

Réponse –

a) On a :

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2+3+\frac{1}{x})\mathrm{d}x &= \Big[\frac{1}{3}x^3+3x+\ln(x)\Big]_{x=1}^{x=2}\\ &= \frac{8}{3}+6+\ln(2)-\Big(\frac{1}{3}+3\Big)\\ &= \frac{16}{3}+\ln(2)\end{aligned}$$

b) On a :

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2t}{2\sqrt{t^2+4}}\mathrm{d}t$$

En posant $u(t)=t^2+4$, on remarque que $u'(t)=2t$, et donc que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}\mathrm{d}t\\ &= \Big[\sqrt{u(t)}\Big]_0^1\\ &= \sqrt{u(1)}-\sqrt{u(0)} = \sqrt{5}-2\end{aligned}$$

Comme la fonction u est strictement croissante sur $[0,1]$, on aurait aussi pu utiliser le changement de variable $v=u(t)=t^2+4$. Alors $\mathrm{d}v = u'(t)\mathrm{d}t = 2t\mathrm{d}t$, et comme $u(0)=4$ et $u(1)=5$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2t}{2\sqrt{t^2+4}}\mathrm{d}t &= \int_4^5 \frac{1}{2\sqrt{v}}\mathrm{d}v\\ &= \Big[\sqrt{v}\Big]_4^5 = \sqrt{5}-2\end{aligned}$$

Exercice 2 (3 points) – En sachant que $\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$, calculer la primitive $\int \ln^2(x)\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par partie

Réponse – Écrivons d'abord

$$\int \ln^2(x)\mathrm{d}x = \int \ln(x)\ln(x)\mathrm{d}x$$

Soient u et v tels que $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & \ln(x) \\ v(x) & = & \ln(x) \end{array}\right.$. On peut prendre $u(x) = x\ln(x) - x$, et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. En intégrant par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \ln^2(x)\mathrm{d}x &= \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
&= u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\
&= \ln(x)(x\ln(x) - x) - \int \frac{x\ln(x) - x}{x}\mathrm{d}x \\
&= x\ln^2(x) - x\ln(x) - \int (\ln(x) - 1)\mathrm{d}x \\
&= x\ln^2(x) - x\ln(x) - (x\ln(x) - x + C - x) \\
&= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + C
\end{aligned}$$

Exercice 3 (3 points) – À l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^3(t)\mathrm{d}t$.

Réponse –

Comme la fonction à l'intérieur de l'intégrale est une fonction rationnelle en $\cos(t)$ et en $\sin(t)$, on regarde si $(\sin^2(t) - \sin^4(t))\cos(t)\mathrm{d}t$ est invariant lors du changement de t en $-t$, $\pi - t$ ou $\pi + t$.

Rappel :

1. si c'est invariant en changeant t en $-t$, on pose $u = \cos(t)$
2. si c'est invariant en changeant t en $\pi - t$, on pose $u = \sin(t)$
3. si c'est invariant en changeant t en $\pi + t$, on pose $u = \tan(t)$
4. sinon, on pose $u = \tan(\frac{t}{2})$

En changeant t en $\pi - t$, on a $\sin^2(\pi - t)\cos^3(\pi - t)(-\mathrm{d}t) = \sin^2(t)\cos^3(t)\mathrm{d}t$.

On va alors utiliser le changement de variable $u = \sin(t)$. La fonction sin est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, et $\mathrm{d}u = \cos(t)\mathrm{d}t$.

Remarquons aussi que $\cos^3(t) = \cos(t)\cos^2(t) = \cos(t)(1 - \sin^2(t))$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^3(t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(t) - \sin^4(t))\cos(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (u^2 - u^4)\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$