Interrogation n. 12 – Corrigé

Règlement – L'épreuve dure 30 minutes. Il est interdit d'utiliser des calculatrices, il est admis de consulter les notes de cours. Les téléphones portables doivent être éteints.

Barème – Moitié points pour la méthode et moitié pour les calculs.

Exercice 1 (6 points) – On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(x) - 2x\, y(x) = \frac{2x}{1+x^2}\, e^{x^2}.$$

a) Trouver la solution générale de l'équation homogène associée à (E).

b) En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre l'équation (E) ;

c) Détérminer la solution y_0 de (E) vérifiant la condition initiale

$$y_0(0) = 1.$$

Réponse –

a) L'équation homogène associée à (E) est

$$(E_0) \qquad y'(x) - 2x\, y(x) = 0.$$

La solution générale de (E_0) est la fonction

$$y_g(x) = \lambda e^{\int 2x\ dx} = \lambda e^{x^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) On cherche une solution particulière de l'équation (E) de la forme

$$y_p(x) = \lambda(x)\, e^{x^2},$$

où la fonction $\lambda(x)$ est à détérminer. On calcule

$$y_p'(x) = \lambda'(x)\, e^{x^2} + \lambda(x)\, 2x\, e^{x^2},$$

alors y_p vérifie (E) si et seulement si

$$\lambda'(x)\, e^{x^2} + \lambda(x)\, 2x\, e^{x^2} - 2x\, \lambda(x)\, e^{x^2} = \lambda'(x)\, e^{x^2} = \frac{2x}{1+x^2}\, e^{x^2},$$

c'est-à-dire si $\lambda'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$. On a alors

$$\lambda(x) = \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \ln(1+x^2).$$

Au final, donc, la solution de (E) est

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x) = \big(\lambda + \ln(1+x^2)\big)\ e^{x^2}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Parmi les solutions $y(x)$ précédentes, qui dépendent du choix de $\lambda \in \mathbb{R}$, cherchons celle qui satisfait à la condition initiale $y(0) = 1$. Puisque

$$y(0) = (\lambda + \ln(1))\ e^0 = \lambda,$$

pour avoir $y_0(0) = 1$ il suffit de choisir $\lambda = 1$:

$$y_0(x) = \big(1 + \ln(1+x^2)\big)\ e^{x^2}.$$

Exercice 2 (3 points) – Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$

b) $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0$

c) $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$

Réponse – La solution d'une équation différentielle du deuxième ordre dépend des racines du polynôme caractéristique de l'équation.

a) Le polynôme caractéristique de l'équation $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$ est

$$X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3).$$

Il a deux racines distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$, donc la solution est la fonction

$$y(x) = \lambda\, e^x + \mu\, e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) Le polynôme caractéristique de l'équation $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0$ est

$$X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2.$$

Il a une seule racine double $r = 3$, donc la solution est la fonction

$$y(x) = (\lambda + \mu\, x)\, e^{3x}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

c) Le polynôme caractéristique de l'équation $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$ est

$$X^2 + 2X + 5.$$

Cherchons ses racines :

$$X = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4\,i}{2} = -1 \pm 2\,i = \left\langle \begin{array}{l} -1-4i \\ -1+4i \end{array} \right.$$

On a donc deux racines complexes (qui sont donc conjuguées), avec

$$\begin{array}{rl} \text{partie réelle} & r = -1, \\ \text{partie complexe} & s = 4. \end{array}$$

La solution est donc la fonction

$$y(x) = e^{-x}\big(\lambda\, \sin(4x) + \mu\, \cos(4x)\big), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$