Interrogation n. 4 (= CC2) – Corrigé

Barème – 2 points par question, dont 1 pour la méthode et 1 pour les calculs.

Exercice – Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on cosidère le point $A\,(0,1,2)$ et les deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Question 1 – Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et dire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Ensuite calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et dire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Réponse – Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Puisque

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 + 0 + (-1)(-2) = -1 + 2 = 1 \neq 0,$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

Deux vecteurs sont colinéaires si leur produit vectoriel est nul. Puisque

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -(2+1) \\ -(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Question 2 – Donner une équation cartésienne du plan π passant par A et engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Réponse – Le plan π a une équation cartesienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, on doit trouver les coefficients $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Puisque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont contenus dans le plan π, leur produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à π, et détérmine les coéfficients a, b, c. Pour détérminer d il suffit ensuite d'imposer que le point A soit contenu dans π.

On a $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc π a équation $2x - 3y + z + d = 0$. Il passe par A si

$$0 - 3 + 2 + d = -1 + d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d = 1.$$

En conclusion, π a équation $\quad 2x - 3y + z + 1 = 0.$

Question 3 – Donner une équation cartesienne du plan parallèle à π et passant par l'origine O.

Réponse – Il suffit de considérer l'équation $2x - 3y + z + d = 0$ et d'imposer qu'elle soit satisfaite par les coordonnées $(0, 0, 0)$ de O. On trouve $d = 0$, donc le plan cherché a équation $\quad 2x - 3y + z = 0$.

Question 4 – Calculer l'aire du triangle ABC où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Réponse – L'aire de ce triangle vaut

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Question 5 – Détérminer l'équation paramétrique de la droite Δ orthogonale à π et passant par A.

Réponse – L'équation paramétrique de Δ est

$$\Delta = \Big\{ M = A + t\,\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \Big\},$$

où l'on identifie les points M et A aux vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$ respectivement :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 - 3t \\ 2 + t \end{pmatrix}.$$

Si on appelle (x, y, z) les coordonnées des points M de Δ on a donc l'équation paramétrique de Δ :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$