Interrogation n. 5 – Corrigé

Barème – Moitié points pour la méthode et moitié pour les calculs.

Exercice 1 (4 points) – Pour les deux applications $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ suivantes, calculer

$$T\Big(\lambda\,(x,y) + \mu\,(x',y')\Big) \qquad \text{et} \qquad \lambda\, T(x,y) + \mu\, T(x',y')$$

pour tout $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et dire si T est linéaire.

a) $T(x,y) = (2y - \ln x, xy)$ b) $T(x,y) = (y - 2x, 3x)$

Réponse –

a) Pour $T(x,y) = (2y - \ln x, xy)$ on a

$$\begin{aligned} T\Big(\lambda\,(x,y) + \mu\,(x',y')\Big) &= T\Big(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y'\Big) \\ &= \Big(2(\lambda y + \mu y') - \ln(\lambda x + \mu x'), (\lambda x + \mu x')(\lambda y + \mu y')\Big) \\ &= \Big(2\lambda y + 2\mu y' - \ln(\lambda x + \mu x'), \lambda^2 xy + \lambda\mu x y' + \lambda\mu y x' + \mu^2 x'y'\Big), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda\, T(x,y) + \mu\, T(x',y') &= \lambda(2y - \ln x, xy) + \mu(2y' - \ln x', x'y') \\ &= \Big(2\lambda y - \lambda \ln x + 2\mu y' - \mu \ln x', \lambda xy + \mu x'y'\Big). \end{aligned}$$

Puisque

$$\ln(\lambda x + \mu x') \neq \lambda \ln x + \mu \ln x',$$
$$\lambda^2 xy + \lambda\mu x y' + \lambda\mu y x' + \mu^2 x'y' \neq \lambda xy + \mu x'y',$$

on a $T\Big(\lambda\,(x,y) + \mu\,(x',y')\Big) \neq \lambda\, T(x,y) + \mu\, T(x',y')$, donc l'application T <u>n'est pas linéaire</u>.

b) Pour $T(x,y) = (y - 2x, 3x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} T\Big(\lambda\,(x,y) + \mu\,(x',y')\Big) &= T\Big(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y'\Big) \\ &= \Big((\lambda y + \mu y') - 2(\lambda x + \mu x'), 3(\lambda x + \mu x')\Big) \\ &= \Big(\lambda y - 2\lambda x + \mu y' - 2\mu x', 3\lambda x + 3\mu x'\Big), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda\, T(x,y) + \mu\, T(x',y') &= \lambda(y - 2x, 3x) + \mu(y' - 2x', 3x') \\ &= \Big(\lambda y - 2\lambda x + \mu y' - 2\mu x', 3\lambda x + 3\mu x'\Big). \end{aligned}$$

Puisque $T\Big(\lambda\,(x,y) + \mu\,(x',y')\Big) = \lambda\, T(x,y) + \mu\, T(x',y')$, l'application T <u>est linéaire</u>.

Exercice 2 (4 points) – On fixe dans $\mathbb{R}^n$ la base canonique $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$. Pour les applications T suivantes, dire si T est une application linéaire en justifiant la réponse, et dans ce cas déterminer sa matrice associée, c'est-à-dire la matrice A telle que $T(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$ pour tout vecteur $\vec{u}$.

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (-3y, 2x + 5y)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (x + 2, \ln(xy))$

c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (-5y, x + 3y, 4x)$

d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y, z) = (2x - 3y + z, z - x)$

Réponse –

a) L'application $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (-3y, 2x + 5y)$ a pour composantes les fonctions $(x, y) \mapsto -3y$ et $(x, y) \mapsto 2x + 5y$ qui sont linéaires, parce qu'elles sont données par des <u>polynômes de degré 1 sans termes constants (non nuls)</u> dans les coordonnées x et y. Donc l'application T <u>est linéaire</u>.

Sa matrice associée (dans ces coordonnées), de taille 2×2, est $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

b) Les composantes de l'application $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y) = (x + 2, \ln(xy))$ ne sont pas linéaires, car la fonction $(x, y) \mapsto \ln(xy)$ <u>n'est pas un polynôme</u>, donc elle n'est surment pas linéaire. Par conséquent, l'application T <u>n'est pas linéaire</u>.

c) L'application $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (-5y, x + 3y, 4x)$ a composantes linéaires (polynômes de degré 1 sans termes constants non nuls), dont T <u>est linéaire</u>.

Sa matrice associée (de taille 3×2) est $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

d) L'application $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y, z) = (2x - 3y + z, z - x)$ <u>est bien linéaire</u> car ses composantes sont linéaires, et sa matrice associée (de taille 2×3) est $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (2 points) – Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de rotation, en trouvant pour chacune l'angle de rotation.

Réponse – Une rotation dans le plan est une application linéare $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ representée par une matrice de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour un angle $\theta \in [0, 2\pi[$.

Puisque

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix},$$

les deux matrices representent bien des rotations sur le plan $\mathbb{R}^2$.