Interrogation n. 6 (= CC3) – Corrigé

Barème – Moitié points pour la méthode et moitié pour les calculs.

Exercice 1 (4 points) – Pour les applications T suivantes, dire si T est une application linéaire en justifiant la réponse, et dans ce cas déterminer sa matrice associée A, dans la base canonique des espaces considerés.

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (3x - y, 0, 2y)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (3xy, \cos x - y, 2x)$

c) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y, z) = (z - 2x, z - 3y)$

d) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (-3z, 2x + z, y - 5x)$

Réponse –

a) L'application $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (3x - y, 0, 2y)$ <u>est linéaire</u>, c'est-à-dire que

$$T\Big(\lambda\,(x, y) + \mu(x', y')\Big) = \lambda\, T(x, y) + \mu\, T(x', y')$$

pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, car ses composantes sont des polynômes de degré 1 sans termes constants non nuls, donc des applications linéaires. Dans le repère fixé, la matrice associée à T, c'est-à-dire la matrice de taille 3×2 telle que

$$T(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

est $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) L'application $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (3xy, \cos x - y, 2x)$ <u>n'est pas linéaire</u>, car une de ses composantes contient la fonction $\cos x$ qui n'est pas linéaire.

c) L'application $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y, z) = (z-2x, z-3y)$ <u>est linéaire</u> (les composantes sont linéaires) et sa matrice associée (de taille 2×3) est $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

d) L'application $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (-3z, 2x + z, y - 5x)$ <u>est linéaire</u> (les composantes sont linéaires) et sa matrice associée (de taille 3×3) est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (3 points) – Calculer les produits suivants de matrices :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Réponse –

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 & 1+0 & -1+4 \\ 9-8 & 3+0 & -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 & 1+0 \\ 9-8 & 3+0 \\ 15-12 & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-10+6 \\ 4+15+0 \\ 20+0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 19 \\ 14 \end{pmatrix}$

Exercice 3 (3 points) – Mettre le système $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$ sous forme matricielle $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B$.
Ensuite calculer $\det A$, puis la matrice inverse A^{-1}, et enfin la solution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$ du système.

Réponse – Le système $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B$ avec les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le détérminant d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\det A = ad - bc$, donc

$$\det A = 3 \cdot (-3) - 5 \cdot (-1) = -9 + 5 = -4.$$

La matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ donc

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6+1 \\ 10+3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

La solution du système est donc

$$x = -\frac{7}{4} \quad \text{et} \quad y = -\frac{13}{4}.$$