Interrogation n. 7 – Corrigé

Barème – Moitié points pour la méthode et moitié pour les calculs.

Exercice 1 (2 points) – Déterminer les réels x (s'il en existe) tels que

1. (a) $\arccos x = -\frac{\pi}{4}$
   (b) $\arccos x = \frac{5\pi}{6}$
2. (a) $\arcsin x = -\frac{\pi}{4}$
   (b) $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$

Réponse –

1. (a) La fonction arccos est – par définition – à valeurs dans $[0, \pi]$, donc il n'existe pas de réel x tel que $\arccos x = -\frac{\pi}{4}$.
   (b) Puisque $\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$, il existe un unique réel x tel que $\arccos x = \frac{5\pi}{6}$:
$$x = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$
2. (a) Puisque $-\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, il existe un unique réel x tel que $\arcsin x = -\frac{\pi}{4}$:
$$x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}.}$$
   (b) La fonction arcsin est – par définition – à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc il n'existe pas de réel x tel que $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$.

Exercice 2 (4 points) – Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(2t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $e^{5x} = 2 + 8e^{-5x}$

Réponse –

a) Pour tous réels x et y, on a $\sin x = \sin y$ si et seulement si $x = y$ ou $\pi - y$ modulo 2π. On en déduit les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
& \sin(2t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \\
\iff \quad & 2t = t + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad 2t = \pi - t - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\
\iff \quad & t = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{ou} \quad 3t = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\
\iff \quad & \boxed{t = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}} \quad \text{ou} \quad \boxed{t = \frac{\pi}{6} \left(\bmod \frac{2\pi}{3}\right).}
\end{aligned}$$

b) En posant $X = e^{5x}$, l'équation $e^{5x} = 2 + 8e^{-5x}$ se réécrit
$$\begin{aligned}
& X = 2 + \frac{8}{X} \\
\iff \quad & X^2 = 2X + 8 \\
\iff \quad & X^2 - 2X - 8 = 0.
\end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 + 4 \cdot 8 = 36 = 6^2$, et les racines sont données par

$$\begin{aligned} & X = \frac{2+6}{2} = 4 \quad \text{ou} \quad X = \frac{2-6}{2} = -2 \\ \iff \quad & e^{5x} = 4 \quad \text{ou} \quad e^{5x} = -2. \end{aligned}$$

Puisque e^{5x} est nécessairement strictement positif, il ne reste qu'une solution :

$$e^{5x} = 4 \quad \iff \quad 5x = \ln 4 = 2\ln 2 \quad \iff \quad \boxed{x = \frac{2}{5}\ln 2}.$$

Exercice 3 (4 points) – Préciser le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(2x^2 + x - 3)$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{e^{3x}}}}$

Réponse –

a) La fonction ln est définie sur $(0, +\infty)$. Le domaine de définition de f est donc l'ensemble des réels x tels que $2x^2+x-3 > 0$. L'équation $2x^2+x-3 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 1+4\cdot3\cdot2 = 25 = 5^2$, et ses racines sont

$$x = \frac{-1+5}{4} = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Puisque le coefficient dominant est $2 > 0$, on en déduit que $2x^2 + x - 3 > 0$ si et seulement si $x < -\frac{3}{2}$ ou $x > 1$. Le domaine de définition de f est donc

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]1, +\infty[.}$$

b) La fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$, et la fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$. Le domaine de définition de g est donc l'ensemble des réels x tel que

$$\left(e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{e^{3x}} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{e^{3x}}} \neq 0 \right) \quad \iff \quad e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{e^{3x}} > 0.$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{2}{x}} - \frac{1}{e^{3x}} > 0 \quad & \iff \quad e^{-\frac{2}{x}} > \frac{1}{e^{3x}} \\ & \iff \quad e^{-\frac{2}{x}+3x} > 1 \\ & \iff \quad -\frac{2}{x} + 3x > \ln(1) = 0 \\ & \iff \quad 3x^2 - 2 > 0 \\ & \iff \quad x^2 > \frac{2}{3} \\ & \iff \quad |x| > \sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Le domaine de définition de g est donc

$$\boxed{\mathcal{D}_g =]-\infty, \sqrt{\frac{2}{3}}[\cup]\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty[.}$$