Interrogation n. 8 – Corrigé

Exercice 1 (6 points) – Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son domaine de définition et calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$
2. $g(x) = e^{\cos(3x)}$
3. $h(x) = \sqrt{\ln(x)}$

Réponse –

1. La fonction $y \mapsto 1/y$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et
$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \ \Leftrightarrow \ x \notin \{2, 3\}.$$
En effet, le discriminant de $x^2 - 5x + 6$ est $\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$, donc ses racines sont $x = (5+1)/2 = 3$ et $x = (5-1)/2 = 2$.
Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. Sa dérivée est
$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2 - 5x + 6) - x \times (2x - 5)}{(x^2 - 5x + 6)^2} = \frac{-x^2 + 6}{(x^2 - 5x + 6)^2}.$$

2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est
$$g'(x) = -3\sin(3x)e^{\cos(3x)}.$$

3. La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est définie sur $[0; +\infty[$ et
$$\ln(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ x \geq 1.$$
Donc la fonction h est définie sur $[1; +\infty[$. Sa dérivée est
$$h'(x) = \frac{1/x}{2\sqrt{\ln(x)}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}.$$

Exercice 2 (4 points) – On considère la fonction u définie par

$$u(t) = t^2 \ln(t).$$

Préciser son domaine de définition et calculer les dérivées successives $u'(t)$, $u''(t)$, $u^{(3)}(t)$ et $u^{(4)}(t)$.

Réponse – La fonction u est définie sur $]0;+\infty[$. Ses dérivées successives sont :

$$\begin{aligned}
u'(t) &= 2t \times \ln(t) + t^2 \times \frac{1}{t} = 2t\ln(t) + t \\
u''(t) &= 2 \times \ln(t) + 2t \times \frac{1}{t} + 1 = 2\ln(t) + 3 \\
u^{(3)}(t) &= \frac{2}{t} \\
u^{(4)}(t) &= -\frac{2}{t^2}
\end{aligned}$$