Interrogation n. 9 – Corrigé

Exercice 1 (5 points) – Sur $]0;+\infty[$ on définit la fonction f par

$$f(x) = \frac{1}{x}e^x.$$

1. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f.
3. Donner le tableau de variation de f.

Réponse –

1. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. $\forall\ x > 0,\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x = \frac{x-1}{x^2}e^x.$
3. On a : $f'(x) < 0$ pour $x \in]0;1[$ et $f'(x) > 0$ pour $x \in]1;+\infty[$. De plus : $f(1) = e$.
   D'où le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2 (5 points) – On considère la fonction u définie par

$$u(t) = \ln(1 - 2t^2).$$

1. Déterminer le domaine de définition de u.
2. Etudier les variations de u sur son domaine de définition.
3. Tracer l'allure du graphe de u sur son domaine de définition.

Réponse –

1. La fonction ln est définie sur $]0; +\infty[$ et

$$1 - 2t^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; t^2 < \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{\sqrt{2}} < t < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   Donc la fonction u est définie sur $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

2. On a : $\forall\, t \in \left]\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[,\; u'(t) = \dfrac{-4t}{1-2t^2}$.
   Donc : $u'(t) > 0$ pour $t \in \left]\frac{-1}{\sqrt{2}}; 0\right[$ et $u'(t) < 0$ pour $t \in \left]0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.
   De plus : $\lim\limits_{t \to -1/\sqrt{2}} u(t) = \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{t \to 1/\sqrt{2}} u(t) = \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$, et $u(0) = \ln(1) = 0$.
   D'où le tableau de variation de u sur $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$:

t	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. Graphe de u sur $\left]\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$: