Fascicule d'exercices pour l'UE TMB

Automne 2015

Responsables : Alessandra Frabetti et Abdellatif Agouzal

http ://math.univ-lyon1.fr/∼frabetti/TMB/

PROGRAMME DU COURS TMB

Prérequis. Notions sur les fonctions d'une variable réelle : limites, fonctions continues, dérivées, intégrales. Fonctions connues : polynômes, fractions, racines, fonctions circulaires, exponentiels, logarithmes. Résolution d'équations et systèmes d'équations de degré 1 et 2.

Partie I – Algèbre linéaire et géométrie cartesienne.

Chapitre 1 – Nombres complexes.

1. Nombres complexes, conjugués. Opérations.
2. Module, argument, exponentiel complexe. Formule de Moivre.
3. Racines d'un polynôme complexe. Factorisation de polynômes réels.

Chapitre 2 – Espaces vectoriels et vecteurs.

1. Espaces vectoriels (produit par scalaire). Combinaisons linéares, base, dimension. Exemples : $\mathbb{R}^n$, vecteurs du plan et de l'espace.
2. Produit scalaire, norme.
3. Produit vectoriel et produit mixte.

Chapitre 3 – Transformations linéaires et matrices.

1. Transformations linéaires. Addition, composition, réciproque. Exemples sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, rotations, translations.
2. Matrices. Addition, produit, déterminant, matrice inverse.
3. Isomorphismes et isométries (rotations et reflexions). Symétries (déplacements et antidéplacements). Projections.
4. Résolution de systèmes d'équations linéaires.

Chapitre 4 – Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace.

1. Coordonnées cartésiennes dans le plan. Droites, coniques (cercle, ellipse, parabole, hyperbole).
2. Coordonnées cartésiennes dans l'espace. Plans, droites, quadriques (sphère, cylindre, cône, parabolïde, hyperboloïdes).

Partie II – Fonctions d'une variable réelle.

Chapitre 5 – Fonctions.

1. Graphes des fonctions d'une variable.
2. Fonctions croissantes, decroissantes, monotones. Fonctions paires et impaires.
3. Idée des limites et des fonctions continues.
4. Opérations entre fonctions, composition.
5. Fonctions réciproque des fonctions monotones et non monotones (arcsin, arctan).

Chapitre 6 – Dérivées.

1. Dérivées. Dérivées des fonctions composées.
2. Points critiques, extrema locaux et points d'infléxion.
3. Dérivées d'ordre superieur. Formule de Taylor et approximations.

Chapitre 7 – Intégrales.

1. Primitives et intégrales.
2. Intégration par partie et par changement de variable.
3. Primitive des fractions rationnelles.

Chapitre 8 – Équations différentielles.

1. Classification des équations différentielles ordinaires.
2. Équations différentielles du 1er ordre. Condition initiale et unicité.
3. Équations différentielles linéaires du 2ème ordre à coefficients constants. Conditions initiales et unicité.

TD 1 – NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 – Nombres complexes et plan complexe
Dessiner les nombres complexes suivants sur le plan complexe :

a) $-2i$ b) $3+2i$ c) $\overline{3+2i}$ d) $5i-1$

Exercice 2 – Opération entre nombres complexes
Calculer les sommes, produits, quotients, parties réelle et imaginaire suivants :

a) $(3+2i)-(5i-1)$
b) $(3+2i)+(\overline{3+2i})$
c) $(3+2i)(5i-1)$
d) $(3+2i)(\overline{3+2i})$
e) $\dfrac{3+2i}{5i-1}$
f) $(3+2i)^2$
g) $\mathrm{Re}\big(i(1-i)\big)$
h) $\mathrm{Im}\big((1-i)i-3i\big)$

Exercice 3 – Représentation polaire des nombres compexes
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, les écrire sous forme polaire et les dessiner sur le plan complexe :

a) $-i$ b) $3+3i$ c) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^2$ d) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$

Exercice 4 – Racines carrées de nombres complexes
Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants et les dessiner sur le plan complexe :

a) 1 b) -1 c) i d) $1+i$ e) $8-6i$

Exercice 5 – Équations complexes
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2=7+24i$
b) $z^2-2iz+3i=0$
c) $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$
d) $z^3=-8i$
e) $z^5-z=0$
f) $z^5+1=0$
g) $27(z-1)^6+(z+1)^6=0$
h) $z^6-(3+2i)z^3+2+2i=0$

Exercice 6 – Factorisation de polynômes réels en polynômes complexes irréductibles
Trouver les racines complexes des polynômes réels suivants et écrire leur factorisation en produit de polynômes complexes irréductibles :

a) X^2+1 b) X^2+X+1 c) X^2+2X+2 d) X^2+3X+3

Exercice 7 – Factorisation de polynômes réels en polynômes réels irréductibles
Factoriser les polynômes réels suivants en produit de polynômes réels irréductibles, en utilisant les racines complexes si nécessaire :

a) X^3+1 b) X^4+1 c) X^4+3X^2+2

TD 2 – ESPACES VECTORIELS ET VECTEURS

Dans les exercises suivants, on un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dans l'espace.

Exercice 8 – Combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ On note $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Exprimer le vecteur $\vec{E} = (5,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

b) Le vecteur $\vec{E} = (5,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des trois vecteurs $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,1,1)$ et $\vec{w} = (1,1,0)$?

c) Montrer que les vecteurs $\vec{E} = (0,6,1)$ et $\vec{F} = (5,4,-1)$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{u} = (1,2,0)$ et $\vec{v} = (-3,0,1)$. Montrer que le vecteur $\vec{G} = (4,2,0)$ ne l'est pas.

Exercice 9 – Bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

a) Les vecteurs $\vec{u} = (1,1)$ et $\vec{v} = (1,-1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?
Autrement dit, peut-on écrire tout vecteur $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

b) Les vecteurs $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,1,1)$ et $\vec{w} = (1,1,0)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10 – Produit scalaire et vecteurs orthogonaux dans le plan
Dans le plan cartésien, dessiner les deux vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

a) Calculer les normes $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Calculer et dessiner le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ et les deux vecteurs $\vec{u}^\perp$ orthogonaux à $\vec{u}$ et de même norme.

Exercice 11 – Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte dans l'espace
Dans l'espace cartésien, on considère les trois vecteurs $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, et $\vec{w} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

a) Calculer les normes $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$ et le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Calculer et dessiner les vecteurs $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{v} \wedge \vec{u}$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

c) Calculer le produit mixte $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exercice 12 – Identités notables du calcul vectoriel (Facultatif)
Demontrer que pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace on a :

a) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}$ et $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\, \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\, \vec{u}$.

b) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$.

c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\Big(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\Big)$.

d) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

[*Hint* : fixer un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et effectuer un calcul composante par composante.]

TD 3 – TRANSFORMATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Dans les exercises suivants, on fixe un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ dans l'espace, identifié à $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13 – Transformations linéaires et matrices
Parmi les applications suivantes, trouver celles qui sont linéaires et justifier votre réponse (calculer $f(a\vec{u}+b\vec{v})$ et $af(\vec{u})+bf(\vec{v})$ dans les premiers deux cas). Pour les applications linéaires, déterminer leur matrice associée.

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,,\;(x,y)\mapsto(y-3x,5x+2y)$
b) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\,,\;(x,y)\mapsto x^2-5y$
c) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,,\;(u,v)\mapsto(2u+3v,u-5v)$
d) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\,,\;(t,\theta)\mapsto t\sin\theta$
e) $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\,,\;(t,\theta)\mapsto 3t+\theta$
f) $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\,,\;x\mapsto(2x,0,-3x)$
g) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\,,\;(x,y,z)\mapsto(x+2z,y-z-x)$
h) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\,,\;(u,v)\mapsto(1-v,2u,3v-4)$
i) $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\,,\;(u,v,w)\mapsto(w-v,2u,3v-4w)$

Calculer les composées $f\circ h$, $h\circ f$, $G\circ f$, $h\circ L$ et $L\circ Q$.

Exercice 14 – Produit et déterminant de matrices
Calculer, lorsque c'est possible, les produits et déterminants des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\\1&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-3&2\\1&0\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&-3&0\\0&5&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 15 – Isomorphismes, isométries, rotations, reflexions et projections
Parmi les transformations linéaires associées aux matrices suivantes, indiquer lesquelles sont des isomorphismes, des isométries, des rotations, des réflexions ou des projections sur une droite :

a) $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ g) $G=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-3\end{pmatrix}$ h) $H=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ f) $F=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ i) $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Exercice 16 – Systèmes d'équations linéaires
Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants, si cela est possible, en calculant la matrice inverse :

a) $\begin{cases}x+3y=1\\2x+4y=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}x-2y=0\\6y-3x=5\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x-y=2\\x+2y=1\end{cases}$

TD 4 – GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE DANS LE PLAN

Dans le plan, on fixe un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on note (x, y) les coordonnées d'un point générique.

Exercice 17 – Distance et droites
Dans le plan, dessiner les deux points $A(1, 3)$ et $B(-1, 0)$.

a) Calculer la distance entre A et B.
b) Dessiner la droite Δ passant par A et B, et déterminer son équation.
c) Dessiner la droite parallèle à Δ passant par O, et déterminer son équation.
d) Dessiner la droite orthogonale à Δ passant par O, et déterminer son équation.

Exercice 18 – Distance, projection orthogonale et droites
Dans le plan, dessiner le point $A(5, 3)$ et la droite Δ d'équation $x - y + 1 = 0$.

a) Calculer la distance du point A à la droite Δ.
b) Dessiner et trouver la projection orthogonale de A sur Δ.
c) Dessiner la droite parallèle à Δ passant par A, et déterminer son équation.
d) Dessiner la droite perpendiculaire à Δ passant par A , et déterminer son équation.

Exercice 19 – Aire de parallélogramme
Dessiner les points $A(2, 5)$, $B(8, -1)$ et $C(10, 5)$ du plan. Déterminer le point E tel que $ABEC$ soit un parallélogramme et calculer l'aire de celui-ci.

Exercice 20 – Coniques
Décrire et dessiner les coniques suivantes, ainsi que leurs axes de symétrie ou leurs asymptotes :

a) $x^2 - 4y^2 = 1$
b) $x^2 + 4y^2 = 1$
c) $x = (y - 1)^2 + 1$
d) $xy = 3$
e) $(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 9$
f) $y = x^2 + 3$

Exercice 21 – Droites ou coniques ?
Dire si les équations cartésiennes suivantes décrivent des droites ou des coniques (lesquelles ?).

a) $2x - 3y + 1 = 0$
b) $x = 2$
c) $(x - 1)^2 + y^2 = 7$
d) $(x - 1)^2 = y^2$
e) $2x^2 + 3y^2 = 1$
f) $2x^2 - 3y^2 = 1$
g) $(x + 1)y = 5$
h) $y = x^2 + 2x$
i) $x = 2y^2 - 3$

Exercice 22 – Lieux de points dans le plan complexe
Déterminer l'ensemble des points P du plan, d'affixe $z \in \mathbb{C}$, tels que :

a) $z^2 + 2z - 3 \in \mathbb{R}$
b) $|1 - z| \leqslant 1/2$
c) $\mathrm{Re}(1 - z) \leqslant 1/2$
d) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| < 2$
e) $\dfrac{2z-4}{z-i} \in \mathbb{R}$
f) $|(1 - i)z - 3i| = 3$
g) $\mathrm{Re}(iz) \leqslant 1/2$
h) $\left|1 - \dfrac{1}{z}\right|^2 = 2$
i) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$
j) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| \leqslant \sqrt{2}$

TD 5 – GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE DANS L'ESPACE

Dans l'espace, on fixe un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on note (x, y, z) les coordonnées d'un point générique.

Exercice 23 – Distance et plans
Dans l'espace, dessiner le point $A(1, 2, 3)$.

a) Calculer la distance de A à l'origine O.

b) Dessiner le plan passant par A et orthogonal au vecteur $\vec{v} = 4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 6\vec{k}$, et écrire son équation.

c) Dessiner le plan passant par A et parallèle au plan $3x - 2y + 4z - 5 = 0$, et écrire son équation.

d) Dessiner le plan passant par A, $B(3, -2, 1)$ et $C(5, 0, -4)$, et écrire son équation.

Exercice 24 – Distance, plans, droites et volume d'un parallélépipède
Dans l'espace, dessiner les trois points $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 0, 1)$ et $C = (1, 1, 0)$.

a) Déterminer l'équation du plan π passant par les points A, B, C et l'intersection de π avec les trois axes. Dessiner le plan et les points.

b) Calculer la distance au plan π de l'origine O et la projection orthogonale de O sur π ;

c) Déterminer une équation paramétrique de la droite Δ passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BC}$, et l'intersection $\pi \cap \Delta$. Dessiner la droite et le point d'intersection.

d) Dessiner le parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, et calculer son volume.

Exercice 25 – Longueur d'un segment
Déterminer la longueur de la diagonale du cube unité de $\mathbb{R}^3$ de deux manières différentes :

a) géométriquement, en utilisant deux fois Pythagore ;

b) analytiquement, en utilisant la distance dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 26 – Quadriques
Décrire et dessiner les quadriques suivantes :

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 = 4$

c) $z = x^2 + y^2$

d) $z^2 = x^2 + y^2$

e) $(y - 1)^2 + 4(z + 2)^2 = 9$

f) $y = x^2 + 3$

Exercice 27 – Droites, coniques, plans ou quadriques ?
Dire si les équations cartésiennes suivantes décrivent des droites, des coniques, des plans ou des quadriques (lesquelles ?).

a) $2x - 3y - z + 1 = 0$

b) $y = 2$

c) $\begin{cases} 2x - 3y - z + 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 7$

e) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 7 \\ y = 2 \end{cases}$

f) $(x - 1)^2 + y^2 = 7$

g) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 7 \\ z = 2 \end{cases}$

h) $(x - 1)^2 = y^2$

i) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$

j) $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 = 1$

k) $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 = 1$

l) $z = 2x^2$

m) $\begin{cases} z = 2x^2 \\ y = 2 \end{cases}$

n) $z = 2x^2 + 3y^2$

TD 6 – FONCTIONS ET RÉCIPROQUES

Exercice 28 – Graphe des fonctions élémentaires
À partir du graphe des fonctions élémentaires donné en cours, dessiner le graphe des fonctions réelles suivantes en précisant le domaine de définition. Indiquer celles qui sont strictement croissantes ou strictement décroissantes.

a) $f(x) = 2x^2 - 3$

b) $g(y) = \dfrac{1}{y} + 5$

c) $h(z) = 1 - \sqrt{z}$

d) $\Phi(t) = t^3 + 1$

e) $u(\theta) = 2\sin\theta - 1$

f) $y(x) = e^{2x}$

g) $z(u) = \ln(u-1)$

h) $p(x) = \dfrac{2}{x-1}$

i) $F(y) = 2\arcsin(y)$

j) $G(z) = \arctan(z) + 5$

k) $H(x) = \ln(3x)$

l) $x(t) = \cos(2t)$

Exercice 29 – Fonctions composées
En utilisant les fonctions de l'exercice 28, calculer les fonctions composées suivantes :

a) $f\big(g(y)\big)$

b) $g\big(f(x)\big)$

c) $g\big(z(u)\big)$

d) $z\big(g(y)\big)$

e) $h\big(H(x)\big)$

f) $H\big(h(z)\big)$

g) $h\big(g\big(y(x)\big)$

h) $g\big(H\big(p(x)\big)$

Exercice 30 – Fonctions réciproques
Calculer la réciproque des fonctions de l'exercice 28.

Exercice 31 – Réciproque des fonctions circulaires
Calculer les valeurs suivants :

a) $\arcsin(1/2)$

b) $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$

c) $\arctan(\sqrt{3}/3)$

d) $\arctan(-1)$

e) $\arcsin\left(\sin(2\pi/3)\right)$

f) $\arctan\left(\tan(9\pi/4)\right)$

g) $\sin\left(\arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5})\right)$

h) $\tan(\arctan 3)$

TD 7 – ÉQUATIONS, DISÉQUATIONS ET DOMAINE DE DÉFINITION

Exercice 32 – Équations et systèmes
Résoudre les équations et les systèmes suivants :

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $3u^2 - 5u - 2 = 0$
c) $x^2 - 5x + 4 = 0$
d) $x(x+1) = 0$
e) $y^2(y^2 - 4) = 0$
f) $\dfrac{1}{2t} - 1 = t$
g) $\cos 4x = \sin 7x$
h) $\cos^2 \theta = 1/4$
i) $\sin(2t) = \cos^2 t$
j) $\sin(\pi x) = 0$
k) $\arcsin x = \dfrac{2\pi}{3}$
l) $\arctan y = \dfrac{2\pi}{3}$
m) $\arcsin x + \arctan \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{4}$
n) $e^{4-3x^2} = 1$
o) $e^{2-3u} = 5$
p) $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$
q) $\operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x = 1$
r) $\begin{cases} x(y+1) = 0 \\ y^2(x^2-4) = 0 \end{cases}$
s) $\begin{cases} (x-1)(y^2-1) = 0 \\ xy(x-y) = 0 \end{cases}$
t) $\begin{cases} x + y = 55 \\ \ln x + \ln y = \ln 700 \end{cases}$
u) $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 3 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \end{cases}$

Exercice 33 – Inéquations
Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$
b) $u^2 > 4$
c) $\dfrac{1}{2x} - 1 \geqslant 0$
d) $x(x-2)(x^2-1) < 0$
e) $\sin(2y) < 0$
f) $\cos^2 \theta \geqslant 1/4$
g) $\arcsin x \geqslant 1/2$
h) $x \arctan x \leqslant 0$
i) $e^{3x^2} > 1$
j) $(3-x) \ln x > 0$
k) $\ln u \leqslant 1$
l) $\ln(\ln t) \geqslant 0$

Exercice 34 – Domaine de définition
Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$
b) $g(y) = \sqrt{y^3 - 8} + \sqrt{y^3 + 8}$
c) $h(z) = \ln(z+5)$
d) $\Phi(t) = \ln \sqrt{t^2 - 4}$
e) $u(\theta) = \dfrac{1}{\sin \theta}$
f) $y(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
g) $z(u) = \ln(\tan u)$
h) $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$
i) $F(y) = \ln(1 - y^2)$
j) $G(z) = \arcsin \frac{2z}{1+z^2}$
k) $H(x) = \arctan(x) + 5$
l) $x(t) = \sqrt{\cos t}$

Exercice 35 – Dérivées avec la règle de Leibniz

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de Leibniz pour les produits et les quotients :

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $f(y) = \dfrac{1}{y^3}$

c) $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z + 1}$

d) $f(t) = \dfrac{t - 1}{t^2 + 1}$

e) $f(u) = \dfrac{u^4(u - 1)}{u^2 + u^3}$

f) $g(x) = 2x\sqrt{x}$

g) $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$

h) $g(z) = \dfrac{1}{\ln(z)}$

i) $g(t) = \dfrac{\ln t}{t} + \dfrac{t}{e^t}$

j) $g(u) = u^2 \ln(u) e^u$

k) $h(x) = x \sin x + \cos x$

l) $h(y) = \dfrac{\sin y}{y^3}$

m) $h(z) = z^2 \arcsin(z)$

n) $h(t) = \dfrac{\arctan(t)}{1 + t^2}$

o) $h(u) = \mathrm{sh}\,(u)\mathrm{ch}\,(u)$

Exercice 36 – Dérivées avec la règle de la chaîne

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de la chaîne pour les fonctions composées :

a) $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^5$

b) $f(y) = \dfrac{1}{(y^3 + 1)^5}$

c) $f(z) = \sqrt{z^2 - 3z + 1}$

d) $f(t) = \sqrt{\sin t}$

e) $g(x) = e^{x^3 + 2x + 1}$

f) $g(y) = \ln(2y^2 + 1)$

g) $g(z) = \ln\left(\dfrac{2z}{z^2 + 1}\right)$

h) $g(t) = \ln(\ln t)$

i) $h(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

j) $h(y) = \arcsin(y^2 + y)$

k) $h(z) = \arcsin\sqrt{z + 1}$

l) $h(t) = \left(\dfrac{t}{1 - \sqrt{1 - t^2}}\right)^2$

Exercice 37 – Dérivées avec toutes les règles

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, en utilisant la règle de Leibniz et celle de la chaîne :

a) $f(x) = x^2\sqrt{1 + x^2}$

b) $g(y) = \dfrac{\sqrt{1 + y}}{1 + \sqrt{y}}$

c) $h(z) = \dfrac{z}{z - \sqrt{1 + z^2}}$

d) $x(t) = 2t\,\ln(\sqrt{2t})$

e) $y(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

f) $z(y) = \dfrac{e^{\sin y}}{\cos y}$

g) $F(u) = u \tan(u^2 + 1)$

h) $G(v) = v \arcsin v + \sqrt{1 - v^2}$

i) $H(\theta) = \arcsin(2\theta^2 - 1)$

TD 9 – POINTS CRITIQUES, EXTREMA LOCAUX ET POINTS D'INFLÉXION

Exercice 38 – Extrema locaux
Détérminer les extrema locaux (minimum et maximum locaux) des fonctions f ci-dessous (toutes dérivables), s'il y en a, en suivant la procédure suivante :

— Trouver le domaine de définition de la fonction.
— Calculer la dérivée f'.
— Trouver les points critiques.
— Trouver le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations en indiquant où la fonction est strictement croissante ($f'(x) > 0$) ou strictement decroissante ($f'(x) < 0$).
— Parmi les points critiques, trouver les extrema locaux (minimum et maximum) et calculer la valeur de f correspondante.

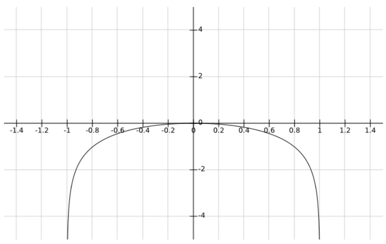
a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$
b) $f(x) = x^4 + 2x^3$
c) $f(x) = \dfrac{1}{3 + x^2}$
d) $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$
e) $f(x) = \ln(1 - x^2)$
f) $f(x) = \sin(x^2)$

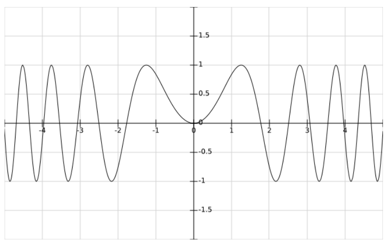
Exercice 39 – Points d'inflexion, convexité et concavité
Détérminer les points d'inflexion des fonctions de l'exercice 38, s'il y en a, en procédant comme suit :

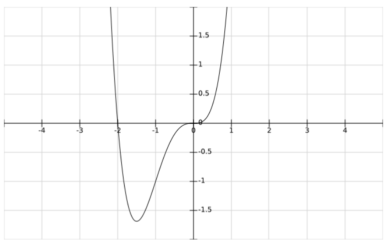
— Calculer la dérivée seconde f''.
— Trouver les points où f'' s'annulle.
— Parmi ceux-ci, trouver les points d'inflexion (autour desquels $f'(x)$ ne change pas de signe).

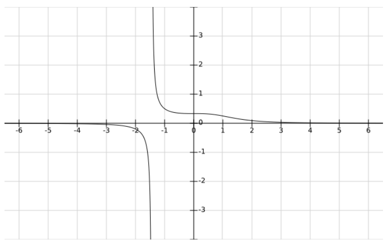
N.B. On peut profiter de ces calculs pour vérifier la nature des points critiques : en un minimum local la fonction est convexe ($f''(x) > 0$), en un maximum local la fonction est concave ($f''(x) < 0$).

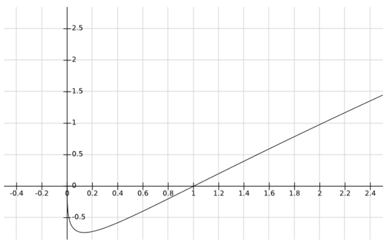
Exercice 40 – Graphe de fonctions
Indiquer, parmi les fonctions de l'exercice 38, laquelle correspond à chacun des graphes suivants :

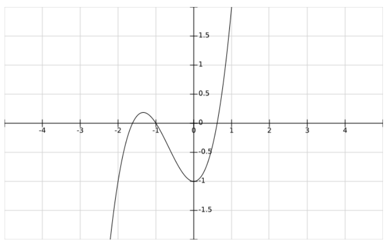
A) 

D) 

B) 

E) 

C) 

F) 

TD 10 – FORMULE DE TAYLOR ET APPROXIMATIONS

Exercice 41 – Polynôme de Taylor
En utilisant la formule de Talor-Young (avec reste négligeable), trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes, autour des points indiqués :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$

b) $f(x) = \sin(3x)$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

c) $f(x) = e^{2x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$

d) $f(x) = \mathrm{ch}\,(2x)$ autour de $x_0 = 0$

e) $f(x) = \ln(1+2x)$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$

f) $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$

g) $f(x) = \cos^2 x$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

h) $f(x) = \sqrt{1+\arcsin x}$ autour de $x_0 = 0$

Exercice 42 – Valeur approchées
En utilisant les polynômes de Taylor trouvés dans l'exercice 41, calculer les valeurs approchées suivantes, à l'ordre 1 et 2 :

a) $\dfrac{1}{1+10^{-2}}$ b) $e^{1/10}$ c) $\ln(1+2/100)$ d) $\cos^2(10^{-3})$

Exercice 43 – Formule de Taylor-Lagrange et approximations (Facultatif)
En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer les inégalités suivantes pour tout $x \geqslant 0$, et répondre aux questions d'approximation.

a) $\sin x \leqslant x$

b) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

Pour quelles valeurs de $x \geqslant 0$ peut-on dire que $1 - \dfrac{x^2}{2}$ est une approximation de $\cos x$ à 10^{-2} près, c'est-à-dire que $\left| \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)\right| \leqslant 10^{-2}$?

c) $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$

d) $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$

Pour quelles valeurs de $x \geqslant 0$ peut-on dire que $x - \dfrac{x^2}{2}$ est une approximation de $\ln(1+x)$ à 10^{-3} près ?

Exercice 44 – Primitives élémentaires
À l'aide d'un tableau de dérivées des fonctions élémentaires, calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int (x^5 + 3x^3 + x^2)\ dx$

b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3}\right)\ dy$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+y^2}\ dy$

d) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{u}} + \frac{1}{u\sqrt{u}}\right)\ du$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

f) $\displaystyle\int (5e^t + 2e^{-t})\ dt$

g) $\displaystyle\int (e^{5t} + e^{-2t})\ dt$

h) $\displaystyle\int (\sin\theta - \cos\theta)\ d\theta$

i) $\displaystyle\int \sin(3\theta)\ d\theta$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2\theta}\ d\theta$

k) $\displaystyle\int \operatorname{sh}(2x)\ dx$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\ dx$

Exercice 45 – Intégration par partie
Calculer les primitives suivantes par partie :

a) $\displaystyle\int xe^{-x}\ dy$

b) $\displaystyle\int (x^2 + 5x + 6)\sin x\ dx$

c) $\displaystyle\int e^x \cos x\ dx$

d) $\displaystyle\int \cos^2 x\ du$

e) $\displaystyle\int \ln x\ dt$

f) $\displaystyle\int x^2 \ln x\ du$

g) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\ dx$

h) $\displaystyle\int \sin(3x)\cos(5x)\ dx$

i) $\displaystyle\int \arctan x\ dx$

Exercice 46 – Intégration par changement de variable
Calculer les primitives suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\ dx \quad (x = \frac{1}{t})$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\ dx \quad (x = -\ln t)$

c) $\displaystyle\int x\,(5x^2-3)^7\ dx \quad (u = 5x^2 - 3)$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\ dx \quad (u = e^{-x})$

e) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3}\ dx \quad (u = \sqrt{1+x^3})$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{3+2\cos x}\ dx \quad (t = \tan\frac{x}{2})$

Exercice 47 – Primitive des fractions rationnelles
Calculer les primitives suivantes par changement de variable :

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^2+1}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^3}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x}{x+1}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$

Exercice 48 – Intégrales
Calculer les primitives ou intégrales suivantes par changement de variable :

a) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos x\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$

c) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x+\sin x}\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx$

k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

m) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$

n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$

o) $\displaystyle\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)\,dx$

p) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,dx$

q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

r) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{4x+2}}\,dx$

s) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx$

t) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\,\cos x}\,dx$

u) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}\,dx$

TD 13 – ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 1ER ORDRE

Exercice 49 – Équations différentielles du 1er ordre linéaires
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $f'(t) = 0$

b) $g'(t) = t^3$

c) $x'(t) = x(t) + t$

d) $y'(t) + y(t) = t^2$

e) $z'(t) = t\ z(t)$

f) $(1+t^2)\, u'(t) + t\, u(t) = 2t^2 + 1$

g) $t^2\, x'(t) = x(t)$

h) $f'(t) - \dfrac{1}{2t}\, f(t) = \dfrac{t+1}{t}$

i) $(1+t^2)\, z'(t) + z(t) = 0$

j) $\cos t\ x'(t) + \sin t\ x(t) = 1$

k) $2z'(t) = 3z(t)$

l) $t\, y'(t) + 2y(t) = t^2 - 3$

m) $x'(t) - \dfrac{2}{t+1}\, x(t) = (t+1)^3$

n) $u'(t) + 2u(t) = 0$

o) $t^3\, g'(t) + t^2\, g(t) = t$

Exercice 50 – Équations différentielles du 1er ordre avec condition initiale
Résoudre les équations différentielles suivantes et trouver l'unique solution qui vérifie la condition initiale donnée :

a) $\begin{cases} t\ x'(t) = 2x(t) + t^3 \\ x(1) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sin t\ y'(t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 3 \quad \text{et} \quad y(-\frac{\pi}{2}) = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} z'(t) - \dfrac{2}{t}\, z(t) = t^2 e^t \end{cases}$

d) $\begin{cases} t\, u'(t) - t\, u(t) = e^t \end{cases}$

Exercice 51 – Équations différentielles du 1er ordre non linéaires
Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $r'(t) = \dfrac{1}{r(t)}$

b) $z'(t) = z^2(t)$

c) $r'(t) = \dfrac{1}{r^2(t)}$

d) $x'(t) = e^t\, e^{x(t))}$

e) $y'(t) = t\, \big(y^2(t) - 1\big)$

f) $t\, z'(t) + z^2(t) = 0$

TD 14 – ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 2ÈME ORDRE

Exercice 52 – Équations différentielles du 2ème ordre à coefficients constants

a) $f''(t) = 0$

b) $g''(t) = t^3$

c) $x''(t) + x'(t) = 0$

d) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = t + 1$

e) $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^t + t$

f) $u''(t) + u'(t) - 2u(t) = \sin t$

g) $x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$

h) $f''(t) + f(t) = \cos^2 t$

i) $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$

j) $u''(t) - 6u'(t) + 9u(t) = 0$

k) $g''(t) - 2g'(t) + 5g(t) = 10 \cos t$

l) $z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{-t}$

m) $y''(t) + y'(t) - 6y(t) = \sin(2t)$

n) $u''(t) + 2u'(t) - 5u(t) = 0$

Exercice 53 – Équations différentielles du 2ème ordre avec conditions initiales

Résoudre les équations différentielles suivantes et trouver l'unique solution qui vérifie la condition initiale donnée :

a) $\begin{cases} f''(t) + f'(t) - 12f(t) = 0 \\ f(2) = 2 \\ f'(2) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u''(t) + 9u(t) = 0 \\ u(\pi/2) = 0 \\ u'(\pi/2) = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 4t \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$