UCBL – L1 PCSI – UE TMB

Techniques Mathématiques de Base

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

`http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/`

Programme du cours

Partie I : Algèbre linéaire et géométrie cartesienne

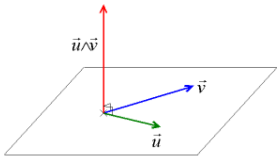
Ch. 1 – Nombres complexes, factorisation de polynômes
Ch. 2 – Espaces vectoriels et vecteurs
Ch. 3 – Transformations linéaires et matrices
Ch. 4 – Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace

Partie II : Fonctions d'une variable réelle

Ch. 5 – Fonctions, graphes, réciproques
Ch. 6 – Dérivées, extrema locaux, approximation de Taylor
Ch. 7 – Primitives et intégrales
Ch. 8 – Équations différentielles

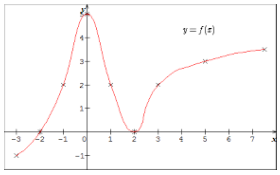
But du cours:

Bases du calcul vectoriel
(produit vectoriel)

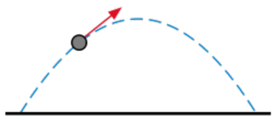


Symétries
(rotation et reflexion)

Minima et maxima locaux
(graphe de fonction)



Équations différentielles
(trajectoire d'un projectile)



Pour cela: nombres complexes, vecteurs, matrices, géométrie cartesienne, dérivées, primitives...

TMB
A. Frabetti
1 Complexes
Définition
Rep. polaire
Polynômes

Chapitre 1
Nombres complexes

Dans ce chapitre:

1. Nombres complexes (conjugués, opérations).
2. Représentation polaire (module, argument, exponentiel complexe).
3. Polynômes complexes (racines, factorisation).

1. Nombres complexes

Définition: Un **nombre complexe** est un nombre de la forme $\boxed{z = x + iy}$, où x et y sont des nombres réels et i est un symbol ayant la propriété $\boxed{i^2 = -1}$, qui s'appelle **unité imaginaire**.

Attention: i n'est pas un nombre réel.

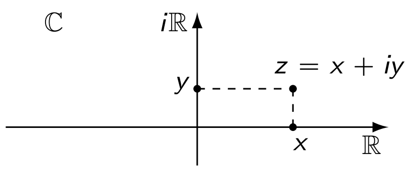
Exemples: $3 + 2i$, **zéro** $0 = 0 + i\,0$, **un** $1 = 1 + i\,0$.

- On note $\boxed{\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}}$ l'**ensemble des nombres complexes**. Il contient deux sous-ensembles:

  les nombres réels: $\boxed{\mathbb{R} = \{x = x + i0 \mid x \in \mathbb{R}\}}$;

  les nombres **imaginaires purs**: $\boxed{i\mathbb{R} = \{iy = 0 + iy \mid y \in \mathbb{R}\}}$.

- L'ensemble $\mathbb{C}$ se represente comme **plan complexe**:



Parties réelle et imaginaire, conjugué complexe

Définition: Pour un nombre complexe $z = x + iy$, on appelle:

- **partie réelle** le nombre réel $\boxed{\mathrm{Re}(z) = x}$
- **partie imaginaire** le nombre réel $\boxed{\mathrm{Im}(z) = y}$
- **conjugué complexe** le nombre complexe $\boxed{\overline{z} = x - iy}$

Exemples –

- Pour $z = 3 - 2i$: $\mathrm{Re}(z) = 3$, $\mathrm{Im}(z) = -2$, $\overline{z} = 3 + 2i$.
- Le conjugué d'un réel $z = \sqrt{2}$ est lui-même: $\overline{z} = \sqrt{2}$.
- Le conjugué d'un imaginaire pur $z = 5i$ est son opposé: $\overline{z} = -5i$.

Proprietés: Soyent z et w deux nombres complexes. Alors:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
- $\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$ et $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/2i$
- $\boxed{\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}}$ et $\boxed{\overline{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}}$

Égalité et opérations entre nombres complexes

Définition: Soient $z = x + iy$ et $w = u + iv$ deux nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **egalité**: $z = w$ si et seulment si $x = u$ et $y = v$
- **addition:** $z + w = (x + u) + i(y + v)$
- **soustraction:** $z - w = (x - u) + i(y - v)$
- **produit par scalaire:** $\lambda z = (\lambda x) + i(\lambda y)$
- **multiplication:** $$\begin{aligned} z\,w &= xu + iyu + ixv + i^2 yv \\ &= (xu - yv) + i(xv + yu) \end{aligned}$$
- **division:** $$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{z\,\overline{w}}{w\,\overline{w}} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} \\ &= \frac{xu + yv}{u^2+v^2} + i\,\frac{yu - xu}{u^2+v^2} \end{aligned}$$

Proprietés: Les opérations dans $\mathbb{C}$ ont les mêmes proprietés que leurs opérations analogues dans $\mathbb{R}$.

Exemples: opérations entre nombres complexes

Exemples: Soient $z = 2\,(3 + 2i)$ et $w = 5 - i$. Alors:

$$z + w = (6 + 4i) + (5 - i) = 11 + 3i$$

$$z - w = (6 + 4i) - (5 - i) = 1 + 5i$$

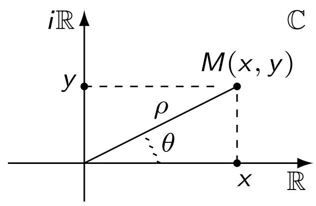
$$\begin{aligned} zw &= 2\,(3+2i)(5-i) \\ &= 2\,(15 - 3i + 10i - 2i^2) \\ &= 2\,\big((15+2) + (-3+10)i\big) \\ &= 2\,(17 + 7i) = 34 + 14i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2\,(3+2i)}{5-i} = \frac{2\,(3+2i)(5+i)}{25+1} \\ &= \frac{2\,(15 - 2 + 10i + 3i)}{26} \\ &= \frac{13}{13} + \frac{13}{13} i = 1 + i \end{aligned}$$

2. Module et argument

Définition: On identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ avec le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On appelle alors:

- **affixe complexe** d'un point $M(x,y)$ le nombre complexe $z = x + iy$
- **module** de z la distance $|z| = \mathrm{dist}(M,O) = \rho$
- **argument** de z l'angle θ comme dans la figure:



Proprietés: On a alors:

- $\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \rho}$
- $\boxed{\mathrm{Re}(z) = x = \rho\cos\theta}$ et $\boxed{\mathrm{I}m(z) = y = \rho\sin\theta}$
- $\boxed{\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$ et $\boxed{\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$
- $\boxed{\tan\theta = \dfrac{y}{x}}$ si $x \neq 0$

Exercice: module et argument

TMB
A. Frabetti
1 Complexes
Définition
Rep. polaire
Polynômes

Exercice: *Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants.*

- $z = -1 - i$

Réponse: Le module est $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
L'argument est un angle θ tel que

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Par exemple, $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ est un argument de z.

- $z = 5 - 3i$

Réponse: Le module est $|z| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$.
L'argument est un angle θ tel que

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{34}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{-3}{\sqrt{34}}.$$

De cet angle on peut dire (sans calculette) que $\tan\theta = -3/5$.

Proprietés du module

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le **module** de z est donc $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Proprietés:

- $\boxed{|z| \geqslant 0}$ et $\boxed{|z| = 0 \text{ si et seulement si } z = 0}$
- si $z \in \mathbb{R}$, alors $|z|$ est la valeur absolue du réel z
- $|-z| = |z|$;
- $\boxed{z\bar{z} = |z|^2}$ par conséquent $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$ si $z \neq 0$
- $\boxed{|z_1 z_2| = |z_1||z_2|}$ et $\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}}$ si $z \neq 0$
- $\boxed{|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|}$
  et $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $z_1 = \lambda\, z_2$ ou $\lambda \in \mathbb{R}$
- $|z_1 + z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$, i.e. $\begin{cases} |z_1+z_2| \geqslant |z_1| - |z_2| \text{ si } |z_1| \geqslant |z_2|, \\ |z_1+z_2| \geqslant |z_2| - |z_1| \text{ si } |z_1| \leqslant |z_2|. \end{cases}$

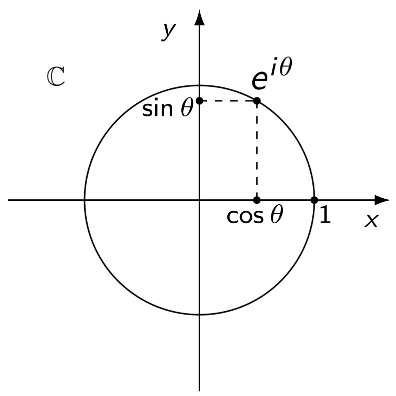
Exponentiel complexe

Définition: L'**exponentiel complexe d'argument** $\theta \in \mathbb{R}$ est le nombre complexe $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$.

Exemples: $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$

Proprietés:

- $e^{i\theta}$ est **périodique** de **période** 2π, i.e. $\boxed{e^{i(\theta+2\pi k)} = e^{i\theta}}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$
- $e^{i\theta}$ est un nombre complexe **unitaire**, i.e. $\boxed{|e^{i\theta}| = 1}$
- le point $M(e^{i\theta})$ se trouve sur le **cercle unitaire** $x^2 + y^2 = 1$



Représentation polaire

Théorème: Tout nombre complexe $z \neq 0$ s'ecrit sous la **forme polaire** $\boxed{z = \rho\, e^{i\theta}}$, où $\rho = |z|$.

En effet: $z = x + iy = \rho \cos\theta + i\rho \sin\theta = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) = \rho\, e^{i\theta}$.

Proprietés: Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $w = re^{i\varphi}$ deux nombres complexes en forme polaire. On a alors:

- **produit**: $z\, w = (\rho\, r)\; e^{i(\theta+\varphi)}$,
- **puissance entière positive**: $z^n = \rho^n e^{in\theta}$, où $n \in \mathbb{N}$
- **puissance entière negative**: $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{\rho^n} e^{-in\theta}$ si $\rho \neq 0$,
- **racines n-ièmes**: $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ où $k = 0, 1, ..., n-1$ (Attention: il y a n distinctes racines n-ièmes!).
- **formule de Moivre**: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

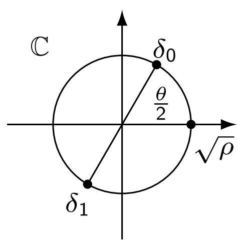
  i.e. $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

Racines carrées et cubiques d'un nombre complexe

- Les **racines carrées** de $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ sont toujours deux, δ_0 et δ_1:

$$\delta_k = \sqrt{\rho}\; e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)}, \quad k = 0, 1$$

c-à-d $\boxed{\delta_0 = \sqrt{\rho}\; e^{i\frac{\theta}{2}}}$ et $\boxed{\delta_1 = \sqrt{\rho}\; e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}}$

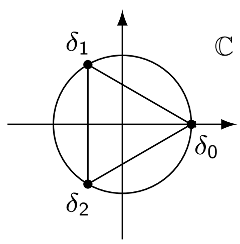


Proprieté: On a $\delta_1 = -\delta_0$.

- Les **racines cubiques** de $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ sont toujours trois:

$$\delta_k = \sqrt[3]{\rho}\; e^{i\left(\frac{\theta}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2$$

Proprieté: Si une racine cubique est réelle, les autres deux sont conjugués complexes.



Exemple: Si $\theta = 0$ et $\delta_0 = \sqrt[3]{\rho}$, on a

$\delta_1 = \sqrt[3]{\rho}\; e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\delta_2 = \sqrt[3]{\rho}\; e^{i\frac{4\pi}{3}} = \overline{\delta_1}$

Exercice: racine carrée de nombres complexes

Exercice: *Calculer les racines carrées des complexes suivants:*

- $z = 1 + i\sqrt{3}$

Réponse: On écrit z en forme polaire: $z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Alors:

$$\delta_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$$

$$\delta_1 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$$

- $z = 15 - 8i$

Réponse: Puisque on ne connait pas la forme polaire de z, on cherche $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = z = 15 - 8i$

(et donc aussi $\left|\delta^2\right| = x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{225 + 64} = 17$):

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = -8 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -\frac{4}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = -4 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} y = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

On a donc $\delta_0 = 4 - i$ et $\delta_1 = -4 + i$.

3. Polynômes complexes

Définition: Un **polynôme complexe** est un polynôme $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ avec coefficients complexes, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. (Peu importe X, c'est une variable.)

Le **degré** de $P(X)$ est le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$.

Exemples: $iX^3 + (5 - i)X$ est un polynôme de degré 3
$i\sin(X^3) + 5X$ n'est pas un polynôme

Définition: Une **factorisation** d'un polynôme $P(X)$ est l'ecriture

$$P(X) = Q_1(X)\, Q_2(X) \cdots Q_l(X)$$

comme produit de polynômes de degré inférieur à celui de $P(X)$.

Exemple: $iX^3 + (5 - i)X = iX(X^2 + 1 - 5i)$

Définition: Un polynôme $P(X)$ est **irreductible** [dans $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$] s'il ne se factorise pas [dans $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$].

Exemples: $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ n'est pas irreductible
$X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$ est irreductible dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{C}$.

Racines des polynômes

Définition: Une **racine** d'un polynôme complexe $P(X)$ est un nombre complexe z tel que $P(z) = 0$.

Exemple: $z = i$ et $z = -i$ sont racines de X^2+1

Lemme: Si z est une racine de $P(X)$, alors il existe un entier $m \geqslant 1$ et un polynôme $Q(X)$ tels que

$$P(X) = (X - z)^m Q(X) \quad \text{et} \quad Q(z) \neq 0.$$

On appelle m la **multiplicité** de la racine z.

Théorème de d'Alembert-Gauss: Tout polynôme complexe $P(X)$ de degré d se factorise comme

$$P(X) = z_0 (X - z_1)^{m_1} \cdots (X - z_l)^{m_l}$$

où $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_1, \ldots, z_l$ sont les racines de $P(X)$ et $m_1 + \cdots + m_l = d$.

Par conséquent:

- Tout polynôme complexe de degré d admet d racines.
- Seuls les polynômes complexes $a_1 X + a_0$ sont irreductibles.

Racines d'un polynôme complexe de degré 2

Proposition: Les solutions de l'équation $\boxed{az^2 + bz + c = 0}$, à coefficients complexes, sont

$$\boxed{z = \frac{-b \pm \delta}{2a} \in \mathbb{C}}$$

où $\delta \in \mathbb{C}$ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire un nombre complexe tel que $\delta^2 = \Delta$.

Par conséquent: Le polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ a

- une racine double $\quad z = -b/2a$ si $\Delta = 0$,
- deux racines distinctes $\quad z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ si $\Delta \neq 0$.

Exercice: équation complexe de degré 2

Exercice: *Résoudre l'équation* $z^2 - (1+i)z + 6 - 2i = 0.$

Réponse: Les solutions de cette équation sont $z = \dfrac{1+i\pm\delta}{2}$, où il faut trouver $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$ et $\left|\delta^2\right| = |\Delta|$, c'est-à-dire:

$$\begin{aligned}(x^2-y^2) + i\,2xy &= (1+i)^2 - 4(6-2i)\\ &= 1+2i-1-24+8i = -24+10i\\ x^2+y^2 &= 2\,|-12+5i| = 2\sqrt{144+25} = 2\times 13 = 26\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{cases} x^2-y^2 = -24 \\ 2xy = 10 \\ x^2+y^2 = 26\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ xy = 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 5/x = \pm 5\end{cases}$$

et par conséquent $\delta = \pm(1+5i)$. On a donc

$$z_1 = \frac{1+i+(1+5i)}{2} = \frac{2+6i}{2} = 1+3i$$
$$z_2 = \frac{1+i-(1+5i)}{2} = \frac{0-4i}{2} = -2i$$

Racines complexes d'un polynôme réel

Proposition: Si $P(X)$ est un polynôme à coefficients réels, et $z \in \mathbb{C}$ est une racine complexe de $P(X)$ de multiplicité m, alors son conjugué $\overline{z}$ est aussi une racine de $P(X)$, de même multiplicité m.

Exemple: Le polynôme réel X^2+1 a comme racines $\pm i$, où $-i = \overline{i}$.

Par conséquent:

- Puisque $z = \overline{z}$ seulement si $z \in \mathbb{R}$, tout polynôme réel de degré impair $d \geqslant 3$ admet au moins une racine réelle.
- Les polynômes réels irreductibles sont de degré 1 ou 2, c'est-à-dire qu'ils sont de la forme $a_1X + a_0$ ou bien $a_2X^2 + a_1X + a_0$.
- Tout polynôme réel irréductible de degré 2 admet deux racines complexes conjuguées, z et $\overline{z}$.

Exemple: Le polynôme $X^2 - 4X + 5$ est irreductible dans $\mathbb{R}$, car $\Delta = 16 - 20 < 0$, mais a deux racines complexes $2+i$ et $2-i = \overline{2+i}$.