UCBL – L1 PCSI – UE TMB

Techniques Mathématiques de Base

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

`http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/`

Programme du cours

Partie I : Algèbre linéaire et géométrie cartesienne

Ch. 1 – Nombres complexes, factorisation de polynômes
Ch. 2 – Espaces vectoriels et vecteurs
Ch. 3 – Transformations linéaires et matrices
Ch. 4 – Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace

Partie II : Fonctions d'une variable réelle

Ch. 5 – Fonctions, graphes, réciproques
Ch. 6 – Dérivées, extrema locaux, approximation de Taylor
Ch. 7 – Primitives et intégrales
Ch. 8 – Équations différentielles

Chapitre 2
Espaces vectoriels et vecteurs

Idée: En physique, il y a des *grandeurs* de deux types:

masse, charge, temperature = nombre $\longrightarrow$ **scalaire**
(à part l'unité de mesure)

force, vitesse, accéleration = point d'application
\+ direction (et sense)
\+ longueur
= flèche $\longrightarrow$ **vecteur**

Dans ce chapitre:

1. Espaces vectoriels (produit *par* scalaire). Combinaisons linéares, base, dimension. Exemples: $\mathbb{R}^n$, vecteurs du plan et de l'espace.
2. Produit scalaire et norme.
3. Produit vectoriel et produit mixte.

1. Espaces vectoriels (produit par scalaire)

Définition : Un **espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$)** est un ensemble V muni

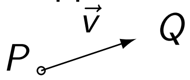
- d'une **addition** $\boxed{\vec{u}+\vec{v}}$ pour tout $\vec{u},\vec{v}\in V$,
  et d'un **zéro** $\vec{0}$ tel que $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$,
- d'un **produit par scalaire** $\boxed{t\ \vec{v}}$ pour tout $\vec{v}\in V$ et $t\in\mathbb{R}$,
  tel que $\boxed{t\ (\vec{u}+\vec{v}) = t\ \vec{u} + t\ \vec{v}}$.

On appelle **vecteurs** les éléments $\vec{v}$ de V et **scalaires** les réels t.

Proposition: Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels:

- L'ensemble $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}$ avec
  addition: $(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$
  produit par scalaire: $t\ (x_1,\dots,x_n) = (t\ x_1,\dots,t\ x_n)$
- L'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(x)\ \}$ avec
  addition: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
  produit par scalaire: $(t\ f)(x) = t\ f(x),\quad t\in\mathbb{R}$

Vecteurs du plan et de l'espace

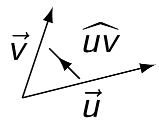
Définition: Rappellons qu'un **vecteur** du plan ou de l'espace est une flèche 

, notée $\vec{v} \equiv \overrightarrow{PQ}$, caracterisée par

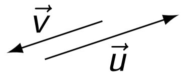
- le **point d'application** P;
- la **direction** et le **sens**, donnés par la flèche;
- la **longueur** $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \mathrm{dist}(P, Q) \in \mathbb{R}$.

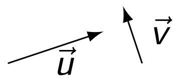
Souvent on identifie les vecteurs qu'on obtient par **translation**, ainsi P change mais on dit que le vecteur $\vec{v}$ ne change pas.

Définition: Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

- l'**angle** $\widehat{uv}$ est l'angle orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$. 

.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **parallèles**, ou **colinéaires**, et on note $\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v}}$, si $\boxed{\sin(\widehat{uv}) = 0}$. 

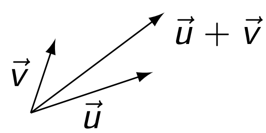
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **perpendiculaires**, ou **orthogonaux**, et on note $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v}}$, si $\boxed{\cos(\widehat{uv}) = 0}$. 

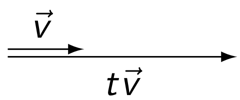
Espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(\text{plan})$ et $\mathrm{Vect}(\text{espace})$

Notation: L'ensemble des vecteurs appliqués en un point fixé O est noté

- $\mathrm{Vect}(\text{espace})$ pour les vecteurs de l'epace,
- $\mathrm{Vect}(\text{plan})$ pour les vecteurs du plan.

Proposition: $\mathrm{Vect}(\text{espace})$ et $\mathrm{Vect}(\text{plan})$ sont des espaces vectoriels, avec

- **addition**: $\vec{u} + \vec{v} =$ 

- **produit par scalaire**: $t\,\vec{v} =$ 

Attention: l'ensemble des vecteurs appliqués en tous les points n'est pas un espace vectoriel car il manque le zéro (on l'appelle **espace affine**).

Proprieté: Le produit par scalaire caracterise les vecteurs parallèles:

$$\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = t\vec{v} \quad \text{pour un } t \neq 0}$$

Combinaisons linéaires

Définition: Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,... des vecteurs d'un espace vectoriel V.

- Une **combinaison linéaire de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,...** est un vecteur $\overrightarrow{A}$ de la forme

$$\boxed{\overrightarrow{A} = r\,\vec{u} + s\,\vec{v} + t\,\vec{w} + \cdots,}$$

  où $r, s, t, \ldots \in \mathbb{R}$ s'appellent les **coefficients scalaires**.

  Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(5,4,9)$ est une combinaison linéaire de $(1,2,3)$ et $(1,-1,0)$, car $3\,(1,2,3) + 2\,(1,-1,0) = (5,4,9)$.

- L'espace vectoriel **engendré** par $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$,... est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles:

$$\boxed{\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots) = \Big\{ r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} + \cdots \,\Big|\, r, s, t, \ldots \in \mathbb{R} \Big\}.}$$

  Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\vec{u} = (1,0,0)$ et $\vec{v} = (0,1,0)$ engendrent l'espace $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, car les combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont

$$r\,(1,0,0) + s\,(0,1,0) = (r,0,0) + (0,s,0) = (r,s,0)$$

  c'est-à-dire tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ quand $r, s \in \mathbb{R}$ varient.

Base et dimension d'un espace vectoriel

Définition: Une **base** d'un espace vectoriel V est un ensemble <u>minimal</u> de vecteurs $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots\}$ qui <u>engendrent V</u>.

Cela signifie que <u>tout vecteur $\vec{v} \in V$</u> s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$,... :

$$\vec{v} = t_1\,\vec{e}_1 + t_2\,\vec{e}_2 + \cdots, \quad \text{avec } t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{R}.$$

Proprieté: La base n'est pas unique, mais <u>toutes les bases ont le même nombre d'éléments</u>, qui s'appelle **dimension** de V et est notée $\boxed{\dim V}$. La dimension peut être <u>finie</u> (un nombre) ou <u>infinie</u>.

Exemples:

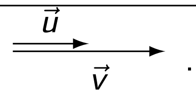
- Les vecteurs $\vec{e}_1 = (1,0)$ et $\vec{e}_2 = (0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$, qui s'appelle **base canonique**. Par conséquent, $\boxed{\dim \mathbb{R}^2 = 2}$.
- Les vecteurs $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, qui s'appelle **base canonique**. Donc $\boxed{\dim \mathbb{R}^3 = 3}$.
- Pour les fonctions, on sait que $\boxed{\dim \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \infty}$, mais on ne connait pas de bases.

TMB
A. Frabetti
2 Vecteurs
Espaces vectoriels
Produit scalaire
Produit vectoriel

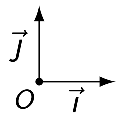
Base et dimension de $\mathrm{Vect}(\text{plan})$

Exemples:

- Un vecteur $\vec{v}$ engendre une droite. $\boxed{\Delta = \{ t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \}}$
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ <u>non parallèles</u> engendrent un plan. $\boxed{\pi = \{ s\vec{u} + t\vec{v} \mid s,t \in \mathbb{R} \}}$
- Attention: deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ <u>parallèles</u> n'engendrent pas un plan mais une droite.

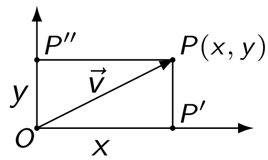


- Les deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ de la figure, de longueur 1, forment une base qu'on appelle le **repère cartesien**, et qu'on note $\boxed{(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)}$. Donc $\boxed{\dim \mathrm{Vect}(\text{plan}) = 2}$.



Définition:

- On appelle **coordonnées cartesiennes** d'un vecteur $\vec{v}$ le couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\boxed{\vec{v} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}}$ et on note $\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$.
- Si $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, on obtient ainsi les **coordonnées cartesiennes de** P, et on note $\boxed{P(x,y)}$: $\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \end{cases}$

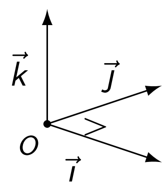


Base et dimension de $\mathrm{Vect}(\text{espace})$

Exemples:

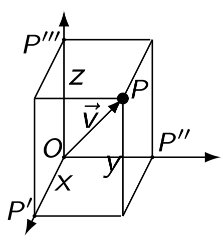
- Trois vecteurs dans l'espace peuvent engendrer une <u>droite</u> (s'ils sont parallèles), un <u>plan</u> (si l'un est combinaison linéaire des autres deux) ou <u>tout l'espace</u> (si aucun n'est combinaison linéaire des autres).
- Les trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ de la figure, orthogonaux et de longueur 1, forment une base qu'on appelle le **repère cartesien**, et qu'on note $\boxed{(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\,)}$.

  Donc $\boxed{\dim \mathrm{Vect}(\text{espace}) = 3}$.



Définition:

- On appelle **coordonnées cartesiennes** d'un vecteur $\vec{v}$ le triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\boxed{\vec{v} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}}$, et on note $\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$.
- Si $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, on obtient ainsi les **coordonnées cartesiennes de** P, et on note $\boxed{P(x,y,z)}$: $\begin{cases} x = \|\overrightarrow{OP'}\| \\ y = \|\overrightarrow{OP''}\| \\ z = \|\overrightarrow{OP'''}\| \end{cases}$



Exercice

Exercice: *Les vecteurs* $\overrightarrow{A} = (3, 11, -1)$ *et* $\overrightarrow{B} = (1, 4, 0)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *sont-ils des combinaisons linéaires des vecteurs* $\vec{u} = (1, 2, 3)$ *et* $\vec{v} = (0, 1, -2)$ *?*

Réponse: Un vecteur $\overrightarrow{E}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'il existe deux nombres réels x et y tels que $\overrightarrow{E} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v} \quad (*)$. Cherchons si de tels nombres existent en résolvant cette équation quand $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.

- Pour $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{A} = (3, 11, -1)$, l'équation $(*)$ est:

$$\begin{aligned}(3, 11, -1) &= x\,(1, 2, 3) + y\,(0, 1, -2)\\ &= (x, 2x + y, 3x - 2y),\end{aligned}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 11 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 11 - 2x = 11 - 6 = 5 \\ 2y = 3x + 1 = 9 + 1 = 10 \end{cases}$$

Celui-ci admet une solution $x = 3$ et $y = 5$, donc $\overrightarrow{A}$ est bien une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, car $\overrightarrow{A} = 3\,\vec{u} + 5\,\vec{u}$.

Exercice (suite)

- Pour $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{B} = (1, 4, 0)$, l'équation $(*)$ est:

$$\begin{aligned}(1, 4, 0) &= x\,(1, 2, 3) + y\,(0, 1, -2)\\ &= (x, 2x + y, 3x - 2y),\end{aligned}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - 2x = 4 - 2 = 2 \\ 2y = 3x = 3 \end{cases}$$

Celui-ci n'admet pas de solution, car y ne peut pas valoir 2 et 3/2 au même temps.

Donc $\overrightarrow{B}$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice

Exercice: *Les vecteurs $\vec{u} = (1,2)$ et $\vec{v} = (-2,1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?*

Réponse: Puisque l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ a dimension 2, on sait qu'il faut exactement deux vecteurs pour former une base.

Alors, les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base si tout vecteur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire si, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}(a,b) &= x\,(1,2) + y\,(-2,1)\\ &= (x-2y, 2x+y).\end{aligned}$$

Cette équation donne le système

$$\begin{cases} a = x - 2y \\ b = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2y \\ 2a + 4y + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \frac{2b-4a}{5} = \frac{a+2b}{5} \\ y = \frac{b-2a}{5} \end{cases}$$

Celui-ci admet une solution $x = \frac{a+2b}{5}$ et $y = \frac{b-2a}{5}$, pour tout choix de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment bien une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Produit scalaire

Définition: Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel V est toute opération

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R} : \ (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$$

ayant les proprietés suivantes:

- **défini positif**: $\vec{v} \cdot \vec{v} \geqslant 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- **bilinéaire**: $$\begin{aligned}(t\vec{u}) \cdot \vec{v} &= t(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (t\vec{v})\\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}\\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}\end{aligned}$$
- **symétrique**: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Autres notations: $\vec{v} \cdot \vec{u} \equiv (\vec{v}, \vec{u}) \equiv \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \equiv \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle$
En méca. quantique: $\langle \, |$ = **bra** et $| \, \rangle$ = **ket** $\Rightarrow \langle \, | \, \rangle$ = **bracket** (crochet).

Attention: ne pas confondre produit scalaire et produit *par* scalaire, qui est une application $\mathbb{R} \times V \longrightarrow V : (t, \vec{v}) \mapsto t\,\vec{v}$.

Attention: les espaces vectoriels n'ont pas tous un produit scalaire.

Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Vect}(\text{espace})$

Proposition: Les formules suivantes donnent des produits scalaires:

- Dans $\mathbb{R}^3$ (et tout $\mathbb{R}^n$), on a le **produit scalaire euclidien**:

$$\boxed{(x,y,z)\cdot(x',y',z') = x\,x' + y\,y' + z\,z'}$$

Exemple: $(1,2,3)\cdot(4,-5,6) = 1\cdot 4 + 2\cdot(-5) + 3\cdot 6 = 4 - 10 + 18 = 12$

- Dans l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, on a le **produit scalaire de Hilbert**:

$$\boxed{f\cdot g = \int f(x)g(x)dx}$$

- Dans $\mathrm{Vect}(\text{plan})$ et $\mathrm{Vect}(\text{espace})$, on a:

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{u} = \|\vec{v}\|\ \|\vec{u}\|\ \cos(\widehat{\vec{v}\vec{u}})}$$

Produit scalaire dans $\mathrm{Vect}(\text{espace})$

TMB
A. Frabetti
2 Vecteurs
Espaces vectoriels
Produit scalaire
Produit vectoriel

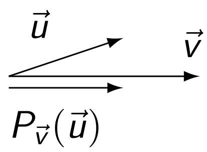
Proprietés du produit scalaire dans $\mathrm{Vect}(\text{espace})$:

- il caracterise les vecteurs orthogonaux: $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}\perp\vec{v}}$
- il donne l'aire:

$$\boxed{|\vec{u}\cdot\vec{v}^{\perp}| = \text{aire du parallelogramme de cotés } \vec{u} \text{ et } \vec{v}}$$

- il donne la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur la droite de direction $\vec{v}$:

$$\boxed{\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\ \vec{v}}$$

ex. 

- il donne la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur le plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\boxed{\mathrm{Pr}_{\vec{v},\vec{w}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\ \vec{v} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\ \vec{w}}$$

Exercice

Exercice: *Les vecteurs de l'espace* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont-ils parallèles ou orthogonaux?*

Réponse: Ils sont parallèles s'il existe un $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = t\,\vec{v}$, et ils sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\vec{u} = t\,\vec{v}$ si:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -t = 1 \\ 2t = -1 \\ t = 3 \end{cases},$$

ce qui est impossible. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas parallèles.

Par contre, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vaut:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 - 2 + 3 = 0,$$

dont $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Exercice

Exercice: *Calculer la projection orthogonale du vecteur* $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ *dans la direction de* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Réponse: La projection orthogonale de $\vec{u}$ dans la direction de $\vec{v}$ est le vecteur (parallèle à $\vec{v}$) donné par la formule $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}$.

Calculons les ingrédients nécessaires:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 2 - 5 = -5,$$

et aussi

$$\|\vec{v}\|^2 = 4 + 1 + 1 = 6,$$

donc

$$\underset{\vec{v}}{\mathrm{Pr}}(\vec{u}) = \frac{-5}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -5/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}.$$

Norme

Définition: Une **norme** sur un espace vectoriel V est toute application

$$\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{v} \mapsto \|\vec{v}\|$$

ayant les proprietés suivantes:

- **définie positive**: $\|\vec{v}\| \geqslant 0$ et $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- **multiplicative**: $\|t\vec{v}\| = |t|\,\|\vec{v}\|$, où $|t|$ = valeur absolue
- **inegalité triangulaire**: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Proprieté: Tout produit scalaire definit une norme, par la formule

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}}$$

Attention, le contraire est faux: il existe des normes qui ne viennent pas de produits scalaires.

Normes dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ et Vect(espace)

Proposition: Les formules suivantes donnent des normes:

- Dans $\mathbb{R}^3$ (et dans tout $\mathbb{R}^n$):

  norme euclidienne: $\boxed{\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

  norme L^1: $\|(x,y,z)\|_1 = |x| + |y| + |z|$

  norme L^p: $\|(x,y,z)\|_p = \Big(|x|^p + |y|^p + |z|^p\Big)^{1/p}$, avec $p \in \mathbb{N}$

  norme L^∞: $\|(x,y,z)\|_\infty = \max\{\ |x|, |y|, |z|\ \}$

- Dans des sous-ensembles opportunés de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:

  norme L^2: $\|f\|_2 = \sqrt{\int |f(x)|^2\, dx}$

  norme L^1: $\|f\|_1 = \int |f(x)|\, dx$

  norme L^p: $\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$, avec $p \in \mathbb{N}$

  norme L^∞: $\|f\|_\infty = \sup\{\ f(x),\ x \in D_f\ \}$.

- Dans Vect(plan) et Vect(espace): norme = longueur.

Exercice

Exercice: *Calculer la distance du point* $P(3,-1,2)$ *depuis l'origine, et celle depuis le point* $Q(1,0,3)$.

Réponse: La distance entre $P(x,y,z)$ et O est égale à la longueur du vecteur $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, c'est-à-dire sa norme $\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

On a donc:

$$\mathrm{dist}(O,P) = \sqrt{3^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}.$$

La distance entre $P(x,y,z)$ et $Q(a,b,c)$ est égale à la longueur du vecteur

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}.$$

On a donc:

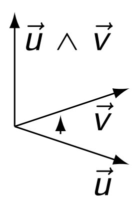
$$\mathrm{dist}(Q,P) = \sqrt{(3-1)^2+(-1-0)^2+(2-3)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

4. Produit vectoriel dans $\mathrm{Vect}(\text{espace})$

Dans les espaces vectoriels $\mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Vect}(\text{espace})$, qui ont dimension 3, on peut définir deux autres produits qui n'existent pas dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Vect}(\text{plan})$.

Définition: Le **produit vectoriel** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace est le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ avec:

- direction **orthogonale directe**
- longueur $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \sin(\widehat{uv})$



Proprietés du produit vectoriel:

- **bilinéaire**:
  $(t\vec{u}) \wedge \vec{v} = t(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (t\vec{v})$,
  $(\vec{u}+\vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$, et $\vec{u} \wedge (\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.
- **anti-symétrique**: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- il caracterise les vecteurs parallèles: $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \parallel \vec{v}}$
  (i.e. $\vec{u} = t\,\vec{v}$ avec $t \neq 0$).

Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Proprieté: En exprimant le produit vectoriel en coordonnées cartesienne, on obtient une expression valable aussi dans $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{(x, y, z) \wedge (u, v, w) = \big(yw - zv, -xw + zu, xv - yu\big)}.$$

Exemple:

$$\begin{aligned}(1, 2, 3) \wedge (4, -5, 7) &= \big(2 \cdot 7 - 3 \cdot (-5), -1 \cdot 7 + 3 \cdot 4, 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-5)\big)\\ &= \big(14 + 15, -7 + 12, 4 + 10\big)\\ &= (29, 5, 14)\end{aligned}$$

Produit mixte

Définition: Le **produit mixte** de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le scalaire

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}}.$$

Proprietés du produit mixte:

- **trilinéaire**:
  $$[t\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, t\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, t\vec{w}] = t[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}],$$
  $$[\vec{u} + \vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u'}, \vec{v}, \vec{w}], \quad \text{etc.}$$
- **symétrie mixte**:
  $$\begin{aligned}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]\\ &= -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]\end{aligned}$$
- il donne le volume:

$$\boxed{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \text{volume du parallelepipède de cotés } \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}}.$$