UCBL – L1 PCSI – UE TMB

Techniques Mathématiques de Base

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/

Programme du cours

Partie I : Algèbre linéaire et géométrie cartesienne

Ch. 1 – Nombres complexes, factorisation de polynômes
Ch. 2 – Espaces vectoriels et vecteurs
Ch. 3 – Transformations linéaires et matrices
Ch. 4 – Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace

Partie II : Fonctions d'une variable réelle

Ch. 5 – Fonctions, graphes, réciproques
Ch. 6 – Dérivées, extrema locaux, approximation de Taylor
Ch. 7 – Primitives et intégrales
Ch. 8 – Équations différentielles

Chapitre 3
Transformations linéaires et matrices

Dans ce chapitre:

1. Applications linéaires. Structure d'espace vectoriel. Exemples sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, rotations, reflexions, translations, projections.
2. Isomorphismes et isométries. Composées et réciproques. Exemple: vecteurs et coordonnées cartesiennes.
3. Matrices. Structure d'espace vectoriel. Produit, déterminant, matrice inverse.
4. Relation entre applications linéaires et matrices.
5. Symétries (= isométries) et matrices orthogonales. Déplacements, antidéplacements et asymétrie chirale.
6. Résolution matricielle de systèmes d'équations linéaires.

1. Applications linéaires

Soient V et V' deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Définition: Une **application linéaire de V à V'**, appelée aussi **transformation linéaire**, est une application

$$L : V \longrightarrow V', \ \vec{v} \mapsto \vec{v}' = L(\vec{v})$$

qui respecte les opérations sur V et sur V', c'est-à-dire qu'on a

- $\boxed{L(\vec{u} + \vec{v}) = L(\vec{u}) + L(\vec{v})}$
- $\boxed{L(t\ \vec{v}) = t\ L(\vec{v})}$

pour tout $\vec{v}, \vec{u} \in V$ et pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.

Proprieté: Cela implique que $\boxed{L(\vec{0}) = L(0 \cdot \vec{v}) = 0 \cdot L(\vec{v}) = \vec{0}}$.

Déf. équivalente: Une application $L : V \longrightarrow V'$ est **linéaire** si

$$\boxed{L(s\ \vec{u} + t\ \vec{v}) = s\ L(\vec{u}) + t\ L(\vec{v})}$$

pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$ et pour tout $s, t \in \mathbb{R}$.

Exemples sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Proposition: Une application de $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^m$ est linéaire si et seulement si ses m composantes sont des polynômes de degré 1 dans les n variables $x_1, \ldots x_n$, sans termes constants non nuls.

Exemples d'applications linéaires:

- $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad L(x,y) = (3x+y, -y, y-2x)$
- $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad L(x,y,z) = (z, x-y+z)$
- $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad L(x,y,z) = (0,0,z)$

Exemples d'applications NON linéaires:

- $L(x,y,z) = (x+1, yz)$: le terme $x+1$ contient une constante, le terme yz est un polynôme de degré 2.
- $L(x,y) = (x^3 + \sin y, xy^2)$: les termes x^3 et xy^2 sont des polynômes de degré 3, le terme $\sin y$ n'est pas un polynôme.

Exemples sur les fonctions dérivables $C^\infty(\mathbb{R})$

TMB
A. Frabetti
3 Transf. linéaires
Appl. linéaires
Isomorphismes
Matrices
Lin = Matrices
Symétries
Systèmes linéaires

Exemples d'applications linéaires:

- La **dérivation**: $\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ f \mapsto (\frac{d}{dx} f) = f'$ est linéaire:
$$\tfrac{d}{dx}(3\,f + 2\,g) = 3\,\tfrac{d}{dx} f + 2\,\tfrac{d}{dx} g.$$

- La **multiplication par** x: $M_x : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ f \mapsto M_x(f)$ définie par $M_x(f)(x) = x\ f(x)$ est linéaire:
$$\begin{aligned} M_x(3\ f + 2\ g)(x) &= x\ \Big(3\ f(x) + 2\ g(x)\Big) = 3\ \Big(x\ f(x)\Big) + 2\ \Big(x\ g(x)\Big) \\ &= \Big(3\ M_x(f) + 2\ M_x(g)\Big)(x). \end{aligned}$$

Exemples d'applications NON linéaires:

- La **puissance carrée**: $p : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ f \mapsto p(f)$ définie par $p(f)(x) = f(x)^2$ n'est pas linéaire:
$$\begin{aligned} p(3\,f + 2\,g)(x) &= (3\,f(x) + 2\,g(x))^2 \\ &= 9\,f(x)^2 + 12\,f(x)\,g(x) + 4\,g(x)^2, \end{aligned}$$
alors que $\big(3\,p(f) + 2\,p(g)\big)(x) = 3\,f(x)^2 + 2\,g(x)^2.$

Exemples sur $\mathrm{Vect}(\text{plan})$

Exemples d'applications linéaires $\mathrm{Vect}(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^2)$:

- **Rotation** d'angle θ: $\boxed{\mathrm{Rot}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\ x - \sin\theta\ y \\ \sin\theta\ x + \cos\theta\ y \end{pmatrix}}$
- **Reflexion** autour d'un axe d'angle θ avec Ox:

$$\boxed{\mathrm{Ref}_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta)\ x + \sin(2\theta)\ y \\ \sin(2\theta)\ x - \cos(2\theta)\ y \end{pmatrix}}$$

- **Projections** en direction $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$: $\boxed{P_{\vec{\imath}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\boxed{P_{\vec{\imath}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}}$

Exemples d'applications NON linéaires:

- **Translation** par un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: $\boxed{T_{\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}}$
- **Application affine** = application linéaire plus translation. Exemple:

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + 1 \\ 2y + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Espace vectoriel des applications linéaires

Proposition: L'ensemble des applications linéaires $L : V \to V'$, noté $\mathrm{Lin}(V, V')$, est un espace vectoriel avec les opérations:

- **addition**: $\boxed{(L + L')(\vec{v}) = L(\vec{v}) + L'(\vec{v})}$,

  zéro = application nulle $\boxed{0(\vec{v}) = \vec{0}}$,

- **produit par scalaire**: $\boxed{(t\ L)(\vec{v}) = t\ L(\vec{v})}$.

Exemple: Si $L, L' : \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^3) \to \mathrm{Vect}(\mathbb{R}^2)$ sont données par

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ x + z \end{pmatrix},$$

alors

$$(L + L') \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + z \\ x - y + z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (3\ L) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 3z \\ -3y \end{pmatrix}.$$

2. Isomorphismes
Composition d'applications linéaires

Définition: La **composée** de deux applications linéaires $L : U \to V$ et $L' : V \to W$ est l'application $L' \circ L : U \longrightarrow W$ définie par

$$\boxed{(L' \circ L)(\vec{u}) = L'\Big(L(\vec{u})\Big)}.$$

Exemple: Si $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $L' : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sont données par

$$L(x,y,z) = \big(3x+z, 2z-y\big) \quad \text{et} \quad L'(u,v) = \big(u+2v, 3v-u\big),$$

alors on peut calculer la composée $L' \circ L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
(L' \circ L)(x,y,z) &= L'\big(L(x,y,z)\big) \\
&= L'(3x+z, 2z-y) \\
&= \big((3x+z)+2(2z-y), 3(2z-y)-(3x+z)\big) \\
&= \big(3x+z+4z-2y, 6z-3y-3x-z\big) \\
&= \big(3x-2y+5z, -3x-3y+5z\big).
\end{aligned}$$

Inverse d'une application linéaire

TMB
A. Frabetti
3 Transf. linéaires
Appl. linéaires
Isomorphismes
Matrices
Lin = Matrices
Symétries
Systèmes linéaires

Définition: L'**inverse**, ou **réciproque**, de l'application linéaire $L : U \to V$ est l'application $L^{-1} : V \to U$ telle que

$$\boxed{(L^{-1} \circ L)(\vec{u}) = \vec{u}} \quad \text{et} \quad \boxed{(L \circ L^{-1})(\vec{v}) = \vec{v}},$$

pour tout $\vec{u} \in U$ et pour tout $\vec{v} \in V$. Autrement dit, si:

$$\boxed{L(\vec{u}) = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = L^{-1}(\vec{v})}$$

Exemple: Si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est donnée par $L(x,y) = (3x+y, -y)$, alors

$$L^{-1}(u,v) = \Big(\frac{u+v}{3}, -v\Big),$$

car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}
L(x,y) = \big(3x+y, -y\big) = (u,v) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y = u \\ -y = v \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = u-y = u-(-v) = u+v \\ y = -v \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y) = \Big(\frac{u+v}{3}, -v\Big) = L^{-1}(u,v).
\end{aligned}$$

Isomorphismes

Définition: Un **isomorphisme** entre deux espaces vect. V et V' est une application linéaire $L : V \to V'$ qui admet l'inverse $L^{-1} : V' \to V$. On dit alors que V et V' sont **isomorphes**, et on note $\boxed{V \cong V'}$.

Exemples:

- L'application $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $L(x,y) = \big(3x+y, -y\big)$ est un isomorphisme, car elle est linéaire et a l'inverse $L^{-1}(u,v) = \big(\frac{u+v}{3}, -v\big)$.
- La projection $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $P(x,y,z) = (x,y)$ est linéaire mais ce n'est pas un isomorphisme car elle n'a pas d'inverse. *Pourquoi?*
- L'application $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $L(x) = x^3$ a l'inverse $L^{-1}(u) = \sqrt[3]{u}$ mais ce n'est pas un isomorphisme car elle n'est pas linéaire.

Proprieté: Un isomorphisme $L : V \to V'$ transforme une base de V en une base de V'. Donc, si $V \cong V'$, on a $\boxed{\dim V = \dim V'}$.

Définition: Si V et V' ont un produit scalaire, un isomorphisme $L : V \to V'$ est une **isométrie** s'il conserve les produits scalaires:

$$\boxed{L(\vec{u}) \cdot L(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}}.$$

Dans ce cas il conserve aussi les longueurs (norme) et les angles.

Exemple: vecteurs et coordonnées cartesiennes

Dans le plan: On fixe un repère cartesien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dans le plan. On peut alors définir l'application

$$L : \mathrm{Vect}(\text{plan}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

qui associe à tout vecteur $\vec{v}$ ses coordonnées cartesiennes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, telles que $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

- Cette application est linéaire, car si $L(\vec{v}) = (x,y)$ et $L(\vec{v}') = (x',y')$, alors pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$ on a:

$$\begin{aligned} t\,L(\vec{v}) + t'\,L(\vec{v}') &= t\,(x,y) + t'\,(x',y') \\ &= \big(t\,x + t'\,x', t\,y + t'\,y'\big) = L\big(t\,\vec{v} + t'\,\vec{v}'\big). \end{aligned}$$

- Aussi, elle a une réciproque $L^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathrm{Vect}(\text{plan})$ qui détérmine un unique vecteur à partir de coordonnées données.
- On a donc un isomorphisme d'espaces vectoriels: $\boxed{\mathrm{Vect}(\text{plan}) \cong \mathbb{R}^2}$.
- De plus, L preserve les produits scalaires (euclidiens): c'est une isométrie.

Dans l'espace: Même chose, fixer un repère cartesien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ revient à dire que $\boxed{\mathrm{Vect}(\text{espace}) \cong \mathbb{R}^3}$, et cet isomorphisme est une isométrie.

2. Matrices

On veut répondre à la question: *Pourquoi la projection $P(x,y,z) = (x,y)$ n'a-t-elle pas d'inverse?*

Définition: Une **matrice** $m \times n$ à coéfficients réels est un tableau

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$.

Exemples: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 2 & \sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}$ matrice 2×3 $\quad \begin{pmatrix} \ln(5) & -2 \\ \pi & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ matrice 3×2

- Une **matrice carrée** est une matrice $n \times n$. **Ex.** $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
- Une **matrice colonne** est une matrice $n \times 1$, c'est-à-dire un vecteur à n composantes. **Ex.** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$
- Une **matrice ligne** est une matrice $1 \times n$. **Ex.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Espace vectoriel des matrices

Proposition: L'ensemble $\mathcal{M}_{mn} \equiv \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ des matrices $m \times n$ à coefficients réels est un espace vectoriel, avec les opérations

- **addition**:

  $$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

  et **zéro** = matrice nulle.

- **produit par scalaire**: $t\,(a_{ij}) = (t\,a_{ij}) = \begin{pmatrix} t\,a_{11} & \cdots & t\,a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t\,a_{m1} & \cdots & t\,a_{mn} \end{pmatrix}.$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$2 \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices

Définition: Le **produit** des matrices $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}$ et $(b_{jk}) \in \mathcal{M}_{np}$ est la matrice $(c_{ik}) \in \mathcal{M}_{mp}$ avec coefficients

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} \quad \textbf{règle “lignes} \times \textbf{colonnes”}.$$

Le produit est donc une opération $\mathcal{M}_{mn} \times \mathcal{M}_{np} \to \mathcal{M}_{mp}$.

Parmis les produits de matrices plus communs on a:

- $\mathcal{M}_{22} \times \mathcal{M}_{22} \to \mathcal{M}_{22}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{M}_{23} \times \mathcal{M}_{31} \to \mathcal{M}_{21}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ a'x + b'y + c'z \end{pmatrix}$$

Exemples de produits entre matrices

TMB
A. Frabetti
3 Transf. linéaires
Appl. linéaires
Isomorphismes
Matrices
Lin = Matrices
Symétries
Systèmes linéaires

Exemples:

- $\mathcal{M}_{13} \times \mathcal{M}_{32} \to \mathcal{M}_{12}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{M}_{23} \times \mathcal{M}_{32} \to \mathcal{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{M}_{23} \times \mathcal{M}_{31} \to \mathcal{M}_{21}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{M}_{32} \times \mathcal{M}_{23} \to \mathcal{M}_{33}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{M}_{22} \times \mathcal{M}_{22} \to \mathcal{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow$ $\boxed{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathbb{1} \ \textbf{unité} \text{ dans } \mathcal{M}_{22}}$
- $\mathcal{M}_{22} \times \mathcal{M}_{22} \to \mathcal{M}_{22}$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Matrices inversibles

Définition: Considerons un espace $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de matrices carrées.

- La matrice $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ s'appelle **unité** car, pour toute A, on a

$$\boxed{A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A}.$$

- L'**inverse** d'une matrice A est la matrice A^{-1} telle que

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}}.$$

- Une matrice A est **inversible** si la matrice inverse A^{-1} existe.

Remarque: La matrice inverse n'existe pas toujours. En particulier, A^{-1} n'existe pas si A n'est pas carrée, car dans ce cas on ne peut pas calculer l'un des deux produits AA^{-1} ou $A^{-1}A$.

Exemples:
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. (Vérifier!)
- La matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. *Pourquoi?*

Détérminant des matrices

Définition: Le **détérminant** d'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nn}$ est le nombre réel, noté $\det A$ ou $|a_{ij}|$, défini pour $n = 2, 3$ par:

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc}$$

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$

Exemples: $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7, \quad \det \mathbb{1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

Proprietés: Il en resulte une application $\det : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

- det n'est pas une application linéaire, car $\det(t\, A) \neq t\, \det(A)$ et $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.
- Par contre, si A est de taille n, on a: $\boxed{\det(t\, A) = t^n \det(A)}$.
- De plus: $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$ et $\boxed{\det(A^{-1}) = 1/\det(A)}$.

Calcul de la matrice inverse

Proposition:

$\boxed{\text{Une matrice } A \text{ est inversible si et seulement si } \det A \neq 0.}$

- En particulier,

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det A = ad - bc \neq 0}.$$

- Dans ce cas, sa matrice inverse est

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}.$$

Exemples:

- Pour $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ on a $\det A = 2$, donc A est inversible. On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Pour $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$ on a $\det B = 0$, donc B n'est pas inversible.

Exercice

Exercice: *Calculer l'inverse de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Réponse: D'abord on vérifie que A est inversible:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot 3) - (-1) \cdot (2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3) + 0 \cdot (2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) \\ &= 0 + (2+3) + 0 = 5. \end{aligned}$$

On cherche alors la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix}$ telle que $AA^{-1} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Puisque

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a & y-b & z-c \\ 2x+3u & 2y+3v & 2z+3w \\ -x+u & -y+v & -z+w \end{pmatrix},$$

ceci donne un système de 9 équations et 9 inconnues

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x-a=1 & y-b=0 & z-c=0 \\ 2x+3u=0 & 2y+3v=1 & 2z+3w=0 \\ -x+u=0 & -y+v=0 & -z+w=1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x=0 & y=1/5 & z=-3/5 \\ a=-1 & b=1/5 & c=-3/5 \\ u=0 & v=1/5 & w=2/5 \end{array} \right.$$

et détérmine la matrice inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & -3/5 \\ -1 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Des applications linéaires aux matrices

Proposition: Pour toute matrice $A = \big(a_{ij}\big)$ de taille $m \times n$, soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire définie par

$$\boxed{L(\vec{x}) = A\,\vec{x}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Ceci donne une application

$$\boxed{\Phi : \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad A \mapsto \Phi(A) = L}.$$

- Φ est linéaire: $\boxed{\Phi(t\,A + t'A') = t\,\Phi(A) + t'\Phi(A') = t\,L + t'L'}$.
- Φ a la réciproque: $\boxed{\Phi^{-1}\colon \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}),\ L \mapsto \Phi^{-1}(L) = A}$.
- Φ est donc un isomorphisme d'esp. vect.: $\boxed{\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$.

Exercice: des matrices aux applications linéaires

Exercice: *Pour les matrices A suivantes, trouver l'application linéaire L correspondante.*

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Réponse: On a $A \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$, donc $L \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 4z \\ -x + 3y - 2z \end{pmatrix}.$$

On a donc $\quad L(x, y, z) = (5x + 3z, -x + 3y - 2z)$.

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Réponse: On a $A \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, donc $L \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - y \\ 3y \\ 4x - 2z \end{pmatrix}.$$

On a donc $\quad L(x, y) = (5x - y, 3y, 4x - 2z)$.

Exercice: des applications linéaires aux matrices

Exercice: *Pour les applications linéaires L suivantes, trouver la matrice A correspondante.*

- $L(x,y,z) = (x-z, 3y+z-2x)$

Réponse: On a $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, donc on s'attend $A \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$: on écrit

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ -2x+3y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donc la matrice associée à L est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- $\mathrm{Rot}_\theta(x,y) = (\cos\theta\, x - \sin\theta\, y, \sin\theta\, x + \cos\theta\, y)$ **(rotation d'angle θ)**

Réponse: On a $\mathrm{Rot}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, donc on s'attend $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$: on écrit

$$\mathrm{Rot}_\theta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donc la matrice de rotation d'angle θ est $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Proprietés de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

TMB
A. Frabetti
3 Transf. linéaires
Appl. linéaires
Isomorphismes
Matrices
Lin = Matrices
Symétries
Systèmes linéaires

Considerons encore l'isomorphisme $\Phi : \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Proprietés:

- Φ transforme le produit de matrices en composée d'application lin.:

$$\boxed{\Phi(A'\ A) = L' \circ L}, \quad \text{c.-à-d.} \quad \boxed{(A'A)\ \vec{x} = L'\big(L(\vec{x})\big)}.$$

- Φ transforme la matrice inverse en l'application lin. réciproque:

$$\boxed{\Phi(A^{-1}) = L^{-1}}, \quad \text{c.-à-d.} \quad \boxed{A^{-1}\ \vec{y} = L^{-1}(\vec{y})}.$$

- Par conséquent, si $\Phi(A) = L$ alors:

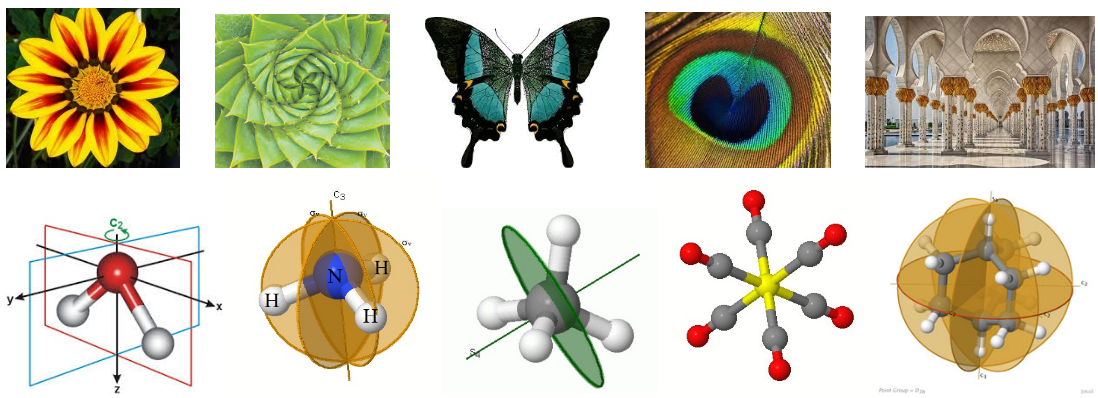
$$\boxed{L \text{ est un isomorphisme} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est inversible.}}$$

Exemple: La projection $P(x,y,z) = (x,y)$ n'est donc pas inversible car sa matrice associée ne l'est pas, puisqu'elle n'est pas carrée.
Par conséquent, P n'est pas un isomorphisme.

5. Symétries

Définition: Un objet est **symétrique** s'il ne change pas de forme quand il est sousmis à une transformation du plan ou de l'espace, qui s'appelle alors **symétrie** de l'objet.

Exemples: objets symétriques par des symétries centrales (rotations), axiales (réflexions) et mixtes.



- La *forme* d'un objet est caractérisée par les *droites parallèles*, l'*ampleur des angles* et les *longueurs*, données par le produit scalaire.
- Une **symétrie** est donc une transformation qui préserve ces caractéristiques: c'est une isométrie du plan ou de l'espace !

Matrices orthogonales

TMB
A. Frabetti
3 Transf. linéaires
Appl. linéaires
Isomorphismes
Matrices
Lin = Matrices
Symétries
Systèmes linéaires

Définition: La **transposée** d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ est la matrice $A^T = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$.

Exemples:
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi \\ 3\pi \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \pi & 3\pi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Proprieté: Si A est une matrice carrée, on a $\boxed{\det(A^T) = \det(A)}$.

Définition: Une matrice carrée A est **orthogonale** si $\boxed{A^{-1} = A^T}$.

Exemples:

- les rotations: $\mathrm{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- les reflexions: $\mathrm{Ref}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proprietés: Si A est orthogonale, on a $\boxed{\det(A) = \pm 1}$, car

$$(\det(A))^2 = \det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(\mathbb{1}) = 1.$$

(Anti)déplacements et asymétrie chirale

Proposition:

Une transformation du plan ou de l'espace est une isométrie (symétrie) si et seulement si sa matrice associée est orthogonale.

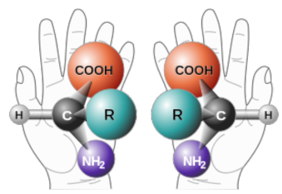
Définition: On distingue donc les

- **isométries directes**, données par des matrices orthogonales A avec $\boxed{\det(A) = +1}$, qui preservent l'orientation des angles (rotations),
- **isométries inverses**, données par des matrices orthogonales A avec $\boxed{\det(A) = -1}$, qui inversent l'orientation des angles (reflexions).

Définition:

- Un **déplacement** est une isométrie directe plus une translation.
- Un **antidéplacement** est une isométrie inverse plus une translation.

Définition: Un objet est **chiral** si aucun déplacement ne peut l'identifier à son image miroir (reflexe), comme nos mains.
C'est donc un objet asymétrique.



Exercice

Exercice: *Les transformations données par les matrices suivantes, sont-elles des symétries (directes ou inverses) ou des projections?*

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Réponse: On a

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) = 1,$$

donc A est inversible (un isomorphisme), car $\det(A) \neq 0$. Après calculs, on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T,$$

donc A est une matrice orthogonale, donc une isométrie (= symétrie). Puisque $\det(A) = 1$, on a une symétrie directe. Effectivement, on a

$$A = \begin{pmatrix} \cos(3\pi/2) & -\sin(3\pi/2) & 0 \\ \sin(3\pi/2) & \cos(3\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rot}^{Oz}_{3\pi/2},$$

donc cette matrice représente la rotation d'angle $3\pi/2$ autour de l'axe Oz.

Exercice (suite)

- $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Réponse: On a $\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, donc B est inversible. Après calculs, on trouve $B^{-1} = B^T (= B)$, donc B est une matrice orthogonale. Puisque $\det(B) = -1$, on a une symétrie inverse. Effectivement, on a

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & 0 & \sin(\pi/2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\pi/2) & 0 & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \mathrm{Ref}_{\pi/4}^{xOz},$$

qui représente la reflexion par rapport à un plan contenant l'axe Oy et qui intersecte le plan xOz en une droite penchée de $\pi/4$ sur Ox.

- $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Réponse: Puisque $\det(C) = 0$, la matrice n'est pas inversible, donc elle ne représente pas une symétrie. C'est une projection sur le plan xOy, mais ce n'est pas une projection orthogonale (ou isométrique), car $\det \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix} \right) = 10$ implique que la matrice C dilate les longueurs.

6. Systèmes d'équations linéaires

TMB
A. Frabetti
3 Transf. linéaires
Appl. linéaires
Isomorphismes
Matrices
Lin = Matrices
Symétries
Systèmes linéaires

Définition: Un **système d'équations linéaires** en n variables $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de la forme

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \cdots + a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases}$$

Un tel système peut avoir une solution, plusieurs solutions ou aucune solution, selon la dépendance mutuelle des équations.

Exemples:

- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$ admet une solution $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.
- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases}$ admet infinies solutions: tous les points de la droite d'équation $y = 2x - 4$.
- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$ n'admet aucune solution, car si $2x - y = 4$ alors $6x - 3y = 3(2x - y)$ ne peut pas s'annuler.

Pour connaître les solutions il faut parfois faire de longs calculs (surtout si $n \geqslant 3$), qui se prêtent à de nombreux erreurs.

Voici une méthode de résolution qui réduit les calculs à l'essentiel.

Équation matricielle

Proposition:

- En posant
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$
le système précédent est équivalent à l'<u>équation matricielle</u>
$$\boxed{AX = B}.$$

- Cette équation admet <u>une solution unique</u> si et seulement si $\boxed{\det(A) \neq 0}$, et dans ce cas la solution est donnée par le produit de matrices
$$\boxed{X = A^{-1}B}.$$

Exemples

Exemples:

- Le système $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x + 3y = 0 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle comme $AX = B$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Puisque $\det(A) = 6 - (-6) = 12$, il admet bien une solution unique $X = A^{-1}B$. On la calcule:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/12 & 1/12 \\ -6/12 & 2/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix},$$
donc on a
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/12 \\ -1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/4 + 0 \\ -4/2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Le système $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$ s'écrit sous forme matricielle comme $AX = B$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Puisque $\det(A) = -6 - (-6) = 0$, ce système n'admet pas de solution unique.