# UCBL – L1 PCSI – UE TMB

# Techniques Mathématiques de Base

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/TMB/

## Programme du cours



**Partie I : Algèbre linéaire et géométrie cartesienne**

**Ch. 1 –** Nombres complexes, factorisation de polynômes
**Ch. 2 –** Espaces vectoriels et vecteurs
**Ch. 3 –** Transformations linéaires et matrices
**Ch. 4 –** Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace

**Partie II : Fonctions d'une variable réelle**

**Ch. 5 –** Fonctions, graphes, réciproques
**Ch. 6 –** Dérivées, extrema locaux, approximation de Taylor
**Ch. 7 –** Primitives et intégrales
**Ch. 8 –** Équations différentielles

# Chapitre 4
# Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace



Dans ce chapitre:

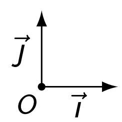
1. Coordonnées cartésiennes du plan. Vecteurs. Droites, coniques (cercle, ellipse, parabole, hyperbole).

2. Coordonnées cartésiennes de l'espace. Vecteurs. Plans, droites, quadriques (sphère, cylindre, cône, paraboloïde, hyperboloïdes).

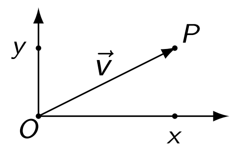
# 1. Géométrie cartésienne dans le plan
## Rappel sur les coordonnées cartesiennes

TMB
A. Frabetti
4 Géométrie
Dans le plan:
calcul vectoriel
droites
distance, aire
coniques
Dans l'espace:
calcul vectoriel
plans
droites
distance, volume
quadriques

On fixe un **repère cartesien** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, où $O$ est un point et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une **base orthonormale directe (o.n.d.)** de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\text{plan})$, i.e. telle que $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$. On a alors:




- Tout **vecteur** $\vec{v}$ **appliqué en** $O$ s'écrit comme $\boxed{\vec{v} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}}$: les scalaires $x, y \in \mathbb{R}$ s'appellent **coordonnées cartesiennes** de $\vec{v}$ et représentent les **projections orthogonales** de $\vec{v}$ dans les direction $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. On note: $\boxed{\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}$.



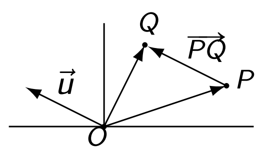

- On appelle **coordonnées cartesiennes** d'un **point** $P$ le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de coordonnées du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, et on écrit $\boxed{P(x, y)}$.

- Pour résumer: $\boxed{\text{plan} + \text{repère cartesien} \equiv \mathrm{Vect}(\text{plan}) \cong \mathbb{R}^2}$.

- Tout **vecteur affine** $\overrightarrow{PQ}$ s'écrit comme

$$\boxed{\overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = P + \vec{u}}$$

où $\boxed{\vec{u} = (x_Q - x_P)\,\vec{\imath} + (y_Q - y_P)\,\vec{\jmath}}$.



# Calcul vectoriel en coordonnées cartesiennes



Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors:

- **addition**: $\boxed{\vec{v} + \vec{v}' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
- **produit par scalaire**: $\boxed{t\vec{v} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}}$ ex. $3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- **produit scalaire**: $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy'}$ ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 - 6 = -4$
- **longueur**: $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$ ex. $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$
- **vecteurs orthogonaux**: $\boxed{\vec{v} \perp \vec{v}' \ \Leftrightarrow\ xx' + yy' = 0}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **vecteurs parallèles**: $\boxed{\vec{v} \parallel \vec{v}' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = tx \\ y' = ty \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}}$, ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- **projection orthogonale**: $\boxed{\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{v}') = \frac{x'x + y'y}{x^2 + y^2}\ \vec{v}}$ ex. $\mathrm{Pr}_{\vec{\imath}} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{1^2 + 0^2}\ \vec{\imath}$
  $= 5\,\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$

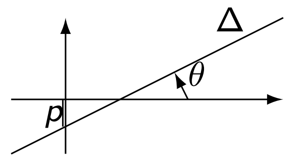
# Droites



**Droite (affine)**: $\boxed{\Delta = \left\{ P(x, y) \mid ax + by + c = 0 \right\}}$ $(a, b) \neq (0, 0)$.

Si $b \neq 0$ alors $\boxed{y = -\frac{a}{b}\, x - \frac{c}{b} = m\, x + p}$

où $\boxed{m = \tan\theta}$




Si $a \neq 0$ alors $\boxed{x = -\frac{b}{a}\, y - \frac{c}{a}}$.

Attention: une droite est un espace vectoriel de dimension 1 si et seulement si elle passe par $O$, i.e. $c = 0$.

- **Vecteur orthogonal** ou **normal** à $\Delta$ $= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- **Vecteur directeur** de $\Delta$ $= \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

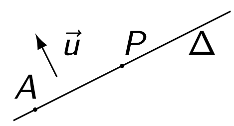
**Exemple:** $x - 5y = 0$ est une droite vectorielle,

avec vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et vecteur directeur $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x + 3 = 5y$ est une droite affine de mêmes vecteurs normal et directeur.

# Droites particulières

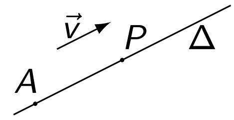
- **Droite passant par** $A = (a_1, a_2)$ **et** $\perp \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$:




condition: $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$

équation: $\boxed{(x - a_1)u_1 + (y - a_2)u_2 = 0}$

- **Droite passant par** $A = (a_1, a_2)$ **et** $\parallel \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$:

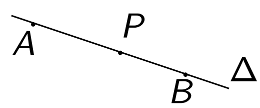



condition: $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}$

éq. paramétrique: $\boxed{\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}}$

éq. cartesienne: $\boxed{\dfrac{x - a_1}{v_1} = \dfrac{y - a_2}{v_2}}$

- **Droite passant par** $A = (a_1, a_2)$ **et** $B = (b_1, b_2)$:



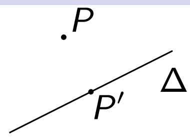

condition: $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$

équation: $\boxed{\dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \dfrac{y - a_2}{b_2 - a_2}}$



# Distance et aire d'un parallélogramme

**Distance**:



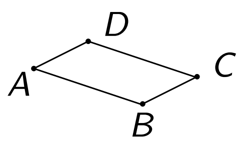

- **d'un point** $P(x, y)$ **à un point** $P'(x', y')$:

$$\boxed{\mathrm{dist}(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \|\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}$$

- **d'un point** $P(x, y)$ **à une droite** $\Delta$ **d'éq.** $ax + by + c = 0$: on appelle $P'$ la projection orthogonale de $P$ sur la droite $\Delta$, alors

$$\boxed{\mathrm{dist}(P, \Delta) = \mathrm{dist}(P, P') = \frac{|\ ax + by + c\ |}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

**Aire du parallelogramme de sommets**
$A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, $D(x_D, y_D)$**:**




$$\mathrm{Aire} = |\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}^{\perp}| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|.$$

Puisque $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{AD}^{\perp} = \begin{pmatrix} y_D - y_A \\ -(x_D - x_A) \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{\mathrm{Aire} = |\ (x_B - x_A)(y_D - y_A) - (y_B - y_A)(x_D - x_A)|}$$

# Coniques: cercle, ellipse

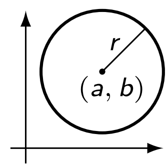


**Conique** (intersection d'un cône de l'espace avec un plan):

$$\boxed{\mathcal{C} = \left\{(x,y) \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\right\}} \qquad (a,b,c) \neq (0,0,0).$$

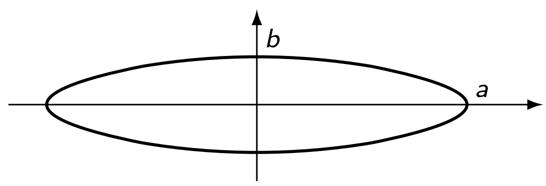
- **Cercle**: $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$

  centre $(a,b)$, rayon $r$




- **Ellipse**: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

  centre $(0,0)$, axes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

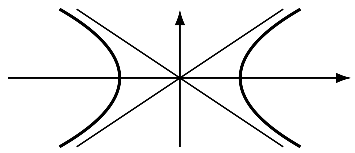



# Coniques: hyperbole, parabole

TMB
A. Frabetti
4 Géométrie
Dans le plan:
calcul vectoriel
droites
distance, aire
coniques
Dans l'espace:
calcul vectoriel
plans
droites
distance, volume
quadriques

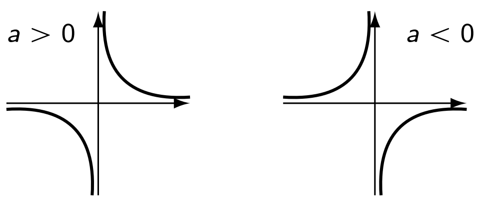
- **Hyperbole**: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

  centre $(0,0)$, axes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$,
  asymptotes $y = \pm\dfrac{b}{a}x$



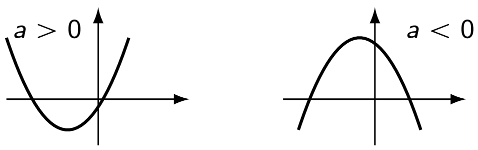
  ou bien: $\boxed{y = \dfrac{a}{x}}$

  centre $(0,0)$, asymptotes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$



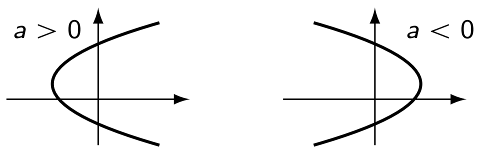

- **Parabole**: $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$

  axe parallèle à $\vec{\jmath}$




  ou bien: $\boxed{x = ay^2 + by + c}$

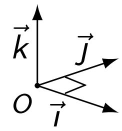
  axe parallèle à $\vec{\imath}$

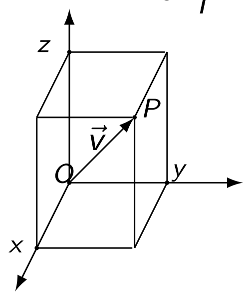


# 2. Géométrie cartésienne dans l'espace
# Rappel sur les coordonnées cartesiennes

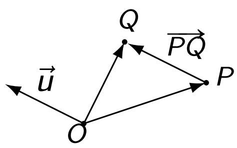


On fixe un **repère cartesien** $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, où $O$ est un point et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une **base orthonormale directe (o.n.d.)** de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\text{espace})$. On a alors:




- Tout **vecteur** $\vec{v}$ **appliqué en** $O$ s'écrit comme $\boxed{\vec{v} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}}$: les scalaires $x, y, z \in \mathbb{R}$ s'appellent **coordonnées cartesiennes** de $\vec{v}$ et représentent les **projections orthogonales** de $\vec{v}$ dans les direction $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$. On note: $\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$.
- On appelle **coordonnées cartesiennes** d'un **point** $P$ le triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, et on écrit $\boxed{P(x, y, z)}$.
- Pour résumer: $\boxed{\text{espace} + \text{repère cartesien} \equiv \mathrm{Vect}(\text{espace}) \cong \mathbb{R}^3}$.
- Un **vecteur affine** est $\boxed{\overrightarrow{PQ} = P + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = P + \vec{u}}$
  où $\boxed{\vec{u} = (x_Q - x_P)\,\vec{\imath} + (y_Q - y_P)\,\vec{\jmath} + (z_Q - z_P)\,\vec{k}}$.




# Calcul vectoriel en coordonnées cartesiennes



Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{v}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

- **addition**: $\boxed{\vec{v} + \vec{v}' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}}$ ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
- **produit par scalaire**: $\boxed{t\vec{v} = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}}$ ex. $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
- **produit scalaire**: $\boxed{\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy' + zz'}$

  ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 6 + 4 = 8$
- **longueur**: $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ex. $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$

# Calcul vectoriel (suite)



- **produit vectoriel**: $\boxed{\vec{v} \wedge \vec{v}' = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ -xz' + zx' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}}$

  ex. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-8 \\ -(2+4) \\ 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

- **produit mixte**:

  $\boxed{[\vec{v}, \vec{v}', \vec{v}'''] = x(y'z'' - z'y'') - y(x'z'' - z'x'') + z(x'y'' - y'x'')}$

  ex. $\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = (2-3) - 2(-3-1) + 3(2-2) = -1 + 8 = 7$

# Calcul vectoriel (suite)

TMB

A. Frabetti

4 Géométrie
Dans le plan:
calcul vectoriel
droites
distance, aire
coniques
Dans l'espace:
calcul vectoriel
plans
droites
distance, volume
quadriques

- **vecteurs orthogonaux**: $\boxed{\vec{v} \perp \vec{v}' \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' + zz' = 0}$

  ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

- **vecteurs parallèles**:

  $$\boxed{\vec{v} \parallel \vec{v}' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}' = t\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = tx \\ y' = ty \\ z' = tz \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}}$$

  alternative:

  $$\boxed{\vec{v} \parallel \vec{v}' \;\Leftrightarrow\; \vec{v} \wedge \vec{v}' = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} xy' = yx' \\ yz' = zy' \\ xz' = zx' \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}}$$

  ex. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$

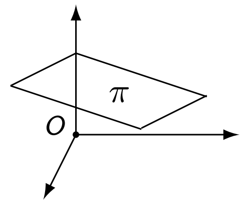
- **projection orthogonale**: $\boxed{\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(\vec{v}') = \frac{x'x + y'y + z'z}{x^2 + y^2 + z^2}\, \vec{v}}$

  ex. $\mathrm{Pr}_{5\vec{\jmath}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1 \times 0 + 2 \times 5 + 3 \times 0}{0^2 + 5^2 + 0^2}\, 5\,\vec{\jmath} = 2\,\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

# Plans

**Plan (affine)**:

$$\boxed{\pi = \Big\{P(x,y,z) \mid ax+by+cz+d=0\Big\}}$$




$$(a,b,c) \neq (0,0,0)$$

Attention: un plan est un espace vectoriel de dimension 2 si et seulement si il passe par $O$, i.e. $d=0$.

- **Vecteur orthogonal** ou **normal** à $\pi \quad = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

**Exemple:**

$x-5y-2z=0$ est un plan vectoriel, de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$x+3=5y+2z$ est un plan affine de vecteur normal $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.



# Plans particuliers

- **Plan passant par** $A=(a_1,a_2,a_3)$ **et** $\perp$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$:

condition: $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}=0$

équation: $\boxed{u_1(x-a_1)+u_2(y-a_2)+u_3(z-a_3)=0}$

- **Plan passant par** $A=(a_1,a_2,a_3)$ **et** $\parallel$ **à** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ **et** $\vec{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$:

condition: $[\overrightarrow{AP},\vec{v},\vec{v}']=0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP}=t\vec{v}+t'\vec{v}'$

équation paramétrique: $\boxed{\begin{cases} x-a_1 = tv_1+t'v_1' \\ y-a_2 = tv_2+t'v_2' \\ z-a_3 = tv_3+t'v_3' \end{cases}}$

équation cartesienne:

$$\boxed{(x-a_1)(v_2v_3'-v_3v_2')-(y-a_2)(v_1v_3'-v_3v_1')+(z-a_3)(v_1v_2'-v_2v_1')=0}$$

- **Plan passant par** $A=(a_1,a_2,a_3)$**,** $B=(b_1,b_2,b_3)$ **et** $C=(c_1,c_2,c_3)$:

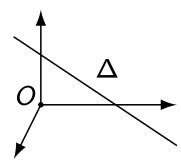
condition: $[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=0$

équations: comme le cas précédent.

# Droites



**Droite (affine)**: $\Delta = \pi \cap \pi'$




$$\boxed{\Delta = \left\{ P(x,y,z) \;\middle|\; \begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array} \right\}}$$

avec $(0,0,0) \neq (a,b,c) \not\parallel (a',b',c') \neq (0,0,0)$.

Attention: une droite est un espace vectoriel de dimension 1 si et seulement si elle passe par $O$, i.e. $d=0$ et $d'=0$.

**Exemple:**

La droite d'équations $\left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array} \right.$ est l'axe $Oz$ (vectoriel).

La droite d'équations $\left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=5 \end{array} \right.$ est parallèle à l'axe $Oz$ (affine).

# Droites particulières



- **Droite passant par** $A=(a_1,a_2,a_3)$ **et** $\parallel$ **à** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$:

condition: $\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = t\vec{v}$

équation paramétrique: $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} x-a_1 = tv_1 \\ y-a_2 = tv_2 \\ z-a_3 = tv_3 \end{array} \right.}$

équation cartesienne: $\boxed{\dfrac{x-a_1}{v_1} = \dfrac{y-a_2}{v_2} = \dfrac{z-a_3}{v_3}}$

- **Droite passant par** $A=(a_1,a_2,a_3)$ **et** $B=(b_1,b_2,b_3)$:

condition: $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$

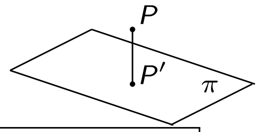
équation: comme le cas précédent.

# Distance et volume



**Distance**:

- **d'un point** $P(x,y,z)$ **à un point** $P'(x',y',z')$:

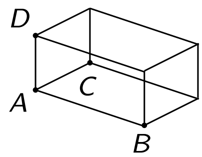



$$\boxed{\mathrm{dist}(P,P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}.$$

- **d'un point** $P(x,y,z)$ **à un plan** $\pi$ **d'éq.** $ax+by+cz+d=0$: on appelle $P'$ la projection orthogonale de $P$ sur le plan $\pi$, alors

$$\boxed{\mathrm{dist}(P,\pi) = \mathrm{dist}(P,P') = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}.$$

**Volume du parallelepipède de sommets** $A$**,** $B$**,** $C$**,** $D$**, etc**:




$$\boxed{\mathrm{Vol} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}.$$

Si $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$, alors

$$\boxed{\mathrm{Vol} = |x(y'z''-z'y'') - y(x'z''-z'x'') + z(x'y''-y'x'')|}.$$

# Quadriques



**Quadrique:** $\boxed{\mathcal{Q} = \left\{(x,y,z) \mid f(x,y,z)=0\right\}}$,

où $f(x,y,z)$ est un polynôme de degré 2.

Les quadriques plus connues:

- **Cylindre**: $\boxed{x^2+y^2=r^2}$
- **Cône**: $\boxed{x^2+y^2=z^2}$
- **Sphère**: $\boxed{x^2+y^2+z^2=r^2}$
- **Ellipsoïde**: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$
- **Hyperboloïde à une nappe**: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$
- **Hyperboloïde à deux nappes**: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$
- **Paraboloïde**: $\boxed{z=xy}$

  ou bien: $\boxed{z=x^2+y^2}$