UCBL – L1 PCSI – UE TMB

Techniques Mathématiques de Base

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

http://math.univ-lyon1.fr/∼frabetti/TMB/

Programme du cours

Partie I : Algèbre linéaire et géométrie cartesienne

Ch. 1 – Nombres complexes, factorisation de polynômes
Ch. 2 – Espaces vectoriels et vecteurs
Ch. 3 – Transformations linéaires et matrices
Ch. 4 – Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace

Partie II : Fonctions d'une variable réelle

Ch. 5 – Fonctions, graphes, réciproques
Ch. 6 – Dérivées, extrema locaux, approximation de Taylor
Ch. 7 – Primitives et intégrales
Ch. 8 – Équations différentielles

Chapitre 5
Fonctions d'une variable réelle

Dans ce chapitre:

1. Fonctions usuelles.
2. Graphes des fonctions.
3. Fonctions croissantes, decroissantes, monotônes. Fonctions paires et impaires.
4. Opérations entre fonctions: addition, multiplication, composition.
5. Fonctions réciproques.

1. Fonctions réelles

TMB
A. Frabetti
5 Fonctions
Fonctions usuelles
Graphes
Croissance
Opérations
Réciproques

Définition: Une **fonction (réelle)** est une "loi" qui associe à tout $x \in \mathbb{R}$ <u>au maximum une valeur</u> $y \in \mathbb{R}$, qu'on note $y(x)$ car elle dépend de x. Une fonction est aussi notée

$$\boxed{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \mapsto y = f(x)}$$

- Le **domaine (de définition)** d'une fonction f est l'ensemble

$$\boxed{D_f = \Big\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}, \text{ i.e. la valeur } f(x) \text{ est bien définie}\Big\}}$$

- L'**image** d'une fonction f est l'ensemble

$$\boxed{I_f = \Big\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ pour un } x \in D_f\Big\}}$$

<u>Attention</u>: une loi qui associe à $x \in \mathbb{R}$ <u>deux</u> valeurs distinctes $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ (ou plus) n'est pas une fonction.

Exemples:

- La loi $f(x) = x^2$ est une fonction de domaine $D_f = \mathbb{R}$ et image $I_f = \mathbb{R}^+$.
- La loi $f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction de domaine $D_f = \mathbb{R}^+$ et image $I_f = \mathbb{R}^+$.
- La loi $f(x) = \pm\sqrt{x}$ n'est pas une fonction, ex. $f(4) = +2$ ou bien -2.

Polynômes, fractions, racines

Définition: On appelle "usuelles" les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes:

- **fonctions polynomiales**, abrégé en "polynômes":

$$\boxed{f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n} \quad a_i \in \mathbb{R}, \text{ avec } \boxed{D_f = \mathbb{R}}.$$

- **fractions rationnelles**, abrégé en "fractions": ce sont les quotients de polynômes $a(x)$ et $b(x)$

$$\boxed{f(x) = \tfrac{a(x)}{b(x)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{D_f = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid b(x) \neq 0 \Big\}}.$$

- **fonctions radicales**, abrégé en "racines": ce sont les racines k-ièmes de polynômes $a(x)$, pour $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{f(x) = \sqrt[k]{a(x)}} \quad \text{défini par} \quad f(x)^k = a(x)$$

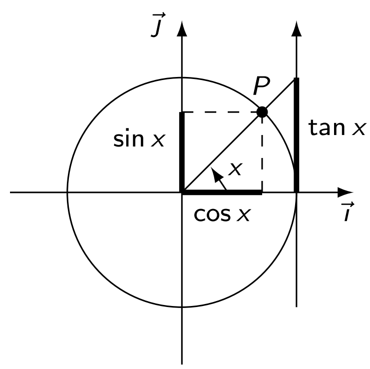
avec domaine $\boxed{D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left\langle \begin{array}{ll} a(x) \in \mathbb{R} & \text{si } k \text{ est impair} \\ a(x) \in \mathbb{R}^+ & \text{si } k \text{ est pair} \end{array} \right. \right\}}$.

Fonctions circulaires

- **cosinus** $\boxed{f(x) = \cos x}$ avec $\boxed{D_{\cos} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\cos} = [-1, 1]}$

- **sinus** $\boxed{f(x) = \sin x}$ avec $\boxed{D_{\sin} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\sin} = [-1, 1]}$

où $(\cos x, \sin x)$ sont les coordonnées du point P qui se trouve sur le cercle unitaire à angle x mesuré dans le sens antihoraire depuis l'axe de direction $\vec{\imath}$.



Puisque le cercle a équation $X^2 + Y^2 = 1$, si on pose $X = \cos x$ et $Y = \sin x$ on a

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

- **tangente** $\boxed{f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$ avec

$$\boxed{D_{\tan} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \}} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{\tan} = \mathbb{R}}$$

Fonctions arc

- **arccosinus** $\boxed{f(x) = \arccos x}$

  $\arccos x$ est l'angle compri entre 0 et π qui a x comme cosinus, c.-à-d. $\arccos x = \theta \;\Leftrightarrow\; x = \cos\theta$ et $\theta \in [0, \pi]$, alors

  $$\boxed{D_{\arccos} = [-1, 1]} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{\arccos} = [0, \pi]}$$

- **arcsinus** $\boxed{f(x) = \arcsin x}$

  $\arcsin x$ est l'angle compri entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ qui a x comme sinus, c.-à-d. $\arcsin x = \theta \;\Leftrightarrow\; x = \sin\theta$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors

  $$\boxed{D_{\arcsin} = [-1, 1]} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{\arcsin} = [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]}$$

- **arctangente** $\boxed{f(x) = \arctan x}$

  $\arctan x$ est l'angle compri entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ qui a x comme tangente, c.-à-d. $\arctan x = \theta \;\Leftrightarrow\; x = \tan\theta$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors

  $$\boxed{D_{\arctan} = \mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{I_{\arctan} =]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[}$$

Exponentiel

- La **fonction exponentielle**, abrégé en "exponentiel", de base le **nombre de Néper** (de Euler et Napier, XVII s.)

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \simeq 2,7182$$

est la fonction $\boxed{f(x) = e^x = \exp x}$ qui peut être définie de plusieurs façons (voir les prochains chapitres pour comprendre):

i) c'est la seule fonction continue qui trasforme une somme en produit, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, et qui vaut e en $x = 1$;

ii) c'est la seule solution de l'équation différentielle $f'(x) = f(x)$ qui vaut 1 en $x = 0$;

iii) comme somme de série $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

On a $\boxed{D_{\exp} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\exp} =]0, \infty[}$.

TMB
A. Frabetti
5 Fonctions
Fonctions usuelles
Graphes
Croissance
Opérations
Réciproques

Logarithme

- La **fonction logarithme naturel**, abrégé en "logarithme", est la fonction $\boxed{f(x) = \ln x}$ qui donne l'exposant à l'exponentiel pour obtenir x, c'est-à-dire telle que $\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$.

  Elle peut également être définie des façons suivantes (voir les prochains chapitres pour comprendre):

i) c'est la seule fonction continue qui <u>trasforme un produit en somme</u>, $\ln(x\,y) = \ln(x) + \ln(y)$, et <u>qui vaut 1 en $x = e$</u>;

ii) c'est la seule <u>primitive</u> de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui vaut 0 en $x = 1$.

On a $\boxed{D_{\ln} =]0, \infty[}$ et $\boxed{I_{\ln} = \mathbb{R}}$.

Fonctions hyperboliques

- **cosinus hyperbolique** $\boxed{f(x) = \operatorname{ch} x = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$ avec

  $\boxed{D_{\operatorname{ch}} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\operatorname{ch}} = [1, \infty[}$

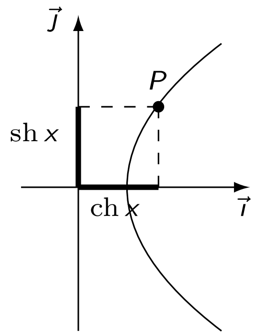
- **sinus hyperbolique** $\boxed{f(x) = \operatorname{sh} x = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}$ avec

  $\boxed{D_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}}$

  On a

  $\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

  donc $(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x)$ sont les coordonnées des points P qui se trouvent sur la branche droite de l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$



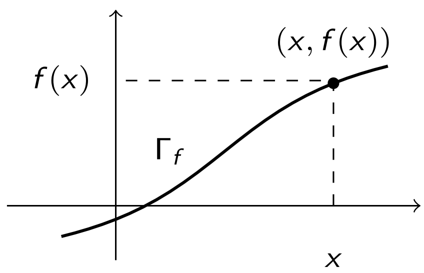
- **tangente hyperbolique**

  $\boxed{f(x) = \operatorname{th} x = \tanh x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}$ avec $\boxed{D_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}}$ et $\boxed{I_{\tan} =]-1, 1[}$

2. Graphe de fonctions

Définition: Le **graphe** d'une fonction f est l'ensemble des points du plan

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f,\ y = f(x) \Big\} \\ &= \Big\{ \big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f \Big\} \subset \mathbb{R}^2\end{aligned}$$



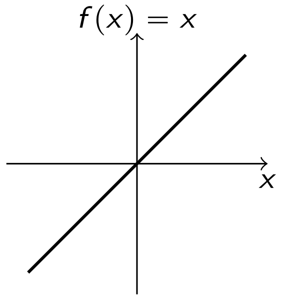
En regardant le graphe d'une fonction on peut déduire quel est son domaine, son image et ses proprietés importantes.

Le graphe des fonctions usuelles est à connaître par cœur.

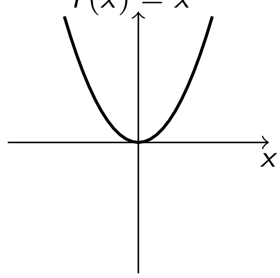
Graphes à connaître !

TMB
A. Frabetti
5 Fonctions
Fonctions usuelles
Graphes
Croissance
Opérations
Réciproques

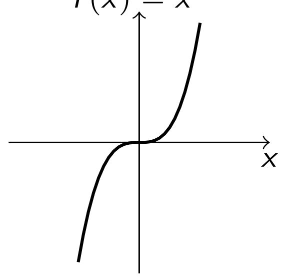
$f(x) = x$



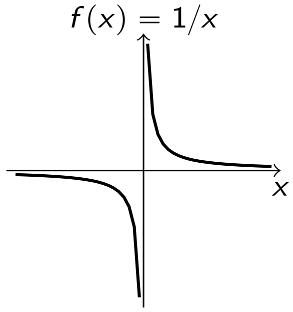
$f(x) = x^2$



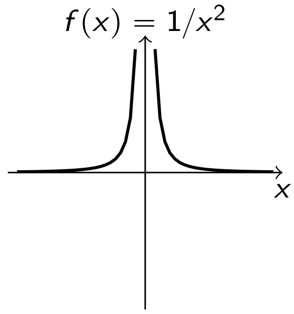
$f(x) = x^3$



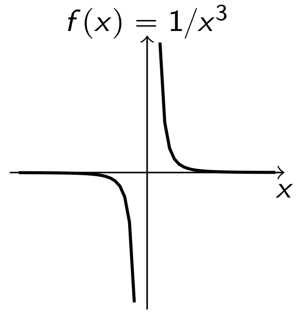
$f(x) = 1/x$



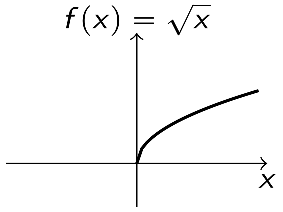
$f(x) = 1/x^2$



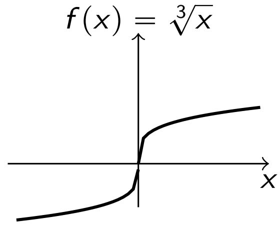
$f(x) = 1/x^3$



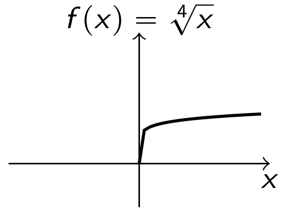
$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

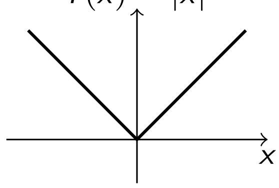


$f(x) = \sqrt[4]{x}$

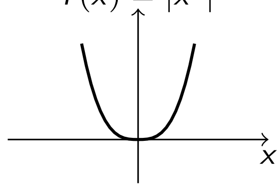


D’autres graphes à connaître !

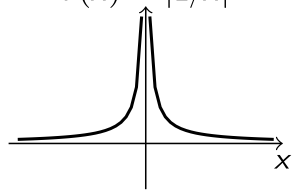
$f(x) = |x|$



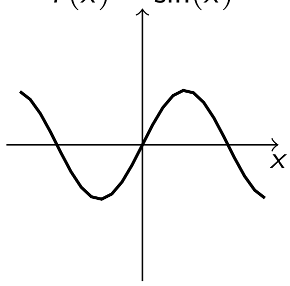
$f(x) = |x^3|$



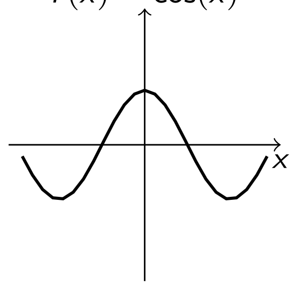
$f(x) = |1/x|$



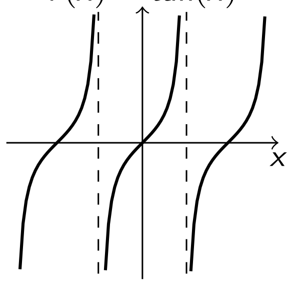
$f(x) = \sin(x)$



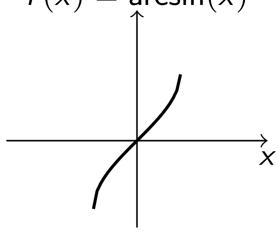
$f(x) = \cos(x)$



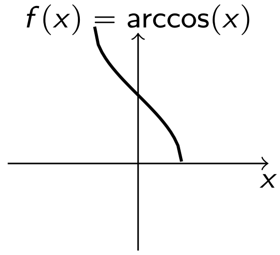
$f(x) = \tan(x)$



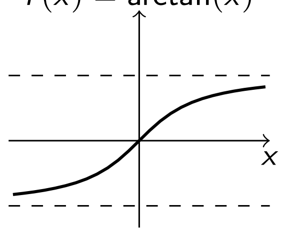
$f(x) = \arcsin(x)$



$f(x) = \arccos(x)$



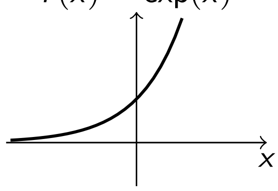
$f(x) = \arctan(x)$



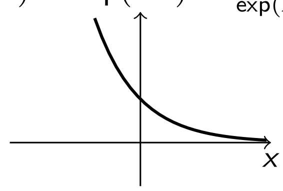
D’autres encore... ouf !

TMB
A. Frabetti
5 Fonctions
Fonctions usuelles
Graphes
Croissance
Opérations
Réciproques

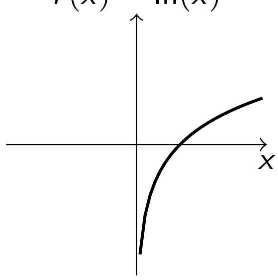
$f(x) = \exp(x)$



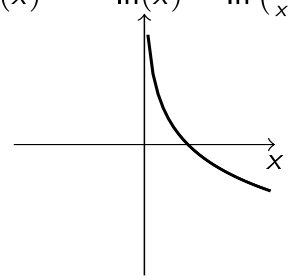
$f(x) = \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$



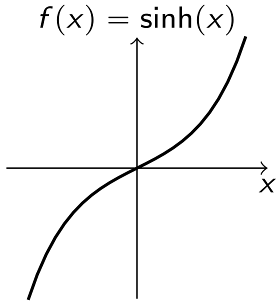
$f(x) = \ln(x)$



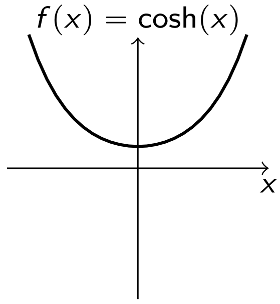
$f(x) = -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$



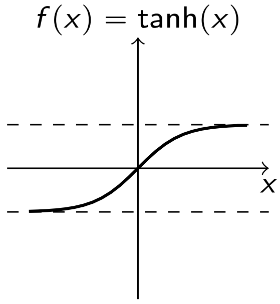
$f(x) = \sinh(x)$



$f(x) = \cosh(x)$



$f(x) = \tanh(x)$

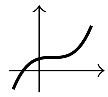


3. Fonctions croissantes, decroissantes, monotones

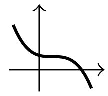
La première proprieté qu'on voit sur le graphe est la croissance.

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $D \subset D_f$. On dit que:

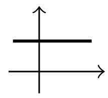
- f est **(strictement) croissante sur** D si $\boxed{f(x) < f(y)}$ pour tout $x, y \in D$ tels que $x < y$.



- f est **(strictement) décroissante sur** D si $\boxed{f(x) > f(y)}$ pour tout $x, y \in D$ tels que $x < y$.



- f est **constante sur** D si $\boxed{f(x) = f(y)}$ pour tout $x, y \in D$.



Si on n'indique pas l'ensemble D, on sous-entend qu'on parle de tout le domaine de définition D_f.

- f est **(strictement) monotône** si elle est partout croissante ou partout décroissante sur D_f.

L'appellatif "strictement" peut être remplacé par "largement" si on considère des inégalités larges $\leqslant$ et $\geqslant$.
S'il est sous-entendu on considère les inégalités strictes $<$ et $>$.

TMB
A. Frabetti
5 Fonctions
Fonctions usuelles
Graphes
Croissance
Opérations
Réciproques

Exemple de fonctions monotônes

Exemples:

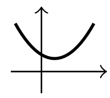
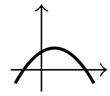
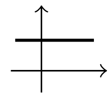
- Les polynômes x^n sont monotônes croissants seulement si n est impair.

  Si n est pair, ils sont décroissants pour $x < 0$ et croissants pour $x > 0$.
- Les fractions $\frac{1}{x^n}$ sont monotônes décroissantes seulement si n est impair.
  Si n est pair, elles sont croissantes pour $x < 0$ et décroissantes pour $x > 0$.
- Les racines $\sqrt[k]{x}$ sont monotônes croissantes.
- Les fonctions circulaires $\sin x$ et $\cos x$ ne sont pas monotônes (elles sont **oscillantes**). La tangente $\tan x$ est monotône croissante.
- Les fonctions $\arcsin x$ et $\arctan x$ sont monotônes croissantes, alors que $\arccos x$ est monotône décroissante.
- L'exponentiel e^x et le logarithme $\ln x$ sont monotônes croissants.
- Les fonctions hyperboliques $\sinh x$ et $\tanh x$ sont monotônes croissantes, alors que $\cosh x$ est décroissant pour $x < 0$ et croissant pour $x > 0$.

Fonctions convexes et concaves

La deuxième proprieté qu'on voit sur le graphe est la convexité.

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $D \subset D_f$. On dit que:

- f est **convexe sur** D si elle a la forme 
- f est **concave sur** D si elle a la forme 
- f est **plate sur** D si elle est constante 

Si on n'indique pas l'ensemble D, on sous-entend qu'on parle de tout le domaine de définition D_f.

Exemples:

- Les polynômes x^n et les fractions $\frac{1}{x^n}$ sont convexes si n est pair.

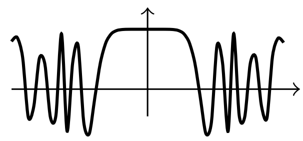
  Si n est impair, ils sont concaves pour $x < 0$ et convexes pour $x > 0$.
- Les racines $\sqrt[k]{x}$ sont concaves.
- L'exponentiel e^x est convexe. Le logarithme $\ln x$ est concave.

Fonctions paires, impaires et périodiques

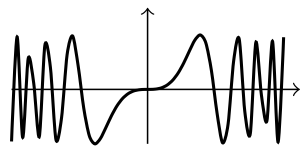
La troisième proprieté qu'on voit sur le graphe est la symétrie.

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que:

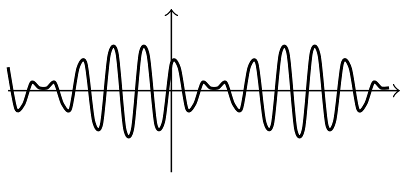
- f est **paire** si $\boxed{f(-x) = f(x)}$ pour tout $x \in D_f$ (symétrie axiale).



- f est **impaire** si $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ pour tout $x \in D_f$ (symétrie centrale).



- f est **périodique** de **période** p si $\boxed{f(x+p) = f(x)}$ pour tout $x \in D_f$ (symétrie par translation).



Exemples:

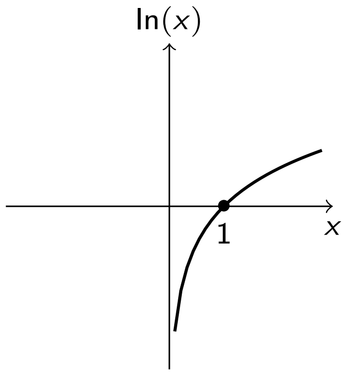
- Les polynômes x^n et les fractions $\frac{1}{x^n}$ sont des fonctions paires si n est pair, et des fonctions impaires si n est impair.
- Les fonctions $\sin x$ et $\tan x$ sont impaires, $\cos x$ est paire. Toutes les trois sont périodiques: $\sin x$ et $\cos x$ de période 2π, $\tan x$ de période π.

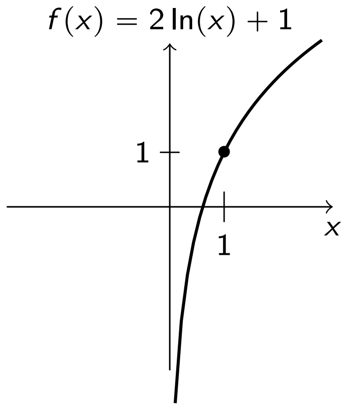
Exercice

Exercice: *Pour les fonctions suivantes, dessiner le graphe, préciser le domaine de définition et si elles sont monotônes (croissantes ou decroissantes), paires ou impaires et périodiques.*

- $f(x) = 2\ln x + 1$

Réponse: Le graphe de $f(x) = 2\ln x + 1$ se trouve en dilatant par 2 le graphe de $x \mapsto \ln x$ et en décalant tout de $+1$:





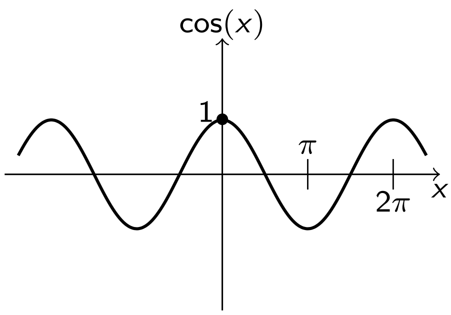
Le domaine de f est $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0, \infty[$.

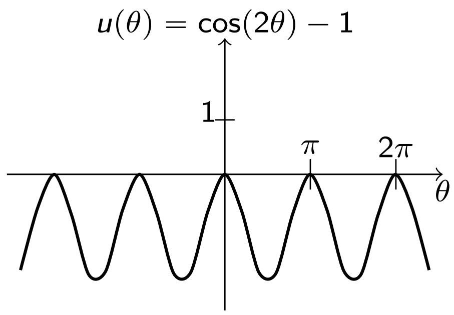
La fonction f est monotône croissante, ni paire ni impaire.

Exercice (suite)

- $u(\theta) = \cos(2\theta) - 1$

Réponse: Le graphe de $u(\theta) = \cos(2\theta) - 1$ se trouve en décalant de -1 le graphe de la fonction $f(x) = \cos x$ où $x = 2\theta$:





Le domaine de u est $\quad D_u = \{\theta \in \mathbb{R} \mid 2\theta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

La fonction u n'est pas monotône, et elle est paire.

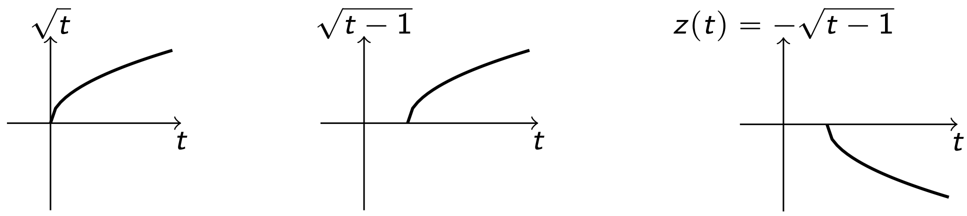
Elle est clairement périodique de période π:

$$\begin{aligned} u(\theta + \pi) &= \cos\big(2(\theta + \pi)\big) - 1 = \cos(2\theta + 2\pi) - 1 \\ &= \cos(2\theta) - 1 = u(\theta). \end{aligned}$$

Exercice (suite)

- $z(t) = -\sqrt{t-1}$

Réponse: Le graphe de $z(t) = -\sqrt{t-1}$ se trouve par étapes: on dessine la fonction $\sqrt{t}$, on décale la variable independante de t à $t-1$ en bougéant l'axe vertical de -1 en horizontal, enfin on prend son opposé $-\sqrt{t-1}$.



Le domaine de la fonction z est $\quad D_z = \{t \in \mathbb{R} \mid t-1 \geqslant 0\} = [1, \infty[$.

La fonction z est monotône décroissante, elle n'est ni paire ni impaire.

4. Opérations entre fonctions

Définition: Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et $t \in \mathbb{R}$.

- **addition**: $\boxed{(f+g)(x) = f(x) + g(x)}$ avec domaine

  $D_{f+g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ et } x \in D_g\} = D_f \cap D_g$

  zéro: $\boxed{0(x) = 0}$ avec $D_0 = \mathbb{R}$

  opposée: $\boxed{(-f)(x) = -f(x)}$ avec $D_{-f} = D_f$

- **produit par scalaire**: $\boxed{(t\,f)(x) = t\,f(x)}$ avec $D_{t\,f} = D_f$

- **multiplication**: $\boxed{(f\,g)(x) = f(x)g(x)}$ avec $D_{f\,g} = D_f \cap D_g$

  unité: $\boxed{1(x) = 1}$ avec $D_1 = \mathbb{R}$

  inverse: $\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}}$ avec $D_{1/f} = \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}$

Exemples:

$h(x) = x^2 + \sin x$ est la somme de $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sin x$

$k(x) = 10(x^2 + \sin x)$ est le produit de $h(x)$ par le scalaire 10

$H(x) = \frac{x^2}{\sin x}$ est le produit de $f(x)$ par l'inverse de $g(x)$

Proprietés des opérations

Proposition:

- Les opérations entre fonctions ont les mêmes proprietés de leurs analogues entre nombres réels (associative, commutative, distributive).
- En particulier, l'ensemble des fonctions est un espace vectoriel (de dimension infinie) avec l'addition et le produit par scalaire.

Exemple: Si $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \cos x$ et $t = 10$, l'égalité

$$x^2(10 \sin x + \cos x) = x^2 \cos x + 10\, x^2 \sin x \qquad \text{(pour tout } x\text{)}$$

s'exprime en terme de fonctions comme

$$f\,(t\,g + h) = f\,h + t\,f\,g$$

et repose sur la proprieté commutative de l'addition et du produit par scalaire et sur la proprieté distributive de la multiplication par rapport à l'addition.

Nota: Un espace vectoriel qui a en plus une multiplication s'appelle **algèbre**.

Composition de fonctions

La composition de fonctions est une opération qui n'a pas d'analogue dans les nombres réels.

Définition: La **composée** de deux fonctions $x \mapsto f(x)$ et $y \mapsto g(y)$ est la fonction $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)}$$

avec domaine $\boxed{D_{g\circ f} = \big\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\big\}}$.

La composition peut être vue comme l'enchainement des fonctions l'une après l'autre:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)(x)"'] & f(x) \arrow[r] & g\big(f(x)\big) \end{tikzcd}$$

ou également comme la substitution de la variable y, dans $g(y)$, par la valeur $y = f(x)$.

Exemple: Si $f(x) = x^2$ et $g(y) = \sin y$, on pose $y = x^2$ et on a:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y)\Big|_{y=f(x)} = \sin y\Big|_{y=x^2} = \sin(x^2).$$

Proprietés de la composition

Proprietés:

- La composition est associative: $\boxed{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$

  mais elle n'est pas commutative: $\boxed{g \circ f \neq f \circ g}$ en général.

Exemple: Si $f(x) = x^2$, $g(y) = \sin y$ et $h(z) = \ln z$, on a

$$(h \circ g)(y) = \ln(\sin y) \quad \text{donc} \quad ((h \circ g) \circ f)(x) = \ln(\sin(x^2))$$
$$(g \circ f)(x) = \sin(x^2) \quad \text{donc} \quad (h \circ (g \circ f))(x) = \ln(\sin(x^2))$$

et

$$(g \circ f)(x) = \sin(x^2) \quad \text{mais} \quad (f \circ g)(y) = (\sin y)^2.$$

- La fonction **identité** $\boxed{\mathrm{id}(x) = x}$, avec domaine $D_{\mathrm{id}} = \mathbb{R}$, est une unité pour la composition: $\boxed{f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f}$.

Remarque: Pour une fonction f, l'inverse $\frac{1}{f}$ est définie à partir de la multiplication et de l'unité 1 de telle sorte que $\boxed{f \frac{1}{f} = 1}$ et $\boxed{\frac{1}{f} f = 1}$.
L'analogue pour la composition et l'identité est une fonction f^{-1} telle que $\boxed{f^{-1} \circ f = \mathrm{id}}$ et $\boxed{f \circ f^{-1} = \mathrm{id}}$, c'est la réciproque de f.

5. Fonctions réciproques

Définition: La **réciproque** d'une fonction $x \mapsto f(x)$ est la fonction $y \mapsto f^{-1}(y)$ telle que

$$\boxed{f^{-1} \circ f = \mathrm{id}} \quad \text{et} \quad \boxed{f \circ f^{-1} = \mathrm{id}}$$

c'est-à-dire telle que

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{-1}(f(x)) = x \\ \text{pour tout } x \in D_f \end{array}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{array}{l} f(f^{-1}(y)) = y \\ \text{pour tout } y \in I_f \end{array}}$$

ce qui peut être resumé en une seule assertion:

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)}$$

Ceci implique que $\boxed{D_{f^{-1}} = I_f}$ et $\boxed{I_{f^{-1}} = D_f}$.

En conclusion, on peut visualiser la réciproque comme ceci:

$$\begin{tikzcd} D_f = I_{f^{-1}} & & I_f = D_{f^{-1}} \\ x = f^{-1}(y) \arrow[rr, bend left, "f"] & & y = f(x) \arrow[ll, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Exemples de réciproques

Exemples:

- La réciproque de l'exponentiel $f(x) = e^x$ est le logarithme $f^{-1}(y) = \ln y$, car
$$f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad f(f^{-1}(y)) = e^{\ln y} = y,$$
c'est-à-dire $\quad e^x = y \iff x = \ln y$.

- La réciproque de la fonction $g(x) = x^3 + 1$ se trouve en posant $x^3 + 1 = y$ et en calculant $x = g^{-1}(y)$ comme fonction de y:
$$y = x^3 + 1 \iff y - 1 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y-1}$$
donc $g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$.

- La réciproque de la fonction $h(x) = \dfrac{5}{x^3+1}$ se trouve en posant $\dfrac{5}{x^3+1} = y$ et en calculant $x = h^{-1}(y)$ comme fonction de y:
$$y = \frac{5}{x^3+1} \iff x^3 + 1 = \frac{5}{y} \iff x = \sqrt[3]{\frac{5}{y} - 1}$$
donc $h^{-1}(y) = \sqrt[3]{\dfrac{5}{y} - 1}$.

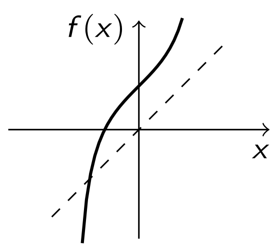
Proprietés des réciproques

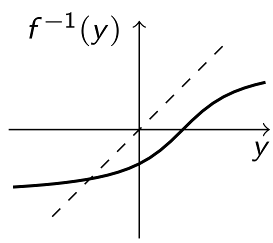
Théorème: La réciproque d'une fonction f <u>existe</u> si et seulement si f est <u>strictement monotône</u>.

Idée: En effet, si f n'est pas strictement monotône, il existe deux points distincts x_1 et x_2 qui donnent la même valeur $y = f(x_1) = f(x_2)$.
Dans ce cas, comment va-t-on définir la réciproque f^{-1} au point y, $f^{-1}(y) = x_1$ ou bien $f^{-1}(y) = x_2$? Ce choix est impossible.

Proprietés:

- Si f est strictement monotône et on note Γ_f son graphe, la réciproque f^{-1} est aussi strictement monotône et son graphe est l'image miroir de Γ_f par rapport à la droite $y = x$.





- La réciproque de la réciproque de f est f: $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$.

Réciproque des fonctions non monotônes

Problème:

- Les polynômes x^n de puissance impaire et l'exponentiel e^x sont monotônes et admettent la réciproque, respectivement les racines $\sqrt[n]{x}$ d'ordre impair et le logarithme $\ln x$:

$$\boxed{x = \sqrt[n]{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x^n = y}$$
$$\boxed{x = \ln y \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = y}$$

- Mais les polynômes x^n de puissance paire et les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ ne sont pas monotônes et n'admettent donc pas de réciproque! Que faire?

Astuce: Si une fonction f n'est pas monotône, on peut restreindre son domaine de définition à un ensemble $D \subset D_f$ tel que

i) f soit monotône sur D,

ii) $f(D) = I_f$.

Cette fonction "à domaine restreint" $\boxed{f : D \subset D_f \to I_f}$ admet bien une réciproque "à image restreinte":

$$\boxed{f^{-1} : I_f \to D \subset D_f}.$$

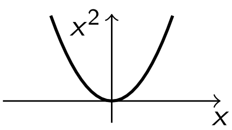
Exemples de réciproques "restreintes"

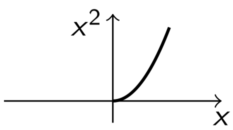
Exemples:

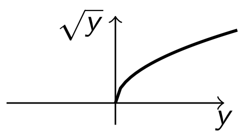
- Les polynômes x^n de puissance paire restreints à l'ensemble $[0, \infty[\subset \mathbb{R}$ ont comme réciproque les racines $\sqrt[n]{x}$ d'ordre pair:

$$\boxed{x = \sqrt[n]{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^n = y \quad \text{et} \quad x \geqslant 0}$$

Ex.:



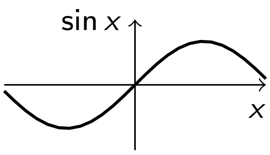


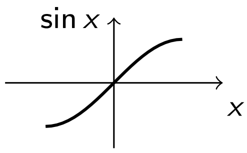


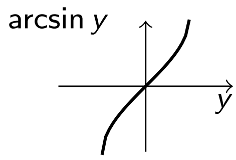
- Les fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$, opportunement restreintes, ont comme réciproque les fonctions arc $\arcsin x$, $\arccos x$ et $\arctan x$:

$$\boxed{x = \arcsin y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sin x = y \quad \text{et} \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]}$$
$$\boxed{x = \arccos y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos x = y \quad \text{et} \quad x \in [0, \pi]}$$
$$\boxed{x = \arctan y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tan x = y \quad \text{et} \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[}$$

Ex.:







Exercice

Exercice: *Calculer la réciproque des fonctions suivantes.*

- $y = 3x^2 - 5$, avec $x \geqslant 0$

Réponse:

$$y = 3x^2 - 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y+5}{3} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{y+5}{3}}$$

- $x = \sqrt{\sin\theta + 3}$, avec $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

Réponse:

$$x = \sqrt{\sin\theta + 3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3 = \sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arcsin(x^2 - 3)$$

- $t = 3\arctan(e^z)$

Réponse:

$$t/3 = \arctan(e^z) \quad \Leftrightarrow \quad \tan(t/3) = e^z \quad \Leftrightarrow \quad z = \ln(\tan(t/3))$$

avec $-\pi/2 < t/3 < \pi/2$ et $\tan(t/3) > 0$, c'est-à-dire $0 < t/3 < \pi/2$, au final: $0 < t < 3\pi/2$.