UCBL – L1 PCSI – UE TMB

Techniques Mathématiques de Base

Alessandra Frabetti

Institut Camille Jordan,
Département de Mathématiques

http://math.univ-lyon1.fr/∼frabetti/TMB/

Programme du cours

Partie I : Algèbre linéaire et géométrie cartesienne

Ch. 1 – Nombres complexes, factorisation de polynômes
Ch. 2 – Espaces vectoriels et vecteurs
Ch. 3 – Transformations linéaires et matrices
Ch. 4 – Géométrie cartésienne dans le plan et dans l'espace

Partie II : Fonctions d'une variable réelle

Ch. 5 – Fonctions, graphes, réciproques
Ch. 6 – Dérivées, extrema locaux, approximation de Taylor
Ch. 7 – Primitives et intégrales
Ch. 8 – Équations différentielles

Chapitre 6
Dérivées

Dans ce chapitre:

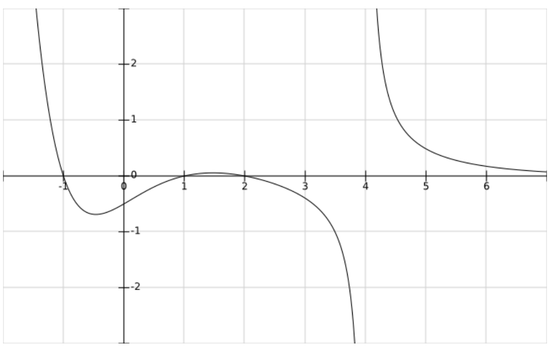
1. Idée des limites et des fonctions continues.
2. Dérivées. Dérivées des fonctions composées.
3. Dérivées d'ordre superieur. Points critiques, extrema locaux et points d'infléxion.
4. Formule de Taylor et approximations.

1. Idée des limites

Définition – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la variable x.
La **limite de f pour x qui tend vers** x_0, notée $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)}$, est la valeur à laquelle <u>tend</u> $f(x)$ quand x s'<u>approche</u> de x_0 (sans le toucher).

Cette limite peut être un nombre réel, ou $\pm\infty$, ou ne pas exister.

Exemple:



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -0.5$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 0$$

$\lim_{x \to 4} f(x)$ n'existe pas

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Remarque: Pour que l'expression $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ait un sens, il suffit que $x_0 \in D_f$, ou bien que x_0 soit un point du **bord** de D_f, par exemple l'un des deux extrèmes a et b si $D_f =]a, b[$ est un intervalle ouvert, ou bien $x_0 = \pm\infty$ si $D_f = \mathbb{R}$.

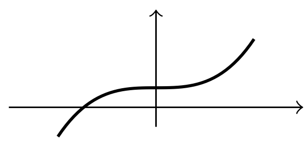
Idée des fonctions continues

Définition – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la variable x.
On dit que

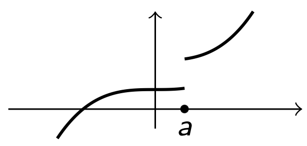
- f **est continue en un point** $a \in D_f$ si

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}.$$

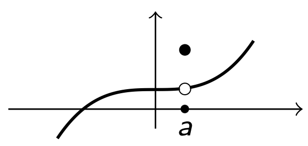
- f **est continue** si elle l'est en tout point $a \in D_f$.



continue



non continue en a
$\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas



non continue en a
$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Proposition:

- Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaine de définition.
- La somme, produit et composée de fonctions continue est continue.

2. Dérivée

Définition – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la variable x.

- On appelle **dérivée de f en** $a \in D_f$ la limite

$$\boxed{\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}},$$

<u>si cette limite existe et c'est un nombre réel</u>. Dans ce cas, on dit que f **est dérivable en** a.

- On dit que f **est dérivable sur** $D \subset D_f$ si elle l'est en tout point $a \in D$. Si $D = D_f$, on le sous-entend.
- Si f est dérivable sur D, la **fonction dérivée** est la fonction

$$\frac{df}{dx} = f' : D \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f'(x).$$

Exemple: Si $f(x) = x^2$, on a $f'(x) = 2x$ car

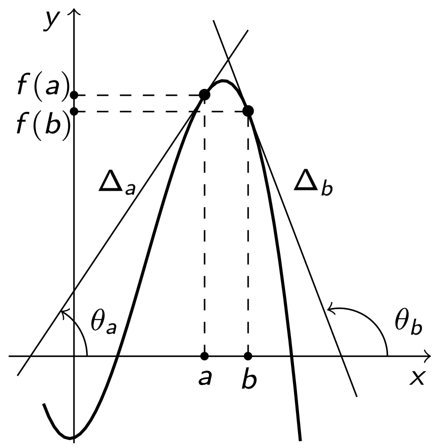
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2x+h)h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Dérivée, droite tangente et croissance

Proposition: Si f est dérivable en a, alors le graphe Γ_f a la droite tangente Δ_a au point $(a, f(a))$, d'équation

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

et on a $\boxed{f'(a) = \tan\theta_a}$, où θ_a est l'angle formé par la droite tangente Δ_a à partir de l'axe Ox.



Par conséquent, la dérivée donne un critère pour établir la croissance d'une fonction dérivable.

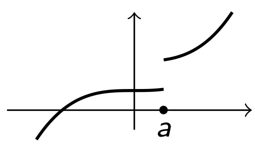
Proposition: Si f est une fonction dérivable en x, on a:

$$\boxed{f \text{ est croissante en } x} \Leftrightarrow 0 < \theta_x < \pi/2 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \tan\theta_x > 0}$$

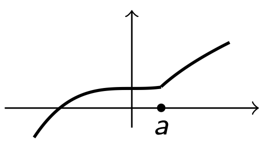
$$\boxed{f \text{ est décroissante en } x} \Leftrightarrow \pi/2 < \theta_x < \pi \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \tan\theta_x < 0}$$

Fonctions dérivables

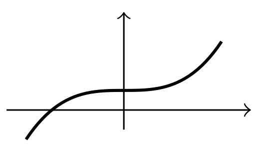
Remarque: Une fonction dérivable est continue, le contraire est faux: il y a des fonctions continues qui ne sont pas dérivables.



non continue en a



continue, non dérivable en a

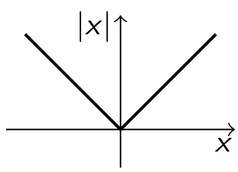

dérivable

Proposition:

- Les fonctions usuelles (ch. 4) sont dérivables, sauf les racines $\sqrt[n]{x}$ d'ordre n pair, en $x = 0$.
- La somme, produit et composée de fonctions dérivables est dérivable.

Exemples:

- $f(x) = 3x^2 + \sin(\sqrt{x^3 - 1}) + \ln(3x^2 + 1)$ est dérivable sur
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 > 0,\ 3x^2 + 1 > 0\} =]1, \infty[.$$
- La valeur absolue
$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$
n'est pas dérivable en 0.



Dérivée des fonctions usuelles (par coeur !)

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\frac{1}{x^n}$	$-n\,\frac{1}{x^{n+1}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Cas particuliers:

$\frac{d}{dx}x^2 = 2x \qquad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$

$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$

$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tanh^2 x$

Dérivée de la somme et du produit de fonctions

TMB
A. Frabetti
6 Dérivées
Continuité
Dérivées
Extrema locaux
Taylor

Proposition: Si f et g sont dérivables en $x \in \mathbb{R}$, et $t \in \mathbb{R}$, on a:

- $\boxed{\frac{d}{dx}\big(f(x)+g(x)\big) = f'(x) + g'(x)}$
- $\boxed{\frac{d}{dx}\big(t\,f(x)\big) = t\,f'(x)}$
- $\boxed{\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)}$ **règle de Leibniz**
- si $f(x) \neq 0$, on a $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}}$
- si $g(x) \neq 0$, on a $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}}$

Exemples:

- $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \qquad f'(z) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{z}}}{z} = -\frac{1}{2z\sqrt{z}}$
- $h(t) = \frac{te^t}{t+1} \qquad h'(t) = \frac{(e^t + te^t)(t+1) - te^t}{(t+1)^2} = \frac{(t^2+t+1)e^t}{(t+1)^2}$

Dérivée des fonctions composées

Proposition: Soit f une fonction dérivable en x, g une fonction dérivable en $y = f(x)$ et $g \circ f$ la composée. Alors:

- **règle de la chaîne**:

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = \tfrac{d}{dx}\big(g(f(x)\big) = g'(y)\Big|_{y=f(x)} f'(x) = g'\big(f(x)\big)\, f'(x)}$$

- si f admet la réciproque f^{-1} et $y = f(x) \neq 0$, alors

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=f^{-1}(y)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}}$$

Exemples:

- $f(z) = (\ln z)^2 \qquad f'(z) = 2\ln z\, \dfrac{1}{z} = \dfrac{2\ln z}{z}$
- $h(t) = \ln(t^2) \qquad h'(t) = \dfrac{1}{t^2}\, 2t = \dfrac{2}{t}$

Exercice

TMB
A. Frabetti
6 Dérivées
Continuité
Dérivées
Extrema locaux
Taylor

Exercice: *Calculer la dérivée des fonctions suivantes.*

- $y(u) = u^3 \sin^3(u^2)$

Réponse:

$$\begin{aligned} y'(u) &= 3u^2 \sin^3(u^2) + u^3\, 3\sin^2(u^2)\cos(u^2)\, 2u \\ &= 3u^2 \sin^3(u^2) + 6u^4 \sin^2(u^2)\cos(u^2) \end{aligned}$$

- $h(x) = \dfrac{1}{\ln x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Réponse:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{(\ln x)^2}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

- $F(t) = t\sqrt{t^3 + 5t}$

Réponse:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sqrt{t^3 + 5t} + t\,\frac{1}{2\sqrt{t^3+5t}}\,(3t^2 + 5) \\ &= \frac{2(t^3 + 5t) + (3t^3 + 5t)}{2\sqrt{t^3+5t}} = \frac{5t^3 + 15t}{2\sqrt{t^3+5t}} \end{aligned}$$

3. Points critiques

Rappel: Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in D_f$ est

- croissante en a si $f'(a) > 0$,
- décroissante en a si $f'(a) < 0$,

car la droite Δ_a tangente au graphe Γ_f au point $(a, f(a))$ a équation cartésienne $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Que se passe-t-il si $f'(a) = 0$?

Définition: Soit f une fonction dérivable en $a \in D_f$. Le point a s'appelle **point critique** de f si $\boxed{f'(a) = 0}$.

Dans ce cas, la tangente Δ_a est la droite horizontale $\boxed{y = f(a)}$.

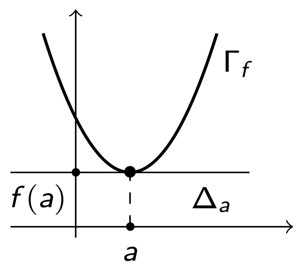
Exemple: Le graphe de la fonction

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$

est une parabole. On a $f'(x) = 2(x-1)$, donc $a = 1$ est un point critique de f.
La droite tangente Δ_a, qui a équation

$$y = 0\,(x-1) + 1 = 1,$$

est bien horizontale.



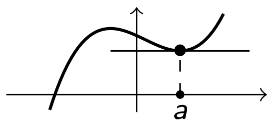
Extrema locaux et points d'inflexion

TMB
A. Frabetti
6 Dérivées
Continuité
Dérivées
Extrema locaux
Taylor

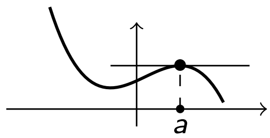
Les points critiques peuvent être de trois types:

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$. On dit que

- f a un **minimum local** en a si $\boxed{f(x) > f(a)}$ pour tout x proche de a (f est convexe autour de a).

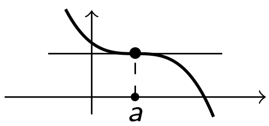


- f a un **maximum local** en a si $\boxed{f(x) < f(a)}$ pour tout x proche de a (f est concave autour de a).

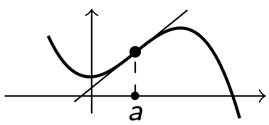


Les minima et maxima locaux s'appellent aussi **extrema locaux**.

- f a un **point d'inflexion** en a si, au point $(a, f(a))$, le graphe Γ_f traverse la droite tangente Δ_a.



Cela peut arriver aussi quand la droite tangente Δ_a n'est pas horizontale.



Pour distinguer ces trois types de points on a besoin des dérivées supérieures.

Dérivées d'ordre supérieur

Définition:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **dérivée d'ordre** n de f la fonction

$$x \mapsto f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots \frac{df}{dx}(x)\right)\right)$$

  que l'on obtient en dérivant f successivement n fois.

- Si la fonction $f^{(n)}$ est bien définie sur $D \subset D_f$, on dit que f **est dérivable** n **fois sur** D. Si cela arrive pour <u>tout $n \in \mathbb{N}$</u>, on dit que f est **lisse** ou **de classe** C^∞.

Exemples:

- La fonction $f(x) = x^3$ est lisse sur $\mathbb{R}$ car toutes les dérivées sont définies:

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{pour } n \geqslant 4.$$

- La fonction $h(x) = x\sqrt{x}$ est dérivable sur $[0, \infty[$, car

$$h'(x) = \sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad \text{pour tout } x \in [0, \infty[,$$

  mais h n'est pas dérivable deux fois en $x = 0$ car

$$h''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}} \quad \text{n'est pas définie en } x = 0.$$

Exercice

Exercice: *Calculer les cinq premières dérivées de la fonction*

$$f(t) = t^2 e^t$$

et déduire l'expression de $f^{(n)}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est-elle lisse?

Réponse: Les cinq premières dérivées sont:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2te^t + t^2e^t = (t^2 + 2t)e^t \\
f''(t) &= (2t + 2)e^t + (t^2 + 2t)e^t = (t^2 + 4t + 2)e^t \\
f'''(t) &= (2t + 4)e^t + (t^2 + 4t + 2)e^t = (t^2 + 6t + 6)e^t \\
f^{(4)}(t) &= (2t + 6)e^t + (t^2 + 6t + 6)e^t = (t^2 + 8t + 12)e^t \\
f^{(5)}(t) &= (2t + 8)e^t + (t^2 + 8t + 12)e^t = (t^2 + 10t + 20)e^t.
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$f^{(n)}(t) = \big(t^2 + 2n\,t + (n-1)n\big)\, e^t,$$

qui est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc f est lisse.

Critère pour établir la nature d'un point critique

Théorème: Soit : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction <u>lisse</u> sur D et soit $a \in D$ un point critique ($f'(a) = 0$). Alors:

i) <u>f est plate autour de a</u> ssi <u>toutes les dérivées de f s'annullent en a</u>, c.-à-d. $\quad f^{(k)}(a) = 0 \quad$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

ii) Sinon, <u>soit n l'ordre de la première dérivée de f non nulle en a</u>, c.-à-d. que $\quad f^{(n)}(a) \neq 0 \quad$ et $\quad f^{(k)}(a) = 0 \quad$ pour tout $k < n$:

- a est un <u>minimum local</u> ssi n est <u>pair</u> et $f^{(n)}(a) > 0$,
- a est un <u>maximum local</u> ssi n est <u>pair</u> et $f^{(n)}(a) < 0$,
- a est un point d'<u>inflexion</u> ssi n est <u>impair</u>.

En particulier, si a est un point critique ($f'(a) = 0$), on a:

- Si $f''(a) > 0$, alors a est un <u>minimum local</u>.
- Si $f''(a) < 0$, alors a est un <u>maximum local</u>.
- Si $f''(a) = 0$ (a s'appelle **point plat**), pour connaitre la nature de a il faut regarder les dérivées d'ordre supérieur.

Exercice

TMB
A. Frabetti
6 Dérivées
Continuité
Dérivées
Extrema locaux
Taylor

Exercice: *Trouver les points critiques de la fonction*

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2},$$

et détérminer s'ils sont des extrema locaux ou des points d'inflexion.

Réponse: Le domaine de la fonction f est $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.
Cherchons les points critiques:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3\, 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3.$$

Par conséquent, il y a deux points critiques: $\quad x = 0 \quad$ et $\quad x = 3$.

Exercice (suite)

Pour connaitre la nature des points critiques, calculons la dérivée seconde.

Puisque $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$, on a:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(2x(x-3)+x^2\right)(x-1)^3 - x^2(x-3)\,3(x-1)^2}{(x-1)^6} \\ &= \frac{\left(2x^2-6x+x^2\right)(x-1) - 3(x^3-3x^2)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(3x^2-6x)(x-1) - (3x^3-9x^2)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{3x^3-3x^2-6x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4} \\ &= \frac{6x}{(x-1)^4}. \end{aligned}$$

Alors:

- En $x=3$ on a $f''(3) = \frac{18}{2^4} = \frac{9}{8} > 0$, donc $x=3$ est un minimum local.
- En $x=0$ on a $f''(0)=0$, donc on ne peut rien dire pour l'instant.

Exercice (suite)

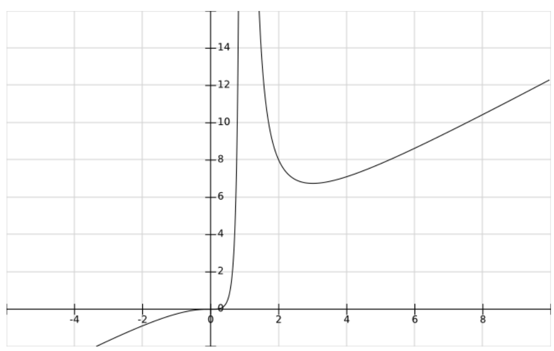
Calculons la troixième dérivée. Puisque $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$, on a:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{6(x-1)^4 - 6x\,4(x-1)^3}{(x-1)^8} \\ &= \frac{6(x-1)-24x}{(x-1)^5} \\ &= \frac{-18x-6}{(x-1)^5} = -6\frac{3x+1}{(x-1)^5} \end{aligned}$$

On a alors $f'''(0) = -6\frac{1}{(-1)^5} = 6 \neq 0$.

Puisque la première dérivée non nulle en $x=0$ est d'ordre impair, on a que $x=0$ est un point d'inflexion.

En effet, le graphe de f est:



4. Polynôme de Taylor et approximations

Théorème: Toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable n fois autour d'un point a peut être approximée en tout point x proche de a par un polynôme de degré n dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de f en a, qui s'appelle **polynôme de Taylor d'ordre n de f en** a:

$$\boxed{T_a^n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n}.$$

Le niveau d'approximation est mésuré par le **reste**

$$\boxed{R_a^n f(x) = f(x) - T_a^n f(x)},$$

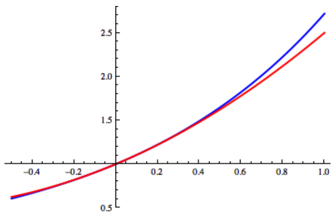
qui tend vers 0 pour $x \to a$.

Exemple: Voici les graphes de

$$f(x) = e^x \quad \text{(en bleu)}$$

et de son polynôme de Taylor d'ordre 2 en $a = 0$

$$T_0^2 f(x) = 1 + x + x^2/2 \quad \text{(en rouge)}.$$



Les restes en $x = 1$ et en $x = 0.1$ valent:

$$R_0^2 f(1) = e - (1 + 1 + 1/2) \simeq -0.83 \quad \text{(mauvaise approximation)}$$

$$R_0^2 f(0.1) = e^{0.1} - (1 + 0.1 + 0.01/2) \simeq -0.0018 \quad \text{(bonne approximation)}$$

Polynômes de Taylor importants (autour de 0)

$f(x)$	$T_0^n f(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} x^n$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$
$\sin x$	$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$
$\cos x$	$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$
e^x	$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n}x^n$
$\ln(1-x)$	$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n$

Exercice

Exercice: *Trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 de la fonction*

$$f(x) = \frac{4-x}{2+x}$$

autour des points $a = 0$ *et* $b = 1$.

Réponse: Il nous faut les premières deux dérivées de f:

$$f'(x) = \frac{-(2+x)-(4-x)}{(2+x)^2} = -\frac{6}{(2+x)^2}$$

$$f''(x) = (-6)\frac{-2(2+x)}{(2+x)^4} = \frac{12}{(2+x)^3}$$

- Autour de $a = 0$:

$$f(0) = \frac{4}{2} = 2, \quad f'(0) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}, \quad f''(0) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2},$$

donc $\quad T_0^2\left(\frac{4-x}{2+x}\right) = 2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2.$

- Autour de $b = 1$:

$$f(1) = \frac{3}{3} = 1, \quad f'(1) = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}, \quad f''(1) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9},$$

donc $\quad T_1^2\left(\frac{4-x}{2+x}\right) = 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2.$

Estimation du reste

Rappel: Le théorème de Taylor garantit que si f est dérivable n fois autour de a, alors il existe un polynôme $T_a^n f(x)$ qui est une bonne approximation de f quand $x \to a$, c'est-à-dire tel que

$$f(x) = T_a^n f(x) + R_a^n f(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to a} R_a^n f(x) = 0.$$

Formule de Young: Le reste $R_a^n f(x)$ est négligéable par rapport au polynôme de Taylor:

$$\boxed{R_a^n f(x) = o\big((x-a)^n\big)},$$

où $o(h)$ est une fonction qui tend vers 0 plus vite que h: $\quad \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$

Formule de Lagrange: Si f est dérivable $n+1$ fois autour de a, alors pour tout x proche de a il existe une valeur c comprise entre a et x telle que

$$\boxed{R_a^n f(x) = \tfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}.$$

Exercice

Exercice:

- *Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a*

$$1 - x + x^2 - x^3 \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

Réponse: Puisque $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{1+x} = (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$, on sait, par la formule de Taylor-Lagrange, que pour tout $x \geqslant 0$ il existe un c compris entre 0 et x tel que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(1+c)^{n+1}} x^n.$$

Puisque $0 \leqslant c \leqslant x$, on a $c + 1 \geqslant 1$. Donc, pour $n = 3$ on a $(-1)^3 \frac{1}{(1+c)^4} \geqslant -1$ et donc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \frac{1}{(1+c)^4} x^3 \geqslant 1 - x + x^2 - x^3.$$

Et pour $n = 4$ on a $(-1)^4 \frac{1}{(1+c)^5} \leqslant 1$, donc

$$\frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \frac{1}{(1+c)^5} x^4 \leqslant 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

Exercice (suite)

- *Pour quelles valeurs de $x \geqslant 0$ peut-on dire que $1 - x + x^2 - x^3$ est une approximation de $\frac{1}{1+x}$ à 10^{-4} près, c'est-à-dire telles que*

$$\left| \frac{1}{1-x} - (1 - x + x^2 - x^3) \right| \leqslant 10^{-4}?$$

Réponse: Des inégailtés

$$1 - x + x^2 - x^3 \leqslant \frac{1}{1-x} \leqslant 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$$

on déduit que

$$0 \leqslant \frac{1}{1-x} - (1 - x + x^2 - x^3) \leqslant x^4.$$

Il suit alors que

$$\left| \frac{1}{1-x} - (1 - x + x^2 - x^3) \right| \leqslant 10^{-4}$$

si on prend $x \leqslant 10^{-1}$, car dans ce cas on a bien $x^4 \leqslant 10^{-4}$.